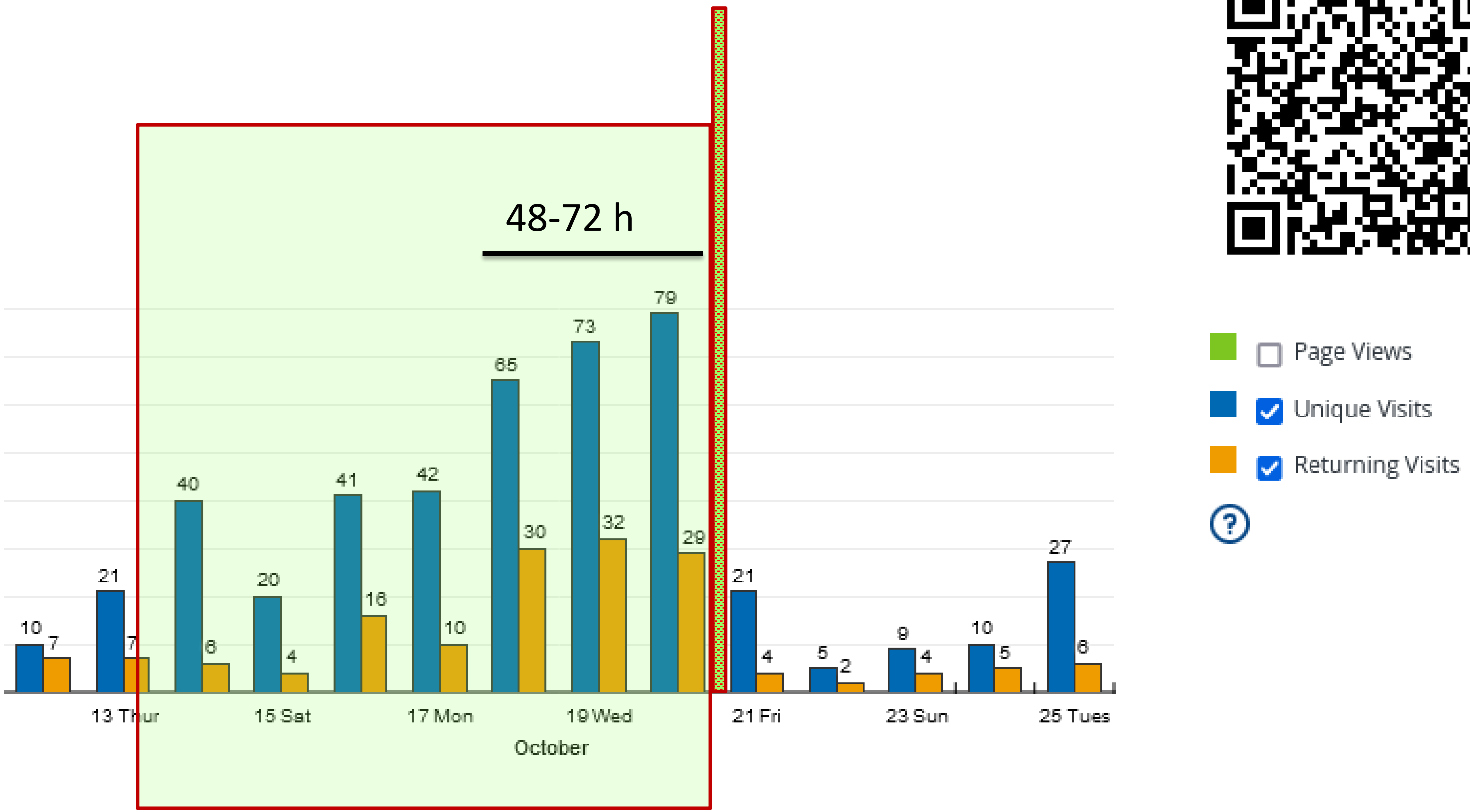
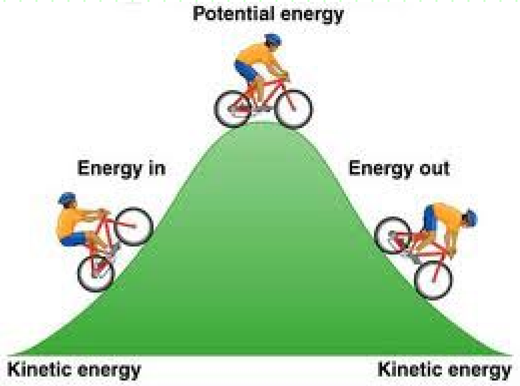
Trabajo y Energía

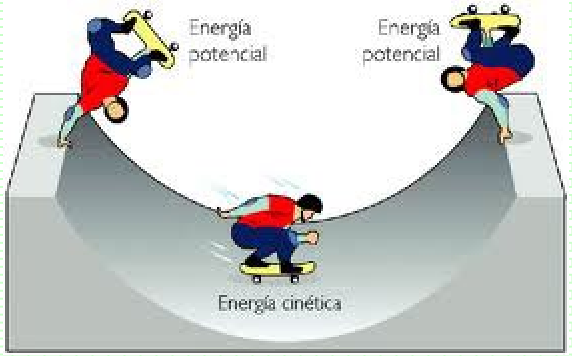
Se llama Kingda Ka y está en el parque Six Flags Great Adventure, en Jackson, Nueva Jersey, EE.UU. Tiene una altura de 139 m y alcanza una velocidad de 57,2 m/s (206 km/h) en 3,5 seg. La energía potencial debida a su altura se transforma en energía cinética de movimiento.

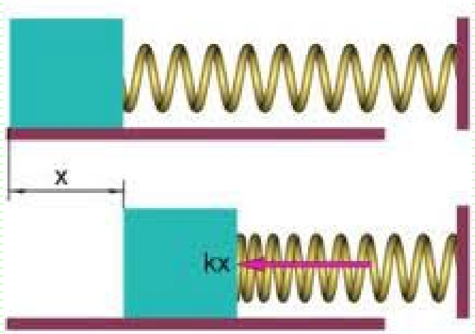


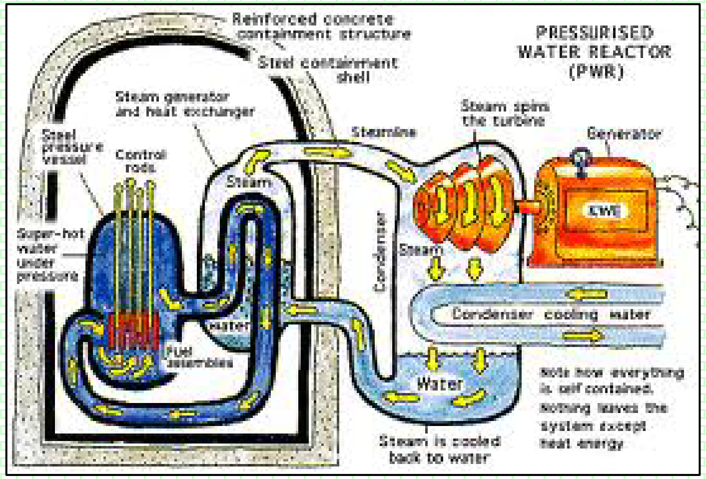
48-72 h
10
7
21
7
40
6
20
4
41
16
42
10
65
30
73
32
79
29
21
4
5
2
9
4
10
5
27
6
13 Thur
15 Sat
17 Mon
19 Wed
21 Fri
23 Sun
25 Tues
October
Page Views
Unique Visits
Returning Visits

