INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE INCERTIDUMBRES

Miguel Samplón Chalmeta
msamplon@unizar.es

3 de marzo de 2011

Índice

Prólogo

Este documento recoge los contenidos sobre cálculo de incertidumbres en procesos de medida que se han venido impartiendo como parte de la asignatura Electrometría del tercer año de la titulación de Ingeniería Técnica Industrial, especialidad Electricidad en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Zaragoza.

La limitación en tiempo así como el hecho de tener que ocuparse también en esa asignatura de otras temáticas no demasiado relacionadas con ésta en primera aproximación, como ha sido el control de instrumentación por ordenador, han forzado a que se consideren únicamente los casos en los que las magnitudes son independientes y no se ha mencionado métodos alternativos como el de Monte Carlo que también vienen recogidos en el GUM. Por los mismos motivos no se hace un análisis de grados de libertad en la composición de magnitudes a fin de obtener una mejor estimación del factor de cobertura del resultado final. En este sentido se pueden considerar estas notas como introductorias.

Por otra parte se ha incidido fuertemente en la clasificación de los dispositivos metrológicos en referencias e instrumentos de medida lo que, a juicio del autor, facilita el tratatamiento sistemático y conceptual del problema.

A efectos de facilitar la comunicación de resultados y/o dudas a través de medios electrónicos, como el correo electrónico y sistemas de chat, se ha desarrollado una notación que no emplea subíndices ni superíndices y que, si bien resulta un tanto engorrosa al principio, se adapta bien a su escritura en texto plano.

Considerando la ingente cantidad de documentación libre y de calidad que he encontrado a través de Internet y de la que he sacado provecho me parece casi obligado difundir este documento de la misma manera. Es por ello que se publica bajo una licencia Creative Commons CC BY-NC 3.0[1]

Se dice que un documento de este tipo nunca se termina de escribir, simplemente se deja de trabajar en él. Es mi intención a corto plazo continuar revisándolo y completándolo con más ejemplos al menos hasta el curso 2012-2013 momento en el que la docencia en esa asignatura cesará en pro de los nuevos planes de estudio que han llegado de la mano de la declaración de Bolonia. Espero que la información de estas páginas clarifique antes que oscurezca, en especial para mis estudiantes, en cuyo caso lo espero devotamente. Fuera del ámbito de ese colectivo, si al lector le resultad de utilidad este documento me agradará saberlo, por lo que le invito a que me lo comunique por correo electrónico así como cualquier comentario, crítica u objección -yo soy el único culpable- que crea conveniente.

Miguel Samplón Chalmeta
msamplon@unizar.es

Zaragoza, marzo del 2011

1. Conceptos básicos

1.1. Concepto de medir

Un atributo de un fenómeno, cuerpo o substancia es medible cuando podemos establecer una correspondencia entre ese atributo y sus propiedades físicas y un conjunto de números y sus propiedades matemáticas. En ese caso a ese atributo se le denomina magnitud medible o simplemente magnitud. Emplearemos indistintamente el término magnitud para indicar el concepto general o una realización concreta de esa magnitud en el mismo sentido en que empleamos el término longitud para referirnos al atributo general, «La longitud se mide en metros», o a una realización concreta, «Tiene una longitud de 12 metros».

Medir es el proceso mediante en cual asociamos a una magnitud concreta el número que le corresponde. En términos generales dentro de las magnitudes que utiliza la Física eso se realiza mediante la comparación de esa magnitud con otra de referencia que arbitrariamente se adopta como unidad. Por comparación en este caso entendemos no sólo establecer una relación de orden, esto es, si una magnitud es mayor o menor que la otra, sino ser capaces de especificar cuantas veces es mayor o menor. Así, cuando decimos que la tensión que cae en una resistencia es $3V$ queremos decir que esa tensión ha resultado ser tres veces más grande que una tensión de referencia denominada «Voltio».

Para llevar a cabo la comparación podemos recurrir genéricamente a uno de estos métodos:

- *Medición mediante un instrumento de medida.* La magnitud a medir se pone en contacto con un instrumento de medida el cual arroja una *lectura* (digital o analógica) del valor de la magnitud. Un ejemplo de este tipo lo constituye un óhmetro.
- *Medición por comparación directa.* Mediante un dispositivo o montaje auxiliar se comparan la magnitud a medir y una o varias magnitudes de referencia. El dispositivo auxiliar presenta algún visualizador que indica el momento en que ambas magnitudes son iguales. Esencialmente este método es similar al anterior siendo el dispositivo auxiliar un instrumento de medida optimizado para medidas en torno a cero de la magnitud y con el que se mide la diferencia entre ambas. Una balanza de dos brazos para la medida de masas o un puente de Wheastone para la medida de resistencias son posibles ejemplos.

Desde un punto de vista metrológico los instrumentos que van a formar parte de un sistema de medida los podemos clasificar en dos grupos

> *Referencias*: Son dispositivos que presentan o generan una cantidad susceptible de ser medida.

Ejemplos de referencias son: pilas y por extensión fuentes de alimentación (magnitud: tensión), shunts (magnitud: resistencia), diodos zener (magnitud: tensión), un circuito astable, y por extensión, un generador de onda (magnitud: frecuencia). Asimismo los «calibradores multifunción» de los que suelen estar dotados los laboratorios de metrología son dispositivos capaces de actuar como referencias configurables tanto en el tipo de magnitud que generan como en su valor.

> *Instrumentos de medida*: Son dispositivos capaces de realizar una lectura sobre una referencia.

Idealmente esa lectura corresponderá con el valor verdadero de la referencia.

Ejemplos de instrumentos de medida son: voltímetros, capacímetros, óhmetros, amperímetros, frecuencímetros, termómetros, una regla métrica, osciloscopios...

La definición anterior implica que la caracterización principal de un instrumento de medida es que dispone de una pantalla o *display* o más generalmente de algún sistema mediante el que nos transmite el valor de la lectura. De esta forma el instrumento de medida pueden ser un único dispositivo físico independiente o estar constituido por un conjunto de dipositivos trabajando conjuntamente, cada uno de los cuales podrían interpretarse como rereferencias o instrumentos de medida de forma independiente pero que globalmente se comportar como un instrumento.

EJEMPLO

Una medida de potencia disipada sobre una carga puede realizarse:

- Mediante un watímetro.
- Mediante un voltímetro y un amperímetro conectados a través de un bus de instrumentación a un ordenador que es el encargado de procesar la información obtenida de ambos dispositivos y visualizar el resultado en la pantalla.

De esta forma el conjunto formado por el voltímetro, el amperímetro y el ordenador puede considerarse como un único instrumento de medida.

1.2. Resultado de una medición

Si se aplica un instrumento de medida a una magnitud, idealmente se debería obtener una lectura coincidente con el valor verdadero de la magnitud. No obstante, experimentalmente se puede comprobar que si se repite el proceso en condiciones esencialmente idénticas se obtienen resultados diferentes aunque previsiblemente similares. El resultado de la medición es por tanto un conjunto de valores más o menos agrupados pero que presentan una cierta dispersión.