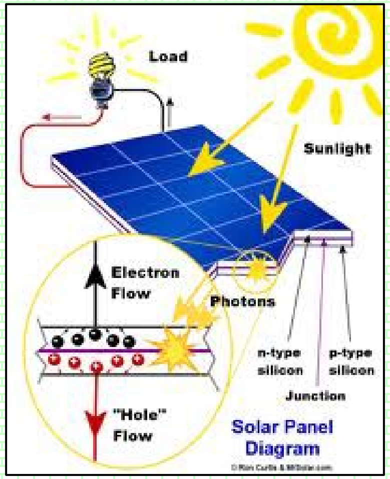
Trabajo y Energía

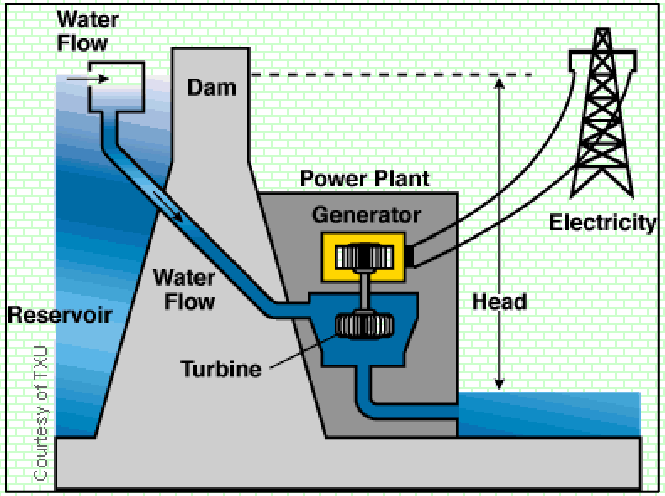










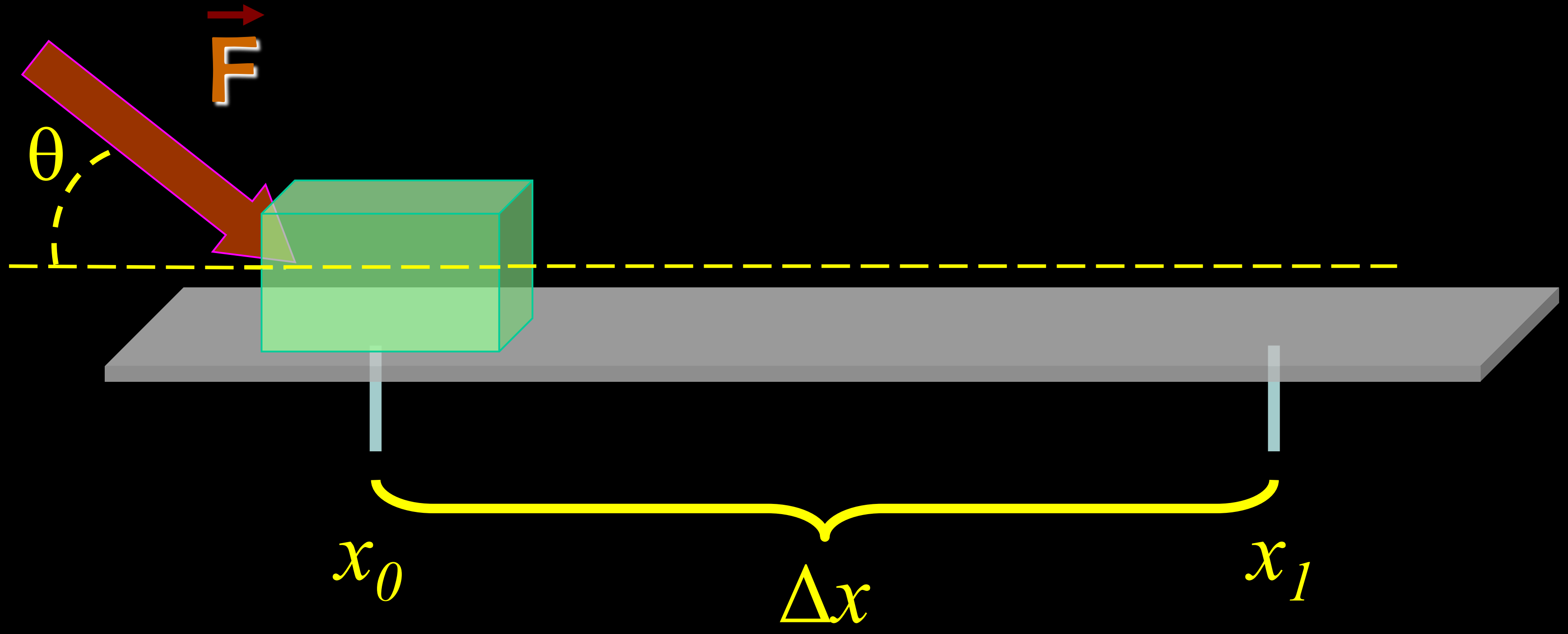


Trabajo y Energía

Trabajo

1. Fuerza **F** actuando sobre un objeto,
2. que se desplaza una distancia **Δx**

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$$



Trabajo

- Definición: $\mathbf{W} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$	$\vec{F} = (F_x\,, F_y\,, F_z\,)$	$\vec{F} = [\lvert F\rvert, \theta\,]$
$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$	$\Delta\vec{r} = (\Delta x\,, \Delta y\,, \Delta z\,)$	$\Delta\vec{r} = [\lvert\Delta r\rvert, \alpha\,]$

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F_x . \Delta x + F_y . \Delta y$$

o bien

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = |F| . |\Delta r| . \cos\theta$$

Trabajo

Si $\vec{F}$ = cte,

.... reiteramos

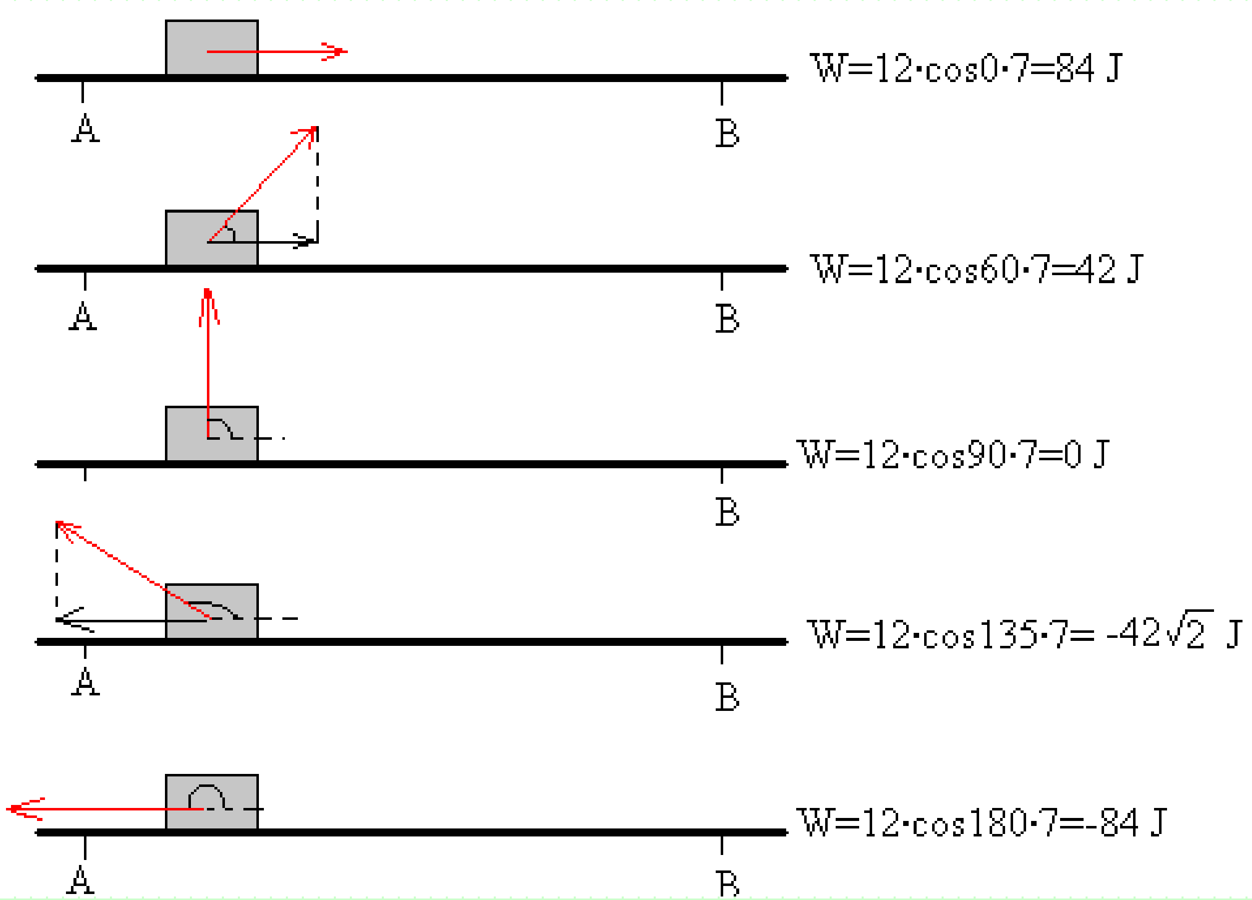
Si $\vec{F}$= **cte**,

Trabajo

Si $\vec{F}$ = cte,

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad W = F \cdot \Delta x \cos\theta$$

F = 12 N
Δx = 7 m

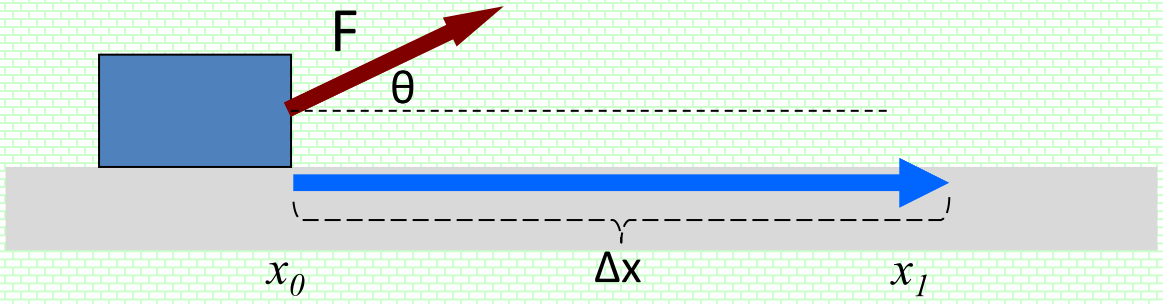


Trabajo

(seguimos con F= cte)

- W es un escalar (número)
- $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ son vectores

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

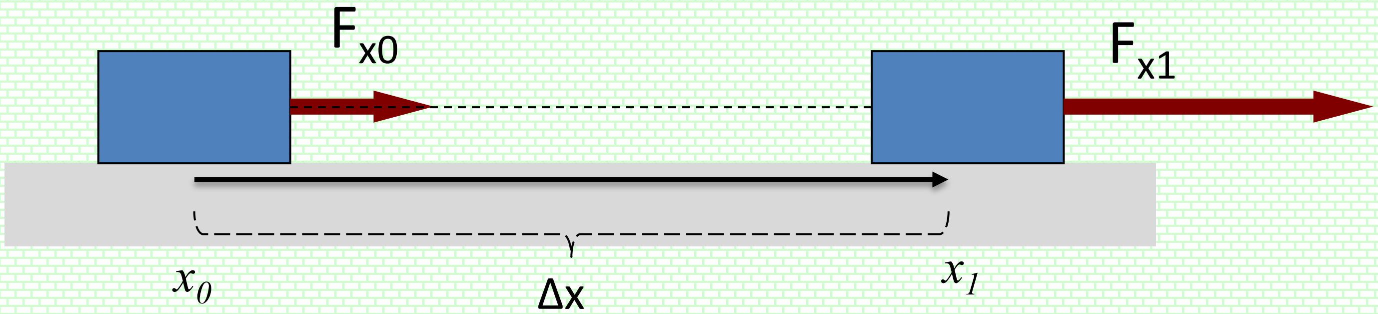


$[W]$ = 1 Joule = 1 J = 1 **N**. 1 **m** = 1 **kg m /s²** · **m**

$$[W] = \text{Joule} = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{N.m}$$

Trabajo

Ahora F = $f(x)$



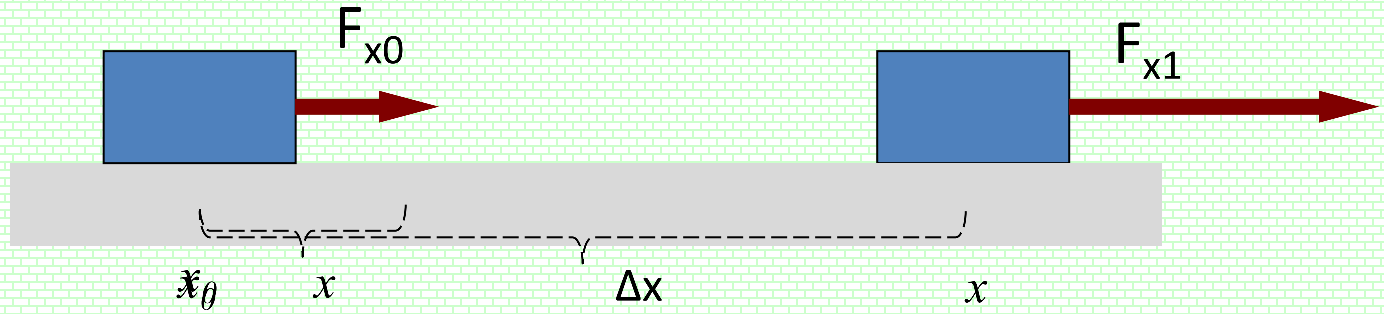
$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} \; ???$$

Por ejemplo?

$$F(x) \begin{cases} F(x) = -kx \\ F(x) = -bv = -b \, \dfrac{dx}{dt} \\ F(x) = a + b \ln(x/2) \end{cases}$$