Vamos a ilustrarlo con un ejemplo. Supongamos que disponemos de una línea conductora por la que circula una corriente alterna proviente de la red. Se pretende realizar una medida de la amplitud de la intensidad que circula empleando como instrumento de medida una pinza amperimétrica. Sin pretender realizar una lista exhaustiva, la dispersión que obtendríamos se podría achacar a una o varias de las siguientes causas:

- *Influencia del método de medida.* La ubicación de la pinza en torno al conductor no se hace de una forma centrada.
- *Influencia del instrumento de medida.* El entrehierro del circuito magnético cambia un poco cada vez que se abre y se cierra la mordaza.
- *Influencia del operador.* El operario es incapaz de centrar adecuadamente la pinza en torno al conductor.
- *Influencia de otras magnitudes.* Existe un campo inducción magnética variable exterior al que crea la línea conductora y que actúa sobre los sensores magnéticos de la pinza.
- *Indefinición o mala definición de la magnitud a medir.* Previsiblemente se está intentando medir la amplitud pero presuponiendo que la corriente es una senoidal pura de 50Hz. Si la corriente tiene contenido armónico, la «amplitud AC» no está bien definida.
- *Otras causas intrínsecas al mensurado.*

Idealmente el resultado de una medición debería ser un único valor consistente con la definición de la magnitud que se ha medido[2]. Sin embargo las causas anteriormente citadas van a conducir al establecimiento de un conjunto de valores que, *a la luz del conocimiento que tenemos*, pueden ser igualmente asociados al resultado. En consecuencia el resultado de una medición no es un único valor sino un conjunto de ellos típicamente agrupados en un intervalo. Con respecto a esto cabe hacer dos consideraciones:

(a) El tamaño del intervalo no es intrínseco del mensurando sino que depende también, tal como se ha visto, del operador y del método de medida en un sentido amplio. En este sentido el tamaño del intervalo puede considerarse un indicador de la calidad del procedimiento de medida o como un indicador del grado de conocimiento/desconocimiento que se tiene de esa magnitud.

(b) Mejoras en el procedimiento de medida conducirán a intervalos progresivamente más pequeños, pero no se podrán reducir a un único punto. Por ello la idea de *valor verdadero* de una magnitud pierde sentido físico.

[2] El VIM define *valor verdadero* de una magnitud como el *valor en consistencia con la definición de una magnitud particular dada.* Asimismo indica la imposibilidad de conocer ese valor

El intervalo de valores que podemos atribuir a un mensurando X lo representamos mediante dos valores:

- *Valor convencionalmente verdadero.*

  > *Valor convencionalmente verdadero de una magnitud* es el valor atribuido a una magnitud

  Corresponde con la mejor estimación que tenemos del valor verdadero. Normalmente coincidirá con el valor central del intervalo. Lo denotaremos como $\mathrm{X}\to VCV$.

- *Incertidumbre.*

  > *Incertidumbre* es un parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de valores que podrían razonablemente ser atribuidos al mensurando.

  Aunque más adelante se matizará el valor que se asignará a la incertidumbre por ahora consideraremos que la incertidumbre corresponde con la semianchura del intervalo. Lo denotaremos por $\mathrm{X}\to UX$

La especificación del resultado de una medida pasará por la indicación de ambos valores que, por otra parte, tienen las mismas dimensiones físicas. Usualmente esto se suele hacer en la forma:

$$(\mathrm{X}\to\mathrm{VCV}\ \pm\ \mathrm{X}\to\mathrm{UX})\ Unidad \tag{1}$$

EJEMPLO

El resultado de la medida de una intensidad I podría ser:

$$(28.78\ \pm\ 0.16)\ A \tag{2}$$

con lo que expresamos que, en base al conocimiento que tenemos de esa corriente podemos razonablemente atribuirle cualquier valor entre 28.62 A y 28.94 A

En ocasiones la incertidumbre se suele expresar en valores relativos, normalmente en tanto por cien aunque no siempre es así. En ese caso:

$$(\mathrm{X}\to UX)_{\mathrm{REL}} = 100\frac{\mathrm{X}\to UX}{\mathrm{X}\to VCV} \tag{3}$$

1.3. Patrones

Un sistema de instrumentación puede estar constituido por un único instrumento de medida o ser una combinación más o menos compleja de referencias e intrumentos de medida. Algunos de ellos pueden tener un papel auxiliar en el proceso. Sin embargo un instrumento de medida sólo sera relevante de cara a una medición lo tengamos caracterizado desde un punto de vista metrológico, en cuyo caso decimos que el dispositivo, referencia o instrumento de medida, es un *patrón.* La caracterización metrológica implica que conocemos la calidad de su operación como dispositivo metrológico. El proceso mediante el que se consigue que un dispositivo sea un patrón se suele denominar habitualmente *calibración* o menos frecuentemente, *verificación*[3]

La caracterización metrologica se interpreta de forma diferente en función del tipo de dispositivo que se trate:

- En el caso de referencias implica que conocemos el valor de la cantidad que presentan y por tanto su valor convencionalmente verdadero y su incertidumbre.

  Un trozo de hilo de cobre es una referencia de resistencia, pero no es un patrón puesto que desconocemos su valor óhmico y por tanto no constituye un patrón. Inclusive aunque tuviese indicado su valor óhmico mediante una etiqueta tampoco podríamos considerarlo patrón mientras no estuviésemos seguros de la validez de esa información.

[3] Realmente hay una cierta diferencia entre *calibración* y *verificación* que se verá mas adelante. Pero habitualmente se emplea el término *calibración* en ambos sentidos.

- En el caso de instrumentos de medida la caracterización metrológica consiste en dispone de una estimación del «error» que comete al realizar una lectura. Más formalmente, la caracterización para por determinar su *desviación*

> *Desviación* de un instrumento de medida es la diferencia entre lo que mide y lo que debería medir

Para calibrar un instrumento de medida no patrón (o, equivalentemente, para determinar su desviación) se le hace medir una referencia patrón. La referencia (R), como tal patrón, tiene un valor conocido de (R$\rightarrow$VCV $\pm$ R$\rightarrow$UX) , mientras que el instrumento de medida (IM) indica que esa referencia vale (IM$\rightarrow$VCV $\pm$ IM$\rightarrow$UX) . Probablemente habrá una cierta diferencia entre ambos intervalos en general o entre ambos valores convencionalmente verdaderos en particular que de alguna manera reflejan lo que se «desvía» el instrumento de medida al hacer la medida. La desviación viene representada por la siguiente magnitud:

$$D = R - I \tag{4}$$

que refleja la interpretacíón de la desviación como la diferencia entre lo que debe medir y lo que en realidad mide. Alternativamente, si despejamos R de la ecuación anterior:

$$R = I + D \tag{5}$$

lo que permite interpretar la desviación como la cantidad con la que hay que corregir al instrumento de medida (la cantidad que hay que añadir al resultado que ofrece) para obtener el resultado correcto.

Calibrar un instrumento de medida consiste por tanto en medir su desviación. Como todo procedimiento de medida conllevará una cierta dispersión de valores, por lo que la especificación de la desviación será en la forma (D$\rightarrow$VCV $\pm$ D$\rightarrow$UX)

1.4. Expresión del resultado de una medida

La determinación final del valor convencionalmente verdadero e incertidumbre de una magnitud conllevará en la mayor parte de los casos de un cierto tratamiento matemático. A fin de no añadir una fuente adicional de incertidumbre, en los cálculo intermedios no se realizará ningún tipo de redondeo sino que se tratará de arrastrar el mayor número de decimales posible. Sin embargo el resultado final sí que se someterá a un cierto redondeo a fin de aumentar su legibilidad a la hora de plasmarlo en un informe. Para la realización de ese redondeo se siguen las siguientes reglas:

- La incertidumbre se redondeará a dos cifras significativas y siempre hacia arriba (el redondeo siempre debe tender a aumentar la incertidumbre)
- El valor convencionalmente verdadero se redondeará hasta el nivel de significación de la última cifra significativa a la que se ha redondeado la incertidumbre. Se emplearán las reglas habituales de redondeo: si la siguiente cifra menos significativa está entre 0 y 4 la cifra a redondear se dejará al valor que tiene. Si la siguiente cifra menos significativa está entre 6 y 9, la cifra a redondear se incrementará en una unidad. Si la siguiente cifra menos significativa es 5 la cifra a redondear se incrementará una unidad o se dejará como está de forma aleatoria

Un forma más algorítmica de realizar lo anterior es la siguiente:

1. Expresamos la incertidumbre en la forma P.RXXXXX EAA, donde P, R, X y A representan dígitos y E es el símbolo de exponente
2. Nos aseguramos que P no es cero
3. Incrementamos R en una unidad y obtenemos S = R + 1
4. El resultado final de la incertidumbre es P.S EAA
5. Reescribimos este número como nos convenga para quitar si lo queremos el exponente de acuerdo con las unidades en que esté expresado

6. Expresamos el valor convencionalmente verdadero de la forma MMMMM.HTZZZZZZ EAA, donde M, H, T, Z y A representan dígitos y E es el símbolo de exponente. AA deben tener el mismo valor que los que tenía la incertidumbre. Habrá tantas cifras M com hagan falta.
7. Consideramos el valor de H

   Si $0 \leq H \leq 4 \quad \Rightarrow \quad K = H$

   Si $6 \leq H \leq 9 \quad \Rightarrow \quad K = H + 1$

   Si $H = 5 \quad \Rightarrow \quad K = H + 1$ *ó* $K = H$ aleatoriamente
8. El resultado final del valor convencionalmente verdadero es MMMMM.K EAA
9. Reescribimos este número como nos convenga para quitar si lo queremos el exponente de acuerdo con las unidades en que esté expresado

2. Estimación de incertidumbres

2.1. Representacion matemática de una magnitud

Una vez establecido el sentido de valor convencionalmente verdadero e incertidumbre surge el problema de la determinación cuantitativa de ambos para una magnitud dada. De alguna manera el desconocimiento que tenemos del valor verdadero de la magnitud obliga a reemplazarlo por un intervalo de valores, lo que permite interpretar la magnitud como una entidad a la que cada vez que se le pregunta su valor nos devuelve uno cualquiera de dicho intervalo. Esto resulta equiparable al comportamiento de una variable aleatoria matemática y en este sentido:

> Dada una magnitud X, a esta magnitud le asociamos una variable aleatoria X, generalmente continua y con una función densidad de probabilidad $f_X(x)$

El valor promedio de una variable aleatoria, tras un número arbitrariamente grande de experimentos es el valor esperado (o esperanza) de dicha variable, lo que recoge el sentido que hemos asociado al valor convencionalmente verdadero. Así:

> El valor convencionalmente verdadero de una magnitud X se establece como la esperanza de su variable aleatoria asociada.

La incertidumbre caracteriza la anchura del intervalo de valores razonablemente atribuibles al mensurando, por tanto podrían ser aceptables como incertidumbre cualquier medida de dispersión de la variable aleatoria. No obstante y considerando que que la incertidumbre debe tener las mismas dimensiones físicas que el valor convencionalmente verdadero, podemos asociarle tentativamente la segunda.

> La incertidumbre estándar[4] de una magnitud X corresponde a la desviación típica de su variable aleatoria asociada. La representaremos mediante el símbolo $\mathrm{X}\!\rightarrow\! UE$

Lo anterior establece para el resultado de la magnitud X un intervalo de

$$[\mathrm{X}\!\rightarrow\! VCV - \mathrm{X}\!\rightarrow\! UE, \mathrm{X}\!\rightarrow\! VCV + \mathrm{X}\!\rightarrow\! UE]$$

¿Cómo de representativo es ese intervalo? Suponiendo que la magnitud X tiene una distribución normal[5], ese intervalo cubre un 68.26 % de los casos. O, de forma más precisa, si se vuelve a realizar el proceso de medida sobre esa la magnitud tenemos un 68.26 % de probabilidad de que el resultado obtenido se halle dentro de ese intervalo. ¿Es esto suficiente? En realidad con esta pregunta lo que estamos buscando es una cuantificación del sentido del adverbio *razonablemente* que aparece en la definición de incertidumbre. ¿68.26 % de probabilidad representa un intervalo razonable? Generalmente no, por lo que se opta por ampliarlo mediante su multiplicación por un factor de cobertura k

> La incertidumbre expandida de una magnitud X es el resultado de multiplicar la incertidumbre estándar por un factor de cobertura k de forma que el intervalo resultante represente los valores que podrían ser razonablemente atribuidos a la magnitud dentro de unos niveles de probabilidad preestablecidos.

La práctica habitual es elegir el nivel del probabilidad a un valor del 95.44 % lo que implica, *suponiendo que la magnitud se distribuye normalmente*, un valor de $k = 2$. Sin embargo, para otras distribuciones el valor de k para ese nivel de probabilidad será otro[6].

Existe otro motivo que justifica la existencia de un factor k. Una indicación de a calidad de una medida viene dada por el valor de su incertidumbre: A menor incertidumbre menor es el intervalo en el que hemos acotado el valor verdadero de la magnitud. Sin embargo para que se puedan establece comparaciones entre las incertidumbres asociadas a dos medidas, ambas deben referirse al mismo intervalo de confianza, de ahí la importancia del conocimiento de factor de cobertura y la necesidad de indicarlo (implícita o

[5] para aligerar el texto, en adelante no distinguiremos entre «magnitud» y «variable aleatoria asociada a la magnitud»
[6] En concreto para una distribución rectangular $k \approx 1.64$.

explicitamente) cada vez que se expresa una incertidumbre expandida. No obstante lo anterior, en muchas ocasiones se supondrá[7] que la distribución final de la medida es normal y se tomará un valor de 2 para k

Lo expuesto hasta ahora implica que conocida la función de distribución de la variable aleatoria que representa nuestra magnitud podemos determinar su valor convencionalmente verdadero como su valor esperado, su incertidumbre estándar como su desviación típica y su varianza en la que en muchas ocasiones también estaremos interesados como se verá más adelante. Sin embargo en la práctica esa función de distribución será desconocida a priori. Esto es obvio; si por ejemplo pretendemos medir la tensión generada por una cierta pila alcalina, no disponemos de ninguna información escrita en ella sobre la función con los que se van a distribuir las diferentes lecturas que hagamos.

Bajo estas condiciones, se establecen dos posibles métodos de estimación del valor convencionalmente verdadero e incertidumbre. Los métodos se denominan de forma estándar «Evaluación tipo A», y «Evaluación tipo B».

2.2. Estimación de la incertidumbre. Evaluación tipo A

> *Evaluación tipo A.* Consiste en la evaluación de la magnitud y su incertidumbre mediante métodos estadísticos aplicados a una serie de observaciones (lecturas) del mensurando.

Este método típicamente se empleará con las lecturas obtenidas de instrumentos de medida. En nuestro ejemplo anterior, pretendemos obtener el valor verdadero de la tensión de la pila alcalina, o al menos la mejor estimación del mismo. Sin embargo las medidas vienen enmascaradas por una serie de factores de influencia, muchos de los cuales son extrínsecos al mensurando. Sin embargo sabemos que el promedio de las lecturas tiende al valor verdadero según promediamos un mayor número de ellas, por lo que para determinar el valor verdadero realizaremos una serie de lecturas que inevitablemente va a ser finito. La media muestral es nuestro estimador del valor verdadero

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \tag{6}$$

Como el numero de lecturas N no es infinito la expresión anterior no nos va a dar el valor verdadero aunque sí un valor próximo. De hecho, si repitiéramos el procedimiento con una nueva serie de lecturas obtendríamos una estimación del valor verdadero un poco diferente. Desde un punto de vista matemático, los promedios de las observaciones se distribuyen con una cierta función de distribución que nos va a acotar el valor convencionalmente verdadero. Cuanto mayor sea el número de observaciones que componen cada serie de lecturas menor será el intervalo en el que acotamos el valor verdadero. La dispersión de esos valores vendrá caracterizada por su desviación típica o su varianza (el cuadrado de la desviación típica). Podemos estimar su valor mediante la varianza muestral:

$$S^2_{\overline{X}} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(X_k - \overline{X})^2 \tag{7}$$

Y a partir de la varianza puede obtenerse la desviación típica simplemente tomando la raíz cuadrada.