Trabajo

Ahora F = *f(x)*



$$\Delta x \longrightarrow dx$$

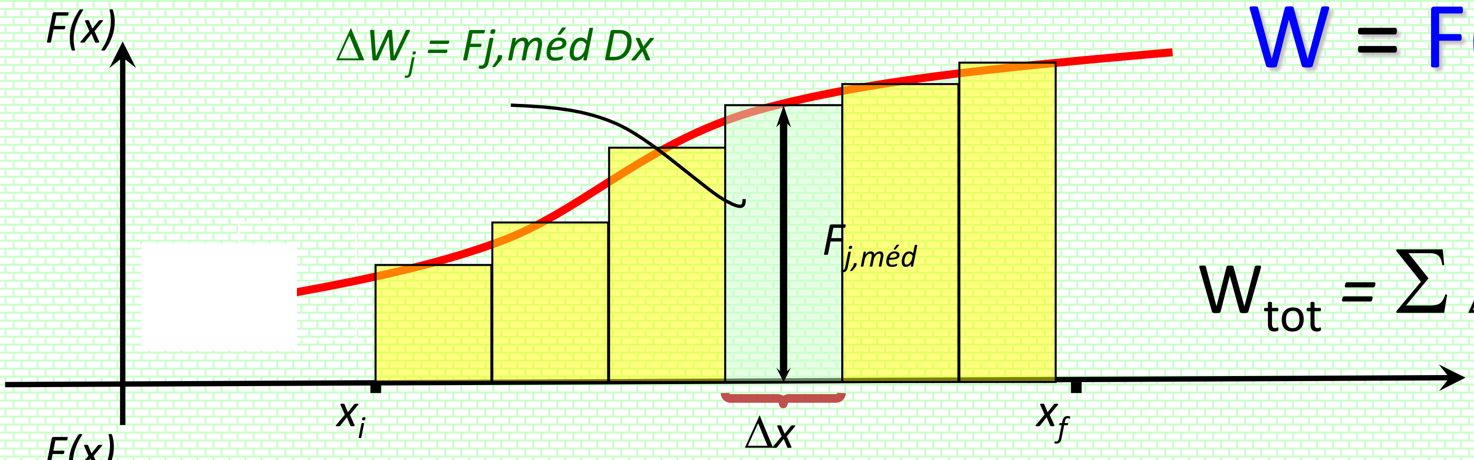
$$W \longrightarrow dW$$

$$dW = \vec{F}(x).\overrightarrow{dx}$$

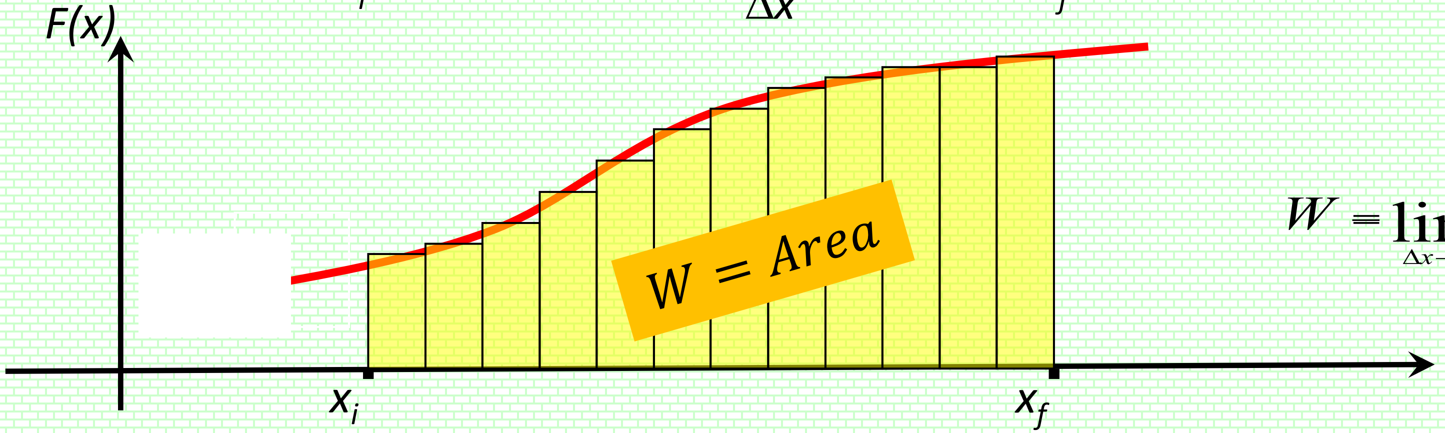
Trabajo de una Fuerza del tipo F(x)

- Fuerza y desplazamiento unidimensionales
- Fuerza NO constante, depende de x

$$W = F(x)\,\Delta x$$



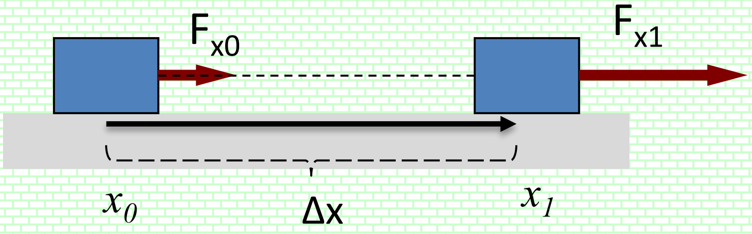
$$W_{tot} = \sum \Delta W_j$$



$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta W_j$$

$$W = \int_{xi}^{xf} F(x)\,dx$$

Trabajo



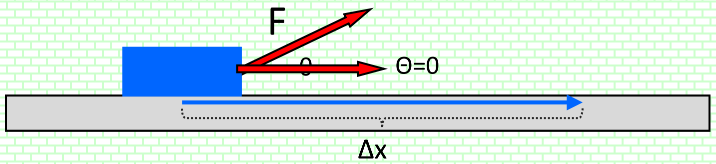
$$W = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} d\vec{r}$$

Si F = cte

$$W = \int_{x_0}^{x_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_0}^{x_1} F\cos\theta\, dr = F\cos\theta \int_{x_0}^{x_1} dr = F\cos\theta \Delta x$$

$$\mathbf{W} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

Trabajo y Energía



$caso\ \theta = 0$

$$W = F.\Delta x \begin{cases} v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \dfrac{v_f^2 - v_0^2}{2a} \\ F = ma \end{cases}$$

$$W = m\cancel{a}.\frac{v_f^2 - v_0^2}{2\cancel{a}} = \left[\frac{1}{2}mv_f^2\right] - \left[\frac{1}{2}mv_0^2\right]$$

$$W = K_f - K_0$$

Nueva magnitud Física: La Energía Cinética

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

1 Joule = 1 J = 1 kg m^2 /s^2

$$W = [K] - [K_0]$$

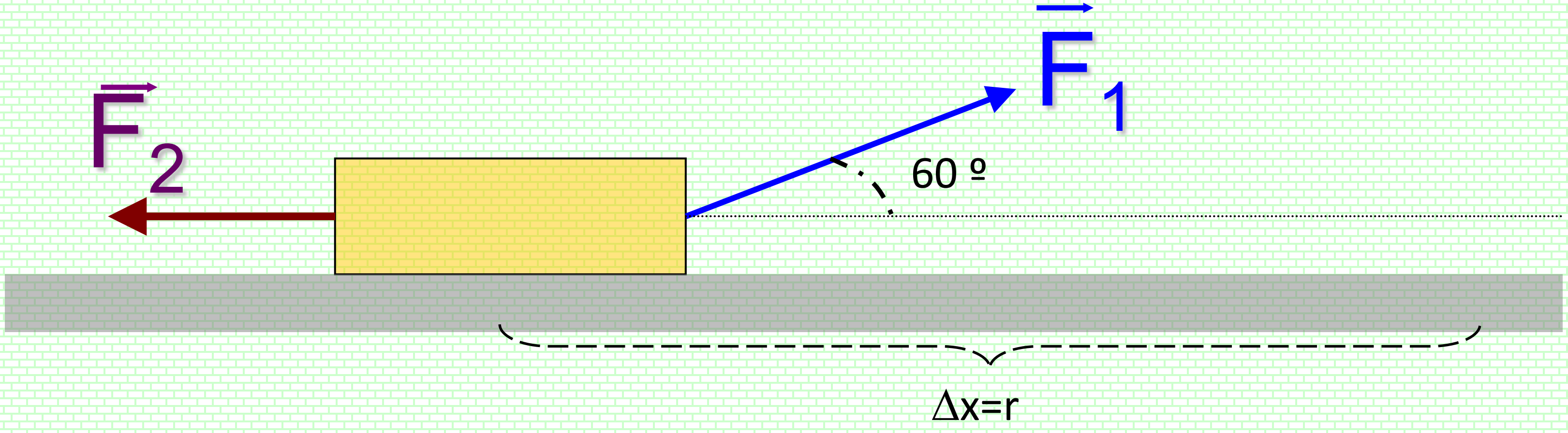
$$\Delta E = K_f - K_i = W$$

$$\left[\text{variación de la energía cinética de una partícula}\right] = \left[\text{Trabajo resultante realizado sobre dicha partícula}\right]$$

Teorema de Trabajo-Energía

$$\mathbf{W = \Delta K}$$

El Trabajo **TOTAL** efectuado sobre una partícula es igual a la *variación* de la energía cinética de la partícula.



Si sobre un cuerpo actúan simultáneamente varias fuerzas concurrentes, entonces la suma de los trabajos producidos por cada una de las fuerzas concurrentes es igual al trabajo realizado por la fuerza resultante .

$$W = \overrightarrow{F_1}.\vec{r} + \overrightarrow{F_2}.\vec{r} = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right).\vec{r}$$

$$W = W_1 + W_2 = \Delta K$$

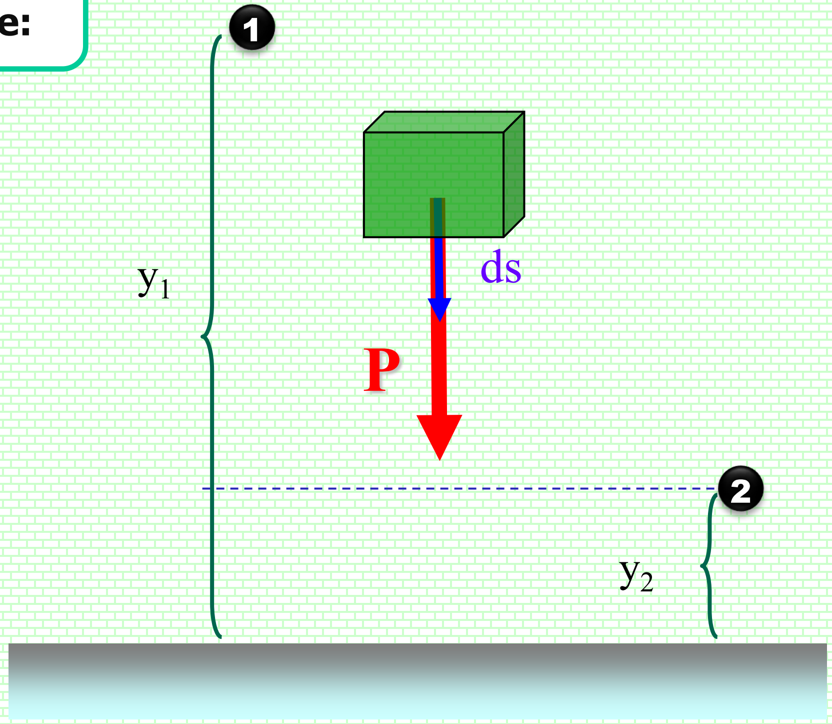
$$\Delta K = W_{Tot} = \left(\sum_{1}^{N} \vec{F_i}\right).\vec{r} = \overrightarrow{F_{res}}.\vec{r}$$

Trabajo de la fuerza Peso sobre un objeto que cae:

$$W_{grav} = m.g.(y_2 - y_1)\cos 0 = mg(y_2 - y_1)$$

Si tomo $y_2 = 0$

$$U = -mgy$$



$$W = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

$$W = -\Delta U$$

$$W = [K] - [K_0] = \Delta K$$

$$\boxed{\Delta K = -\Delta U}$$

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(K + U) = 0$$

$$\Rightarrow U_f + K_f = U_i + K_i$$

$$E_M = U + K \Rightarrow \boxed{E_f = E_i}$$

$$\boxed{E_M = mgy + \frac{1}{2}mv^2}$$

Energía Mecánica de una partícula en el campo gravitatorio

Si sólo la gravedad efectúa trabajo, entonces la Energía mecánica

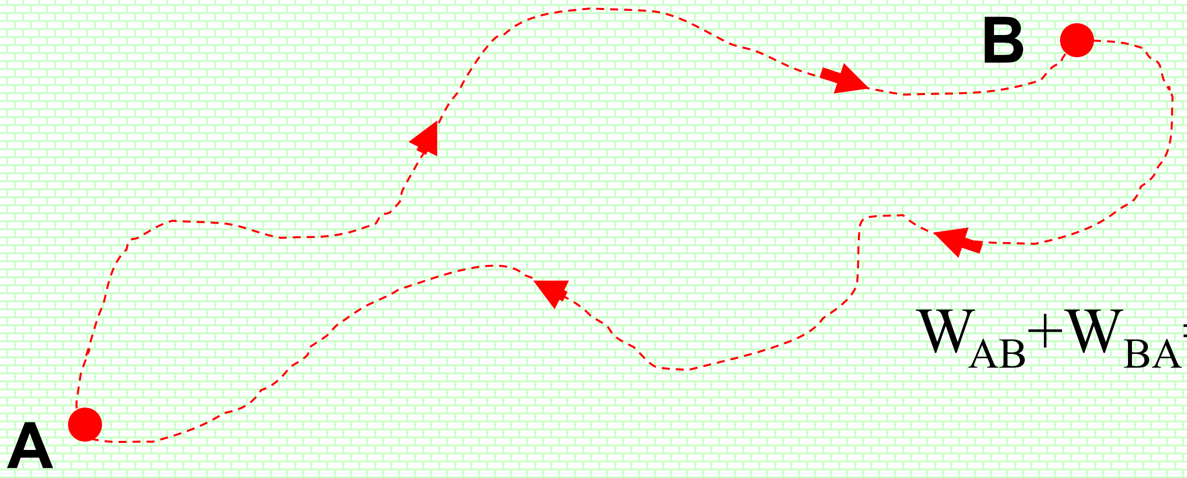
$$E_M = K+U$$

se conserva. En este caso, la energía cinética del cuerpo se transforma en energía potencial, y viceversa.