A modo de resumen: Disponemos de una magnitud X que queremos determinar mediante una serie de N lecturas (Evaluación tipo A). Entonces:

$$\mathrm{X}{\rightarrow}VCV = \frac{1}{N}\sum_{k} X_k \tag{8}$$

$$\mathrm{X}{\rightarrow}S2 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k}(X_k - \mathrm{X}{\rightarrow}VCV)^2 \tag{9}$$

$$\mathrm{X}{\rightarrow}UE = \sqrt{\mathrm{X}{\rightarrow}S2} \tag{10}$$

$$\mathrm{X}{\rightarrow}UX = k\mathrm{X}{\rightarrow}UE \tag{11}$$

Sin embargo quedan un par de cuestiones de detalle por resolver

[7] Por lo menos en el ámbito de aplicación de este documento.

- ¿Cuantas lecturas hay que tomar? ¿Que valor de k consideramos? Para poder responder necesitamos un conocer la función de distribución de $\overline{X}$. Sin embargo por la Estadística sabemos que:
  - Si X se distribuye como una gaussiana entonces $\overline{X}$ se distribuye como una gaussiana
  - Si X no se distribuye como una gaussiana entonces $\overline{X}$ se distribuye aproximadamente como una gaussiana donde la aproximación será mejor conforme $N \to \infty$ (Teorema Central del Límite)

  En general consideraremos que con $N \geq 10$ ya podemos aproximar la distribución como gaussiana[8] por lo que tomaremos series de 10 lecturas y utilizaremos un valor de $k = 2$.

- Físicamente ¿Cómo se deben tomar las lecturas? A la luz de lo explicado anteriormente, las lecturas deben tomarse de forma que las magnitudes de influencia no presenten sesgo (es decir que tengan una influencia nula en promedio).

EJEMPLO

Queremos medir el valor ohmico de una resistencia a base de configurar una fuente de tensión a 5V y bajo esas condiciones medir la corriente que circula. Aunque la fuente indique en su visualizador que está generando 5.0V puede que en ocasiones esté dando en realidad 5.01V, pero al volver a configurar su salida a 5V esté generando 4.98V. Por ello debería reconfigurarse la fuente para dar una salida de 5V antes de la toma de cada lectura.

2.3. Estimación de la incertidumbre. Evaluación tipo B

Evaluación tipo B. La evaluación será de tipo B para los casos en que no se realice mediante la evaluación tipo A

Este método se emplea cuando, por el motivo que sea, no se dispone o no se puede disponer de un conjunto de lecturas sobre las que aplicar métodos estadísticos. Y se ahí que se establezca que es evaluación tipo B cuando no se puede realizar evaluación tipo A.

Los motivos que pueden conducir a este tipo de evaluación pueden ser varios:

- No se dispone de instrumentos para tomar las lecturas.
- El trabajo asociado a esa toma de lecturas es excesivamente costoso o inabordable en un planteamiento real de la medida.
- Resulta imposible realizar las lecturas.

EJEMPLO

A modo de ejemplo: Supongamos que para una medida en la que interviene una resistencia necesitamos realizar las correcciones correspondientes a su variación con la temperatura. Conocemos el coeficiente de temperatura pero no disponemos de un termómetro calibrado que nos suministre una indicación fiable de la temperatura a la que se realiza el experimento. Sin embargo la habitación está climatizada y dada la calidad del sistema de climatización y a partir de su manual de funcionamiento podemos considerar que la sala se encuentra dentro de una cierta banda de temperaturas. No podemos realizar una evaluación tipo A pero tampoco tenemos un desconocimiento completo de la temperatura.

¿Qué se hace en estos casos? *A partir de la información disponible se supone una distribución de probabilidad para la magnitud en cuestión* y a partir de ella se determina el valor convencionalmente verdadero como su esperanza y la incertidumbre estándar como su desviación típica.

La información disponible puede ser varia:

- Valores adaptados de manuales técnicos o tablas de reconocida solvencia.

[8] La aproximación es un poco fuerte. Los estadísticos optan por considerar $N \geq 30$ pero desde un punto de vista práctico eso resulta muy costoso

- Datos de certificados de calibración.
- Especificaciones de fabricantes.
- Conocimiento y experiencia con los mensurandos y los sistemas de medida implicados.

Las distribuciones de probabilidad que se presuponen suelen ser dos en la mayoría de los casos[9]: la distribución normal o gaussiana y la distribución rectangular.

2.4. Distribución normal

Una variable aleatoria X con distribución normal o gaussiana posee una función de distribución caracterizada por dos parámetros que corresponden a su esperanza $E[X] = \mu$ y su desviación típica σ. Tiene la siguiente forma:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \tag{12}$$

En muchas ocasiones se considera que el resultado final de una medida se distribuye según esta distribución. Poe ello cuando utilicemos en nuestro procedimiento de medida resultados de mediciones previas podemos presuponer que se distribuyen de esta forma. La información disponible es este caso, los resultados de las medidas, nos darán directamente los parámetros necesarios de la distribución.

EJEMPLO

El certificado de calibración de un shunt Hartmann-Braun indica que, sometido a una intensidad de 1000A durante un tiempo de 30 minutos (a fin de alcanzar el equilibrio térmico) presenta una resistencia de 20.008 $\mu\Omega$ con una incertidumbre de calibración de $\pm 0.05(\%)$. El mismo certificado indica que la incertidumbre corresponde a dos desviaciones típicas (nivel de confianza de aproximadamente el 95 %). A partir de aquí, directamente, obtenemos:
La información sobre la incertidumbre nos hace suponer que se trata de una distribución normal y que la incertidumbre expandida se ha calculado con $k = 2$. Por otra parte ésta nos la dan en valor relativo con respecto al valor convencionalmente verdadero.

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}{\to}VCV &= 20.008\ \mu\Omega \\
\mathrm{R}{\to}UX &= 0.05(\%) = \frac{0.05}{100} 20.008\ \mu\Omega = 0.01\ \mu\Omega \\
\mathrm{R}{\to}UE &= \frac{1}{k}\mathrm{R}{\to}UX = 0.005\ \mu\Omega \\
\mathrm{R}{\to}S2 &= (\mathrm{R}{\to}UE)^2 = 2.5 \cdot 10^{-17}\ \Omega^2
\end{aligned} \tag{13}$$

2.5. Distribución rectangular

La distribución rectangular se caracteriza por una función de distribución de valor constante entre dos límites a y b ($a < b$) y un valor nulo fuera de esos límites.

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & otros\ valores \end{cases} \tag{14}$$

A partir de aquí se pueden determinar los parámetros representativos de la distribución

$$E[X] = \mu = \frac{1}{2}(b-a) \tag{15}$$

[9] Por los menos en los que se usarán aquí

$$Var[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{Var[X]} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \tag{16}$$

Vamos a ilustrar con ejemplos las formas habituales de utilizar esta distribución.

A) **Se conocen los dos extremos de la distribución** En este caso podemos aplicar directamente las expresiones anteriores.

EJEMPLO

En un proceso de medida uno de los dispositivos es sensible a la temperatura. La medición se hace con un sistema de aire acondicionado que mantiene la temperatura estable entre los 22 y 24 grados.
A falta de mayor información suponemos que todos los valores de temperatura son igualmente probables, lo que conduce a una distribución rectangular entre los límites $a = 22°C$ y $b = 24°C$
Aplicando las anteriores expresiones para la esperanza y la desviación típica obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\rightarrow VCV &= \tfrac{1}{2}(24-22) &&= 23°\ C \\ \mathrm{T}\rightarrow UE &= \tfrac{24-22}{\sqrt{12}} &&= 0.5774°\ C \end{aligned} \tag{17}$$

B) **Se conoce el valor central y el semiintervalo**

Siendo x_0 el valor central y $p = (b-a)/2$ el semiintervalo, fácilmente se obtiene que $a = x_0 - p$ y $b = x_0 + p$ de donde inmediatamente:

$$\mu = x_0 \tag{18}$$

$$Var = \frac{p^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{p}{\sqrt{3}} \tag{19}$$

EJEMPLO

Disponemos de una resistencia comercial de valor nominal $4k7$ y que pertenece a la serie E24 (banda oro: tolerancia del 5 %)
Presuponemos que la tolerancia indican que los valores de la resistencia estarán comprendidos entre su valor nominal ±5 %. A falta de mayor información suponemos que todos los resultados son equiprobables.