Fuerzas Conservativas

Una fuerza se dice conservativa cuando es nulo el trabajo que ella efectúa sobre una partícula que describe una trayectoria cerrada y retorna a la posición inicial.

$$W_{AB} = -W_{BA}$$



$$W_{AB} + W_{BA} = 0$$

En ese caso

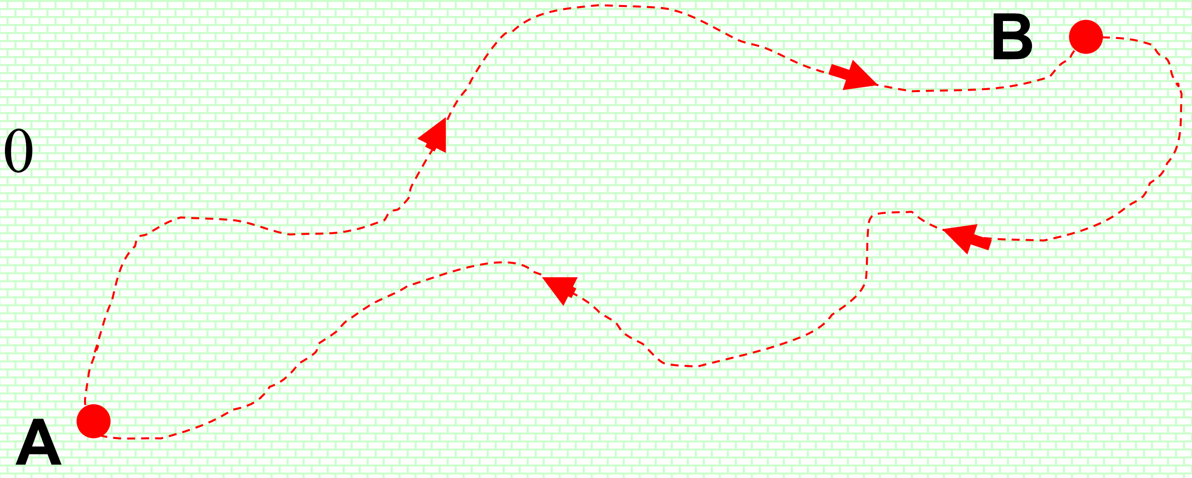
$$W_{FC} = -\Delta U$$

Fuerzas Conservativas

(def. alternativa)

El trabajo realizado por una fuerza conservativa entre los puntos A y B es independiente del camino seguido por la partícula entre dichos puntos.

$$W_{AB}+W_{BA}=0$$



$$dW_{FC}=-dU$$

Entonces, cuando hay fuerzas conservativas,

$$W_{FNC}+W_{FC} = \Delta K \qquad W_{FNC}-\Delta U = \Delta K$$

$$W_{FNC} = \Delta K+\Delta U = \Delta E$$

Cuando no haya….

$$W_{FNC} = 0 \rightarrow \Delta K+\Delta U = \Delta E=0$$

$$\boldsymbol{E_f = E_i}$$

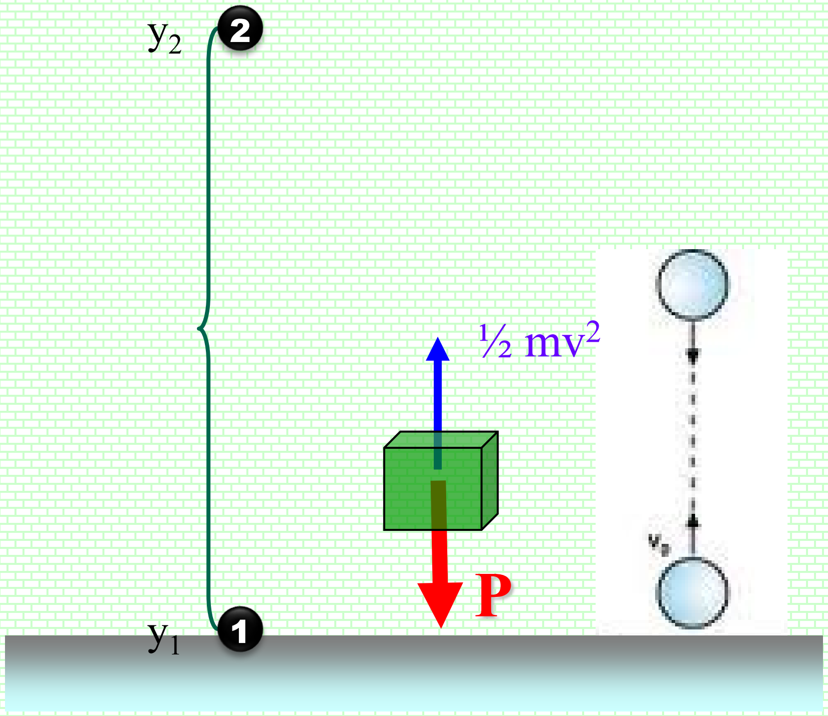
$$E_M(punto1) = E_M(punto2)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1$$

$$\cancel{\frac{1}{2}mv_2^2} + mgy_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \cancel{mgy_1}$$

$$\frac{1}{2}m\text{v}_1^2 = mgy_2$$

$$y_2 = \text{v}_1^2/2\text{g}$$



Supongamos m = 1 kg y v_1 = 38,7 m/s

$$E_M = \frac{1}{2}m\text{v}_1^2 = \frac{1}{2}1kg(38{,}7\,\frac{m}{s})^2 = 750\text{ J} \quad \Rightarrow \quad mgy_2 = 750J$$