$$\begin{aligned} p &= 4700\frac{5}{100} &&= 235\ \Omega \\ \mathrm{R}\rightarrow VCV &= 4700\ \Omega \\ \mathrm{R}\rightarrow S2 &= 18408.33\ \Omega^2 \\ \mathrm{T}\rightarrow UE &= 135.677\ \Omega \end{aligned} \tag{20}$$

C) **Se conoce el valor central y el intervalo completo**

Siendo x_0 el valor central y $h = (b-a)$ el intervalo, fácilmente se obtiene que $a = x_0 - h/2$ y $b = x_0 + h/2$ de donde inmediatamente:

$$\mu = x_0 \tag{21}$$

$$Var[X] = \frac{h^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{h}{\sqrt{12}} \tag{22}$$

EJEMPLO

El número π es irracional trascendente por lo que tiene infinitos decimales que no siguen un patrón de repetición establecido. A la hora de utilizarlo en cálculos puramente numéricos se consideran sus decimales hasta un cierto nivel de significación y el resto se ignoran. Este truncamiento es fuente de incertidumbre. En concreto supongamos que tomamos el valor de π como 3.141592. Ello implica reconocer que nuestro nivel de conocimiento de π nos indique que puede ser cualquier valor entre:

$$3.1415920000000000000\ldots < \pi < 3.1415929999999999999\ldots \tag{23}$$

y todos ellos con la misma probabilidad. Estamos por tanto ante una distribución rectangular de centrada en 3.14159250000... y de anchura el valor *una unidad del dígito menos significativo*. El dígito menos significativo es el 2 por lo que $h = 0.000001$, por lo que:

$$\begin{aligned} \pi \to VCV &= 3.141592500000000\ldots \\ \pi \to S2 &= 8.3333333\ E^{-14} \\ \pi \to UE &= 2.8867513\ E^{-7} \end{aligned} \tag{24}$$

2.6. Composición de incertidumbres

Hasta ahora hemos descrito la forma de obtener valores convencionalmente verdaderos e incertidumbres de una única magnitud y por ello esta situación sólo es aplicable a los casos en los que la magnitud que evaluamos directamente coincide con la magnitud en la que estamos interesados. En la práctica ésto raramente suele darse. Normalmente obtendremos el valor de la magnitud en la que estamos interesados Y de forma indirecta mediante la evaluación previa de un conjunto de magnitudes ($X_k,\ k = 1 \cdots n$) relacionadas con ella de una forma que establecerá el procedimiento de medida. La dependencia cobrará la forma de una función matemática:

$$Y = f(X_1, \ldots, X_n) \tag{25}$$

EJEMPLO

Se dispone de un cable conductor por el que circula una corriente lo suficientemente elevada como para estar fuera del rango de trabajo del amperímetro del que disponemos. En ese caso, para medir dicha corriente se opta por insertar en ese cable una resistencia «shunt» y medir la caida de tensión entre los extremos del shunt. La intensidad que circula la obtenemos a través de la relación funcional:

$$I = f(R_{SHUNT}, V_{DMM}) = \frac{V_{DMM}}{R_{SHUNT}} \tag{26}$$

El problema que surge ahora es el siguiente: conocidos los valores de las magnitudes de entrada (lo que implica conocer su valor convencionalmente verdadero e incertidumbre) ¿cómo determino el valor de la magnitud de salida? (es decir, su valor convencionalmente verdadero y su incertidumbre)

Las reglas a emplear son las siguientes:

1. El valor convencionalmente verdadero de la magnitud de salida lo obtenemos evaluando la relación funcional del procedimiento de medida los valores convencionalmente verdaderos de las magnitudes de entrada.

$$\mathrm{Y} \to VCV = f(\mathrm{X_1} \to VCV, \ldots, \mathrm{X_n} \to VCV) \tag{27}$$

2. La varianza de la magnitud de salida se obtiene mediante la «ley de composión de varianzas»[10]

$$\mathrm{Y} \to S2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial X_k} \right|_{X_k \ = \ \mathrm{X_k} \to VCV} \right)^2 \mathrm{X_k} \to S2 \tag{28}$$

[10] Se presuponen magnitudes de entrada incorreladas

3. La incertidumbre estándar se obtiene a partir de la varianza por el método habitual

$$\mathrm{Y}\!\rightarrow\! UE = \sqrt{\mathrm{Y}\!\rightarrow\! S2} \tag{29}$$

4. Para la incertidumbre expandida necesitamos conocer la distribución de salida para determinar el valor de k que conduzca a un intervalo de confianza del 95 %. El problema no es fácil de resolver y requiere un análisis detallado. Sin embargo en muchas ocasiones el resultado final se aproxima por una distribución normal. Por ello en primera aproximación optaremos por el factor de cobertura correspondiente a esta distribución, es decir $k = 2$

$$\mathrm{Y}\!\rightarrow\! UX = k\,\mathrm{Y}\!\rightarrow\! UE \tag{30}$$

EJEMPLO

Para el caso de la medida de corriente a traves del shunt del ejemplo anterior, se tiene:

$$\mathrm{I}\!\rightarrow\! VCV = \frac{\mathrm{V_{DMM}}\!\rightarrow\! VCV}{\mathrm{R_{SHUNT}}\!\rightarrow\! VCV} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\!\rightarrow\! S2 &= \left(\tfrac{1}{\mathrm{R_{SHUNT}}\rightarrow VCV}\right)^2 \mathrm{V_{DMM}}\!\rightarrow\! S2 \quad + \\ &+ \left(\tfrac{-\mathrm{V_{DMM}}\rightarrow VCV}{\mathrm{R_{SHUNT}}\rightarrow VCV}\right)^2 \mathrm{R_{SHUNT}}\!\rightarrow\! S2 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\mathrm{I}\!\rightarrow\! UE = \sqrt{\mathrm{I}\!\rightarrow\! S2} \tag{33}$$

$$\mathrm{I}\!\rightarrow\! UX = 2\,\mathrm{I}\!\rightarrow\! UE \tag{34}$$

3. Representación de patrones

3.1. Calibración de un instrumento

Para que un instrumento que intervenga en un procedimiento de medida nos pueda dar información fiable y por tanto útil tiene que ser un patrón y por ello, o equivalentemente, tiene que estar caracterizado metrológicamente. A este proceso se le denomina calibración.

La forma de llevarla a cabo dependerá del tipo de instrumento que se trate:

- Referencias. Su caracterización metrológica consiste únicamente en especificar cual es su valor. Una referencia R calibrada será aquella para la que conozcamos su intervalo $\mathrm{R}\to VCV \pm \mathrm{R}\to UX$.

  Conviene indicar que puede darse el caso de referencias cuya salida es configurable de alguna manera, generalmente mediante un panel frontal. Es, por ejemplo, el caso de una fuente de tensión variable. Igualmente la calibración de este dispositivo pasará por establecer el valor convencionalmente verdadero y la incertidumbre para cada uno de los posibles valores de salida.