$$y_2 = \frac{750J}{mg} = \frac{750}{1 \times 9{,}8} = 76{,}5\text{m}$$

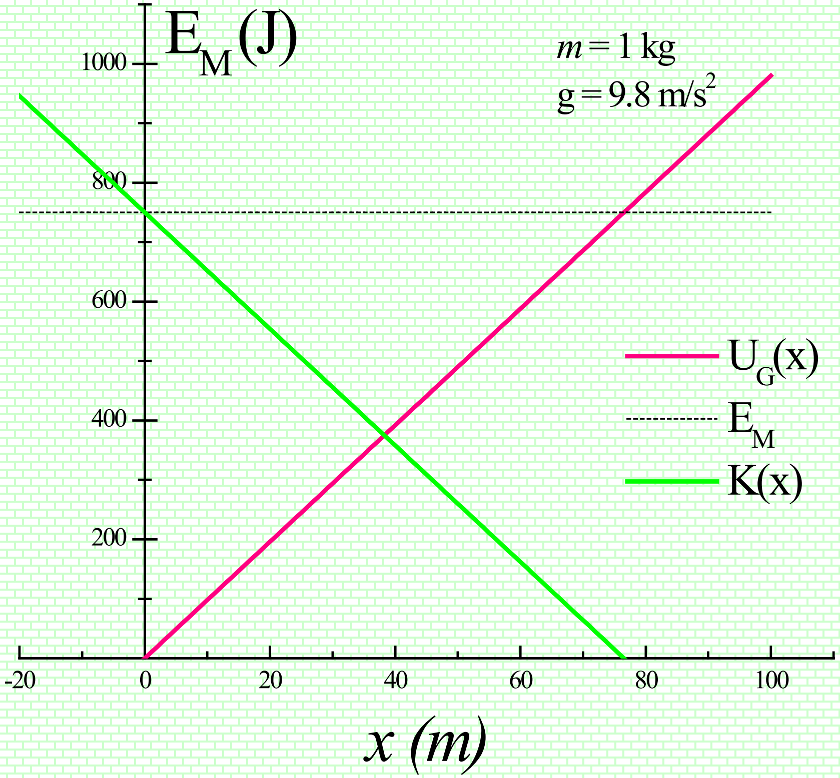
O BIEN

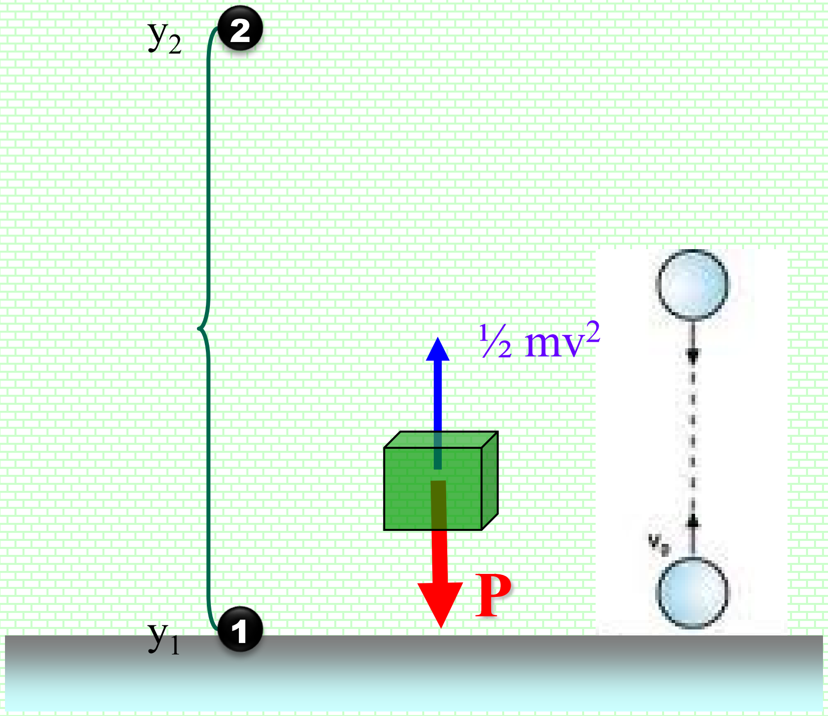
$$y_2 = \frac{\text{v}_1^2}{2g} = 76{,}5\,m$$

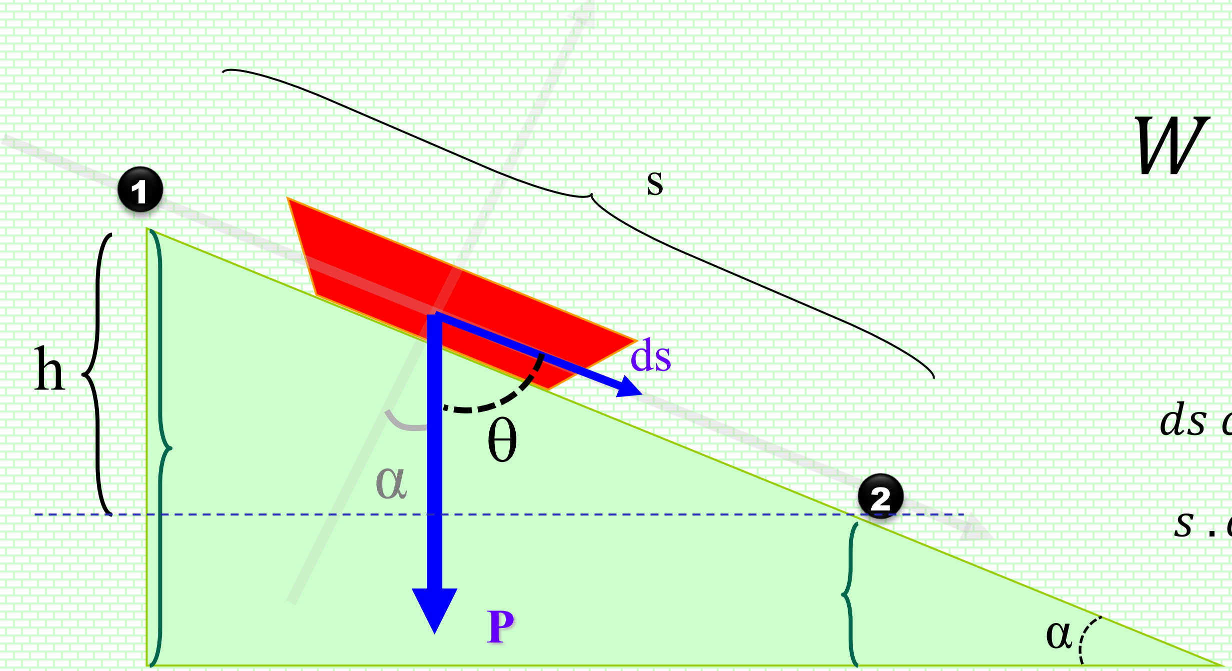
$$U(y) = mgy = 750J - \frac{1}{2}mv^2$$

$$K(y) = \frac{1}{2}mv^2 = 750J - mgy$$

$$mgy = E_M - \frac{1}{2}mv^2$$







$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{P}.d\vec{s}$$

$$ds\ cos\theta = ds\ sen\ \alpha = -dh$$

$$s\ .cos\theta = s.sen\ \alpha = -h$$

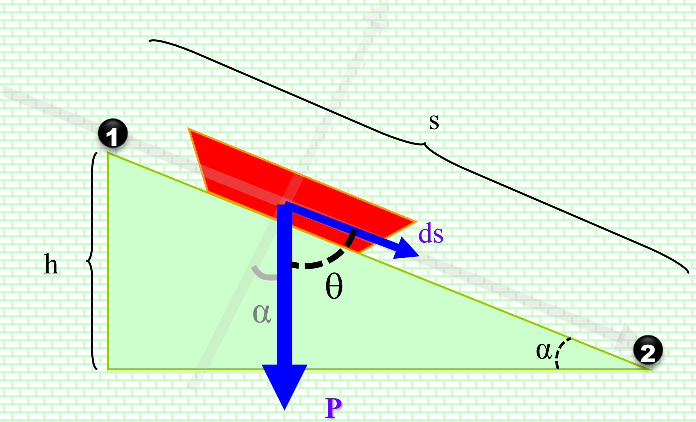
$$P = (mgsen\alpha, -mg\ cos\alpha)$$

$$\vec{P}.d\vec{s}\ = -m.g.ds\cos\theta$$

$$\int_1^2 \vec{P}.d\vec{s} = \int_1^2 -m.g.\cos\theta\ ds = -m.g.cos\theta \int_1^2 ds$$

$$= -m.g.cos\theta.(s_2 - s_1)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

$$W = -(mgy_2 - mgy_1) = -\Delta U$$



$$W = [K_2] - [K_1]$$

$$mgy_1 - mgy_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$-\Delta U = \Delta K$$