- Instrumentos de medida. Calibrar un instrumento de medida consiste en establecer lo bien o mal que mide y dar la especificación correspondiente. Eso se realiza enfrentándolo a una referencia patrón y comprobando la diferencia entre el valor que debe medir (el de la referencia) y el valor que mide (la información obtenida a partir de las lecturas suministradas por el instrumento). Podemos definir una magnitud denominada desviación

  $$\text{Desviación} = \text{Referencia} - \text{Instrumento De Medida} \Longrightarrow D = R - I \tag{35}$$

  Calibrar un instrumento de medida consiste en determinar su desviación y eso se consigue mediante un proceso de medición, medición de la desviación de instrumento, siendo por tanto la expresión anterior el modelo matemático del procedimiento. Por ello:

  $$\mathrm{D}\to VCV = \mathrm{R}\to VCV - \mathrm{I}\to VCV \tag{36}$$

  y aplicando la ley de propagación de varianzas:

  $$\mathrm{D}\to S2 = \mathrm{R}\to S2 + \mathrm{I}\to S2 \tag{37}$$

En términos generales todos los instrumentos empleados en un proceso de medida (excepto el que se va a medir) deben ser patrones dado que son los únicos que ofrecen información confiable. Tanto para una referencia como para un instrumento de medida la información sobre su valor o sobre su desviación respectivamente la obtendremos esencialmente de una de estas dos fuentes

- De las especificaciones dadas por el fabricante. Nada más adquirir el dispositivo podemos suponer que las especificacioens del fabricante[11] sobre el dispositivo son fiables. Típicamente estan vendrán indicadas en el manual de uso. Conforme pasa el tiempo el instrumento sufre derivas que pueden hacer que deje de cumplir sus propias especificaciones y por tanto ya no son fiables. Esto es tanto más cierto si el instrumento a estado sometido a condiciones rigurosas o un mal uso. Para instrumentos de medida, el fabricante suele dar indicaciones del periodo de tiempo en el que es razonable esperar que sus especificaciones sigan siendo válidas: Periodos típicos suelen ser de dos años.

- De un certificado de calibración. Cuando las especificaciones del fabricante ya no son fiables, el dispositivo debe enviarse a un laboratorio de metrología para que lo calibren. De vuelta obtendremos un informe en el que se especifica el valor del dispositivo si se trata de una referencia o las desviaciones que presenta si se trata de un instrumento de medida.

[11] Un fabricante de confianza

3.2. Especificaciones de un patrón dadas por el fabricante

En general el fabricante indicará directamente el valor convencionalmente verdadero como el valor nominal de la referencia y la incertidumbre expandida en términos absolutos o relativos al valor nominal. En función de la variación del valor de la referencia con respecto a magnitudes de influencia o estados de operación de la misma, estos valores pueden tener una especificación más compleja que habrá que analizar en cada caso.

Tambien resulta habitual especificar una «Clase» para la referencia. El VIM define la «clase de exactitud como grupo de instrumentos de medida que satisfacen determinas exigencias metrológicas destinadas a conservar los errores dentro de límites especificados». A la vista de esta definición conviene hacer dos consideraciones:

- La definición se apoya en el concepto de «error» que esencialmente se define como la diferencia entre el resultado y el verdadero valor. Dado que este último no es determinable, se opta por sustituir el verdader valor por el valor convencionalmente verdadero. Sin embargo este proceso fue uno de los motivos por el que se introdujo el concepto de incertidumbre como sustituto de error. Si la clase establece un «error máximo» ¿como debe considerarse el concepto de clase bajo la nueva óptica de incertidumbre?
- La clase define «grupos de instrumentos» que satisfacen determinadas exigencias de medida. En ese sentido, pese a que la clase se suele denotar mediante un número, resulta en último caso, un rótulo o nombre que agrupa a instrumentos de comportamiento metrológico similar.

De forma simplificada, cuando se habla de un dispositivo de clase X suele indicar que el «error relativo máximo» expresado en tanto por cien es $\pm X$. A falta de mayor información puede resultar adecuado interpretar ese error máximo como la incertidumbre expandida bajo una distribución normal ($k = 2$) Así, para una referencia R

$$\mathrm{R}{\to}UX = \mathrm{R}{\to}VCV\frac{\mathrm{Clase}}{100} \tag{38}$$

$$\mathrm{R}{\to}S2 = \sqrt{\frac{\mathrm{R}{\to}UX}{2}} \tag{39}$$

Los dispositivos que son referencias pero de salida configurable tienen una especificaciones dadas por el fabricante similares a las de los instrumentos de medida, por lo que se remite al lector a la sección correspondiente.

3.3. Especificaciones de un instrumento de medida

Esencialmente el fabricante debe construir el instrumento, calibrarlo y por tanto determinar su desviación y hacer público ese valor en la hoja de especificaciones técnicas o más generalmente en el manual del instrumento. Sin embargo hay que hacer diferentes matizaciones a este proceso.

- Supongamos que el fabricante calibra el instrumento en un punto (por ejemplo en 3V DC para un multímetro digital[12] y encuentra que tiene un $\mathrm{D}{\to}VCV \neq 0$ por supuesto una $\mathrm{D}{\to}UX$ no nula. Lógicamente el fabricante desea que ambos parámetros sean lo más próximos a cero posible. La calidad de fabricación así como los componentes empleados[13] determinarán el valor de la incertidumbre y no puede actuar sobre ellos salvo encareciendo el producto. Sin embargo la desviación la puede eliminar mediante el correspondiente ajuste de componentes (potenciómetros de ajuste, constantes de calibración memorizadas en el firmware...) de forma antes de comercializar el producto realiza este proceso hasta conseguir una desviación nula.

$$\mathrm{D}{\to}VCV = 0 \tag{40}$$

[12] En muchas ocasiones en la literatura se denota por DMM, acrónimo de «digital multímeter»

[13] La referencia patrón empleada en el procedimiento de medida mediante el que se ha determinado la desviación idealmente debería tener una contribución despreciable frente a la propia del instrumento

y por tanto no da especificaciones de este valor (que ya se supone que es nulo). Sin embargo esto no implica que la incertidumbre expandida sea nula, que de hecho no lo es, y éste es el parámetro que se especifica.

- El fabricante publica unas especificaciones comunes para todos los instrumentos de un mismo modelo y por tanto deben ser correctas para cada uno de los instrumentos específicos de ese modelo. Para ello hace un análisis estadístico en base a varios instrumentos del mismo modelo y publica unas especificaciones que los cubran a todos. Es por ello que generalmente un instrumento concreto se va a comportar desde un punto de vista metrológico de mejor forma que lo que indiquen sus especificaciones.

- El fabricante debe especificar la incertidumbre para todos los posibles puntos de medida y en todas las posibles configuraciones del medida del instrumento. Para instrumentos de gama alta esto resulta muchas veces inabordable, de forma que las especificaciones se dan considerando el instrumento configurado en el modo de mayor precisión. Pese a todo, se listan especificaciones para cada magnitud que es capaz de medir el instrumento y, dentro de ellas, para cada rango de medida.

- Dentro de un rango de medida (por ejemplo Magnitud V DC, rango 1V - 10V) se deberían dar valores de incertidumbre para cada posible punto, lo que nuevamente resulta inabordable. Es decir deberia especificar la incertidumbre cuando el instrumento está arrojando lecturas en torno a los 2 V, los 8 V, los 33 V, los 54 V etc. Para ello supone que, dentro de un rango de medida la incertidumbre de la magnitud que se mide es una cierta función del valor de la magnitud, es decir

$$\mathrm{X}{\rightarrow}UX = f(\mathrm{X}{\rightarrow}VCV) \tag{41}$$

Ahora bien, podemos aproximar esa dependencia funcional genérica a una dependencia lineal y por tanto describirla empleando únicamente dos constantes α y β.

$$\mathrm{X}{\rightarrow}UX \approx \alpha \mathrm{X}{\rightarrow}VCV + \beta \tag{42}$$

De esta forma el fabricante para indicar la incertidumbre del instrumento en ese rango únicamente publica los coeficientes α y β. La forma de indicar esos valores en las especificaciones se suele hacer de alguna de las siguientes formas:

  - **Coeficiente** α. Se suele expresar como un «% de lectura». Si el fabricante indica un 0.0035 % de lectura el valor de α se calculará como:

$$\alpha = \frac{0.0035}{100} \tag{43}$$

  - **Coeficiente** β Se suele expresar en una de las siguientes formas
    - Directamente como una cantidad constante con las mismas unidades que el mensurando. Por ejemplo $50\mu V$

$$\beta = 50\mu V \tag{44}$$

    - Como un «% de rango». En ese caso el valor de β se establece en forma relativa al valor máximo del rango. Por ejemplo 0.0005 % de rango. En nuestro ejemplo, el rango era 1V - 10V, luego

$$\beta = \frac{0.0005}{100} 10V = 50\mu V \tag{45}$$

    - Como un «número de dígitos» donde «un dígito» representa el valor absoluto de la magnitud correspondiente a una unidad del dígito menos significativo que se muestra en pantalla[14]. En nuestro ejemplo, y suponiendo una resolución de $0.00001V$ el valor de β vendría especificado como 5 dígitos.

$$\beta = 5 \cdot 0.00001 = 50\mu V \tag{46}$$

[14] Esencialente a ese valor se le denomina la resolución del instrumento

- Dado que lo que el fabricante especifica es una incertidumbre expandida, debería (aunque no siempre lo hace) indicar el valor de k con el que se ha calculado la incertidumbre expandida y/o el intervalo de confianza que representa.
- Las especificaciones suelen venir acompañadas de un conjunto de condiciones de funcionamiento y/o configuración del dispositivo de forma que sólo son aplicables cuando se lo ha utilizado de esa forma.[15] Tal como se ha indicado anteriormente, suelen coincidir con la configuración de máxima precisión del instrumento.

3.4. Representación metrológica de un instrumento de medida

Cuando en un procedimiento de medida utilizamos una referencia conoceremos su valor y ese valor es su representación metrológica. Sin embargo cuando se utilice un instrumento de medida la situación es más compleja. Un instrumento de medida funcionalmente se caracteriza porque es capaz de ofrecer lecturas de un mensurando. Metrológicamente el resultado obtenido por el instrumento de medida lo vamos a englobar en una magnitud que en lo que sigue denominaremos genéricamente IM. Normalmente no evaluaremos de forma directa esta magnitud dado que va a depender de otras mangitudes más sencillas que serán las que evaluemos directamente. La relación funcional es la que sigue:[16]:

$$\mathrm{IM} = \mathrm{IM.VIS} + \mathrm{IM.OC} + \mathrm{IM.D} \tag{47}$$

Vamos a analizar cada uno de los componentes.

- IM.VIS.

  La lectura que nos ofrece el instrumento de medida representa un número real y por ello con un número indefinido de cifras significativas o decimales. Sin embargo no es posible que un instrumento muestre en su pantalla un número de ese tipo sino que realizará algun tipo de redondeo o truncamiento hasta dejarlo con un número de decimales adecuado para presentarlo en pantalla. En ese sentido:

  > IM.VIS representa la parte de la información que el instrumento de medida nos comunica inequívocamente

  - El el caso de un instrumento con visualizador digital, corresponde a las cifras que el dispositivo muestra en pantalla.
  - En el caso de un instrumento con visualizador analógico, corresponde a la lectura que inferimos en base al posicionamiento de la aguja en una escala graduada.

  En ambos casos la evaluación de esta magnitud será de tipo A.

- IM.OC.

  Es lo contrario a la parte visible, representa lo que no podemos ver

  > IM.OC Representa la parte de información que el instrumento debería comunicarnos y que por limitaciones del visualizador no lo hacei

  . Vamos a ver como determinamos esta magnitud en función de que se trate de un instrumento digital o analógico.

  - Instrumento digital. Supongamos que el instrumento muestra en pantalla el número 3.2. Dado que no muestra ningún decimal después del 2, el número que nos trata de comunicar el dispositivo podría ser 3.2003 ó 3.224387 etc... Suponiendo que el dispositivo redondea internamente la magnitud obtenida al número más próximo que puede presentar en el visualizador, ello quiere

[15] Una de las más habituales consiste en indicar un periodo de «calentamiento». Es decir un tiempo durante el cual el dispositivo ha de estar encendido antes de que cumpla sus especificaciones. Este tiempo típicamente suele estar comprendido entre 0 minutos, para instrumentos de planta hasta 2 horas para instrumentos de precisión.

[16] no se consideran otras correcciones que la de calibración

decir que cuando el dispositivo muestra un 3.2, podría ser cualquier valor entre 3.15000000... y 3.25000000.... Es decir cualquier numero comprendido entre 3.2 -(1/2)0.1 y 3.2 +(1/2)0.1 En el caso general, el número mostrado en pantalla P representará cualquier número comprendido entre P-(1/2)R y P+(1/2)R siendo R una unidad de la cifra menos significativa que nos muestra la pantalla. R se denomina la resolución del instrumento.

- Instrumento analógico. Supongamos que tras observar el visualizador analógico decidimos que la lectura ofrecida es 3.2 żPodría ser 3.21? O dicho de otra forma żsomo capaces de distiguir entre una lectura de 3.20 y otra de 3.21? En caso negativo, la diferencia entre ambas lecturas queda dentro de lo que el instrumento no es capaz de comunicarnos inequívocamente. La cuestión que surje es cómo determinar el intervalo de resolución del instrumento. Podemos realizar la siguiente prueba. La aguja estará situada entre dos marcas consecutivas de la escala graduada. Olvidémonos de la aguja y consideremos las dos marcas. żCual es el mayor número de partes en que puedo dividir el intervalo de forma que sea capaz de determinar si la aguja está en uno concreto de ellos (el primero, el segundo. etc...) El tamaño mínimo de intervalo que cumpla eso corresponderá con la resolución del instrumento y es el equivalente a R para el instrumento digital. Aunque conviene considerar cada caso particularmente, como regla gruesa puede tomarse como resolución del instrumento un cuarto del intervalo entre dos marcas, lo que es equivalente a decir que seríamos capaces de decidir si la aguja se encuentra en el primer, segundo, tercer o cuarto cuarto.

A la luz de lo anterior, IM.OC representa lo que hay que añadirle a la información que se muestra en pantalla (que asociamos a IM.VIS) para completarla con la que no se muestra. Hemos visto que se trata de un intervalo entre -R/2 y +R/2. A priori todos los valores dentro de ese intervalo son igualmente probables, luego se trata de una distribución rectangular centrada en 0 y de anchura R

$$\text{IM.OC}\rightarrow VCV = 0 \tag{48}$$

$$\text{IM.OC}\rightarrow S2 = \frac{R^2}{12} \tag{49}$$

- IM.D.

IM.D Representa la corrección, obtenida por calibración, que hay que aplicar a las lecturas.

Su valor lo obtendremos por medio de un certificado de calibración o de las especificaciones del fabricante.

Determinadas ya las magnitudes de entrada, la magnitud que representa el instrumento de medida la obtendremos mediante las reglas de composición:

$$\text{IM}\rightarrow VCV = \text{IM.VIS}\rightarrow VCV + \text{IM.OC}\rightarrow VCV + \text{IM.D}\rightarrow VCV \tag{50}$$

donde ya hemos visto que IM.OC $\rightarrow VCV = 0$. Por otra parte, si la desviación la obtenemos de las especificaciones del fabricante tambien ocurrirá que IM.D$\rightarrow VCV = 0$. Para las varianzas

$$\text{IM}\rightarrow S2 = \text{IM.VIS}\rightarrow S2 + \text{IM.OC}\rightarrow S2 + \text{IM.D}\rightarrow S2 \tag{51}$$

Existe un caso excepcional con respecto a lo anterior. Cuando calibramos un instrumento de medida (para convertirlo en un patrón), lo enfrentamos directa o indirectamente a una referencia para determinar su desviación. En este caso tenemos que representar matemáticamente un instrumento de medida no patrón. Es el único caso en el que un instrumentao de medida no patrón puede formar parte de un procedimiento de medida y eso es debido a que el propio procedimiento tiene como objetivo convertir en patrón a un instrumento no patrón. Supongamos que la calibración se realiza midiendo una referencia con un instrumento de medida patrón que denotaremos IMP y con el instrumento a calibrar que denotaremos IMNP. El modelo de la medida es

$$\text{IMNP.D} = \text{IMP} - \text{IMNP} \tag{52}$$

Notese que lo que estamos tratando de medir es la desviación del instrumento no patrón. La representación del instrumento patrón estará compuesta por las tres componentes VIS, OC y D como se ha expuesto. Pero en la representación del no patrón no podemos incluir la componente de desviación dado que es precisamente la que estamos tratando de determinar. En este caso el instrumento queda representado como:

$$\mathrm{IMNP} = \mathrm{IMNP.VIS} + \mathrm{IMNP.OC} \tag{53}$$

4. Ejemplos

4.1. Medida directa de una magnitud mediante un único instrumento de medida

- **Enunciado del problema** Determinar la tensión DC generada por una cierta fuente de tensión variable cuando se configura para dar una salida de tensión DC nominal de 11V. Como patrón se dispone de un multímetro Yokogawa modelo 7552. Se han realizado 10 lecturas de la tensión de salida de forma que antes de tomar cada lectura se desconfiguraba la fuente y se volvia a configurar para dar la salida nominal de 11V. El multímetro hizo las medidas en el rango de 20 V, y para ese rango las especificaciones del instrumento indican una resolución de $100\mu V$ y una precisión[17] de $\pm$(0.02 % de lectura +4 dígitos). Las lecturas obtenidas son:

$[V]$	$[V]$
11.4137	11.4134
11.4132	11.4129
11.4130	11.4128
11.4129	11.4126
11.4126	11.4125

Cuadro 1: Lecturas

- **Modelo matemático de la medida**

  Dado que se trata de una medida directa de una referencia no patrón (la fuente de tensión) mediante un patrón (el DMM Yokogawa), la tensión que buscamos VF es igual a la medida obtenida mediante el instrumento de medida que puede descomponerse en parte visible, parte oculta y desviación:

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VF.VIS} + \mathrm{VF.OC} + \mathrm{VF.DES} \tag{54}$$

- **Evaluación de incertidumbres**

  - **PARTE VISIBLE VF.VIS**

    Corresponde a una evaluación tipo A, de forma que podemos obtener su valor convencionalmente verdadero y su varianza a partir de las expresión indicadas en las ecuaciones (6) y (7).

$$\mathrm{VF.VIS}\rightarrow VCV = 11.41296\ V \tag{55}$$

$$\mathrm{VF.VIS}\rightarrow S2 = 1.44888888888E-08\ V^2 \tag{56}$$

  - **PARTE OCULTA VF.OC**

    La parte oculta corresponde a una distribución rectangular centrada en cero y de anchura total la resolución del instrumento. A tenor de la lecturas obtenidas vemos que la resolución es de $h = 0.0001\ V$. Considerando (22), obtenemos:

$$\mathrm{VF.OC}\rightarrow VCV = 0.0\ V \tag{57}$$

$$\mathrm{VF.OC}\rightarrow S2 = 8.333333333E-10\ V^2 \tag{58}$$

[17] especificaciones de precisión a un año y en un rango de temperatura de $(23 \pm 5)\ ^\circ C$. Se presupone que la medidas se hicieron dentro de ese margen de temperatura.

- **DESVIACION VF.D** Dado que se toman especificiones del fabricante y no un certificado de calibración, el valor convencionalmente verdadero de la desviación es nulo. La incertidumbre expandida la obtenemos de las especificaciones:

$$\text{VF.D}\rightarrow UX = \frac{0.02}{100}\text{VF.VIS}\rightarrow VCV + 4 \cdot 0.0001 = 0.0002792579\ V \tag{59}$$

  El fabricante no especifica el factor de cobertura para el que están expresadas las especificaciones de forma que consideramos la opción habitual: distribución gaussiana con $k = 2$, luego

$$\text{VF.D}\rightarrow S2 = \left(\frac{\text{VF.D}\rightarrow UX}{k}\right)^2 = 1.7990749596E-06\ V^2 \tag{60}$$

finalmente tenemos, aplicando (50) y (51), obtenemos:

$$\text{VF}\rightarrow VCV = 11.41296\ V \tag{61}$$

$$\text{VF}\rightarrow S2 = 1.814397479E-6\ V^2 \tag{62}$$

$$\text{VF}\rightarrow UX = 0.00269399\ V \tag{63}$$

- **Resultado**

  El resultado de la medida tras aplicar las reglas de redondeo queda:

$$\text{VF} = (11.4130\ \pm\ 0.0027)\ V \tag{64}$$

4.2. Medida indirecta de una magnitud

- **Enunciado del problema** Para la determinación de la corriente AC que circula por un cierto conductor se ha empleado un transformador de intensidad 400/5 de clase 0.5. Se hicieron 10 lecturas de la corriente de secundario mediante un DMM digital que en su rango de 6A AC ofrecía una resolución de 1 mA y una precisión del 3 % de lectura + 8 dígitos. Las lecturas fueron las siguientes:

$[A]$	$[A]$
4.372	4.360
4.363	4.372
4.365	4.370
4.373	4.368
4.361	4.374

Cuadro 2: Lecturas

- **Modelo matemático de la medida**

  Para la realización de la medida hemos utilizado dos patrones: Una referencia, el transformador de intensidad, caracterizado por su relación de transformación (η), y un instrumento de medida, el DMM, que va a determinar al corriente de secundario (ISEC). La corriente de primario (IPRIM), que es la que queremos determinar, vendrá dada por:

$$\text{IPRIM} = \eta\ \text{ISEC} \tag{65}$$

  Por otra parte, el instrumento de media es en sí una magnitud indirecta con las tres contribuciones habituales

$$\text{ISEC} = \text{ISEC.VIS} + \text{ISEC.OC} + \text{ISEC.DES} \tag{66}$$

- **Evaluación de incertidumbres**
  - **ISEC**
    El valor del resultado del instrumento de medida se obtendrá con la misma sistemática del ejemplo anterior, arrojando un resultado de:

$$\text{ISEC}\rightarrow VCV = 4.3678\ A \tag{67}$$

$$\text{ISEC}\rightarrow S2 = 2.70666666E-6\ A^2 \tag{68}$$

$$\text{ISEC}\rightarrow UX = 0.00381685\ A \tag{69}$$

  - η Interpretando la clase como la incertidumbre expandida relativa de la relación de transformción del trafo y asumiendo un factor $k = 2$, tenemos

$$\eta\rightarrow VCV = \frac{400}{5} = 80\ \frac{A}{A} \tag{70}$$

$$\eta\rightarrow UX = \frac{0.5}{100}\ 80\frac{A}{A} = 0.4\ \frac{A}{A} \tag{71}$$

$$\eta\rightarrow S2 = \left(\frac{\eta\rightarrow UX}{k}\right)^2 = 0.04\ (\frac{A}{A})^2 \tag{72}$$

    Componiendo las contribuciones de ambos dispositivos, tenemos

$$\text{IPRIM}\rightarrow VCV = \eta\rightarrow VCV \cdot \text{ISEC}\rightarrow VCV = 349.424\ A \tag{73}$$

    y mediante la ley de propagación de varianzas:

$$\text{IPRIM}\rightarrow VCV = (\eta\rightarrow VCV)^2\ \text{ISEC}\rightarrow S2 + (\text{ISEC}\rightarrow VCV)^2\ \eta\rightarrow S2 = 31.70968756\ A^2 \tag{74}$$

    por tanto

$$\text{IPRIM}\rightarrow UX = 11.26227\ A \tag{75}$$

- **Resultado**
  El resultado de la medida tras aplicar las reglas de redondeo queda:

$$\text{IPRIM} = (349\ \pm\ 12)\ A \tag{76}$$

Bibliografía

[1] BIPM, Ed., *Guía para la expresión de la incertidumbre de medida*, 1st ed. Centro Español de Metrología, 2008.

[2] BIPM, Ed., *Vocabulario internacional de metrología. Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados*, 3rd ed. Centro Español de Metrología, 2008.

[3] BIPM, Ed., *El sistema Internacional de Unidades*, 2nd ed. Centro Español de Metrología, 2008.

[4] A. Thompson and B. N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI)*, NIST, Ed. Centro Español de Metrología, 2008.

[5] EAL, *(CEA-ENAC-LC/02) Expresión de la incertidumbre de medida en las calibraciones*, 1997.