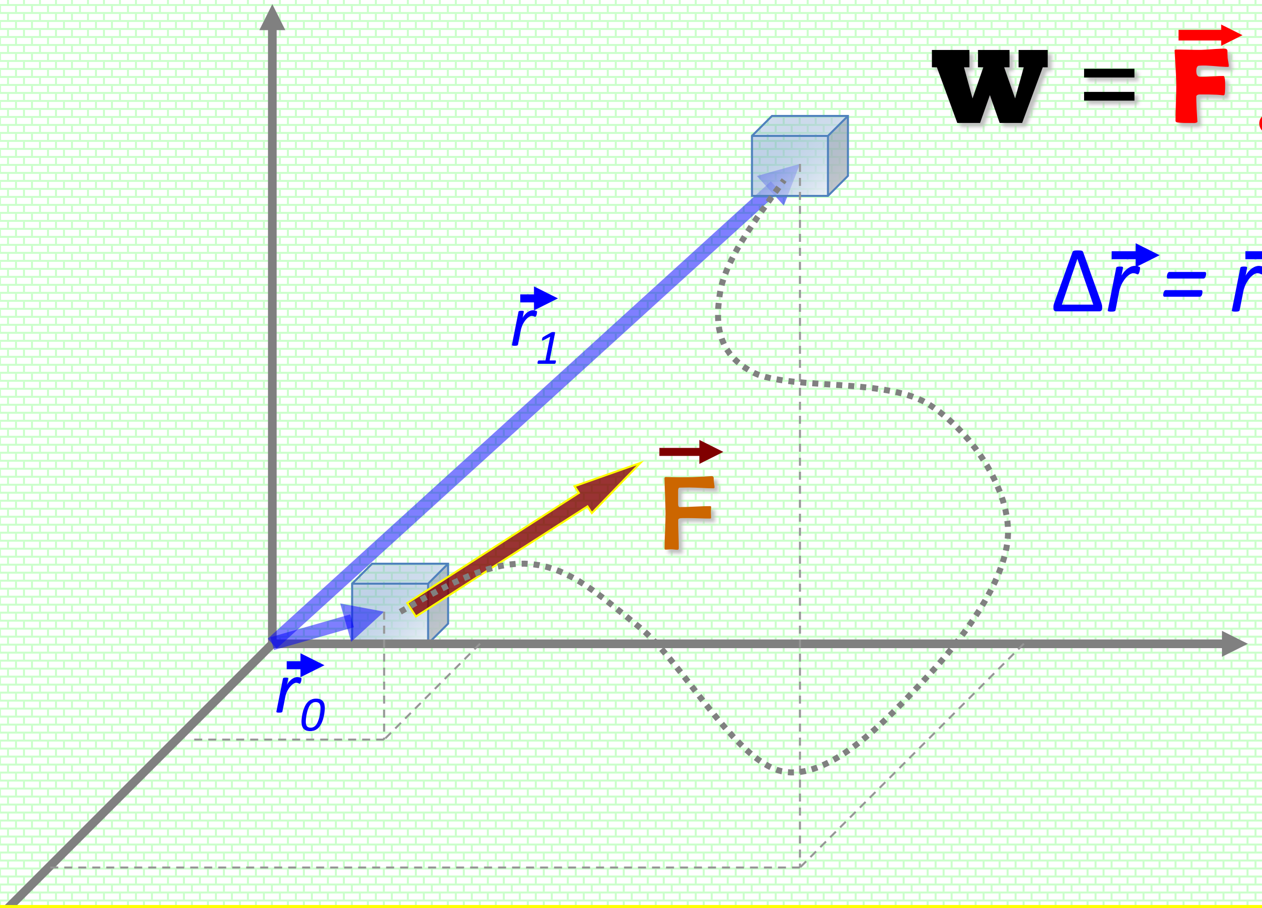
$$\Delta(U + K) = \Delta E_M = 0$$

$$\Delta\left(mgy + \frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

Mas general…

1. Fuerza $\vec{F}$ actuando sobre un objeto,
2. que se desplaza una distancia $\vec{r}$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$



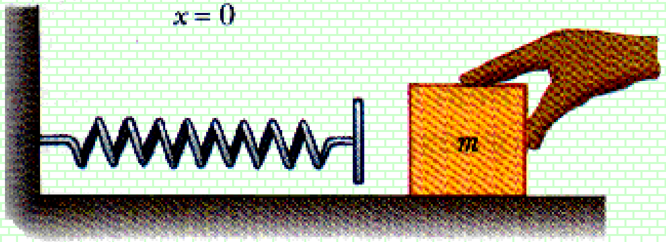
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

Ojo!
1. El trabajo es el **trabajo de la Fuerza F**.
2. Pero en este ejemplo debe haber otras: la fuerza F del ejemplo NO justifica (produce) el movimiento en la trayectoria de la figura

Trabajo de Fuerzas NO constantes

Caso de una fuerza F(x): el muelle

$$F(x) = -k\,x$$



$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x).\,d\vec{x}$$

$$\vec{F}(x).\,d\vec{x} = F(x)dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x).\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx.\,dx = -\tfrac{1}{2}k\,({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

Energía potencial elástica

$$W_{muelle} = -\frac{1}{2}k.\left({x^2}_2 - {x^2}_1\right) = -(U_2 - U_1)$$

$$W = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

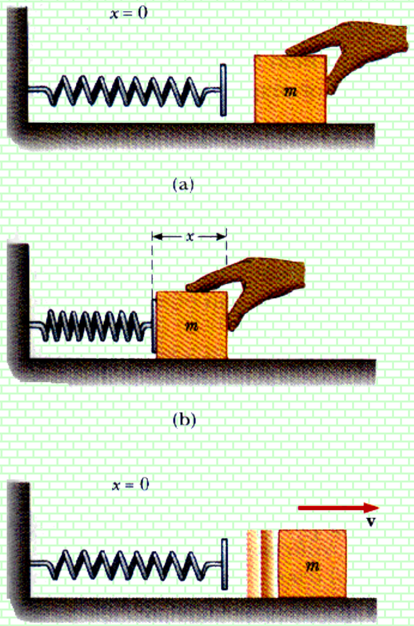
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W = -\Delta U$$

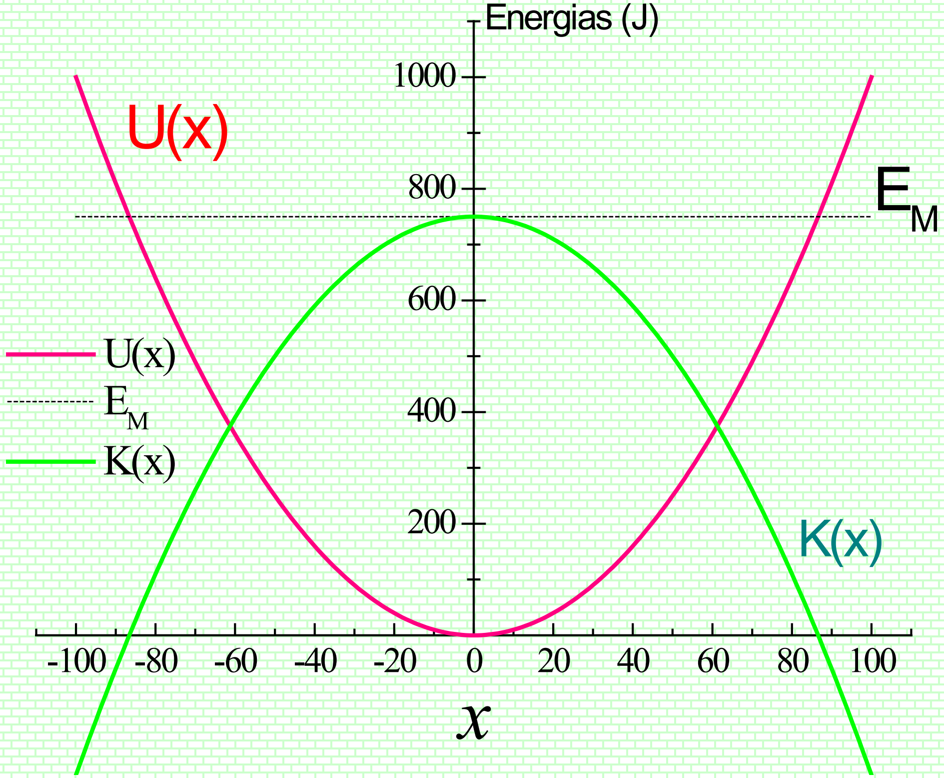
$$\mathrm{W} = [K] - [K_0] = \Delta K$$

$$\Delta K = -\Delta U$$

Energía potencial elástica



$$E_{M1} = E_{M2}$$



$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$E_M = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = cte$$

Trabajo y Energía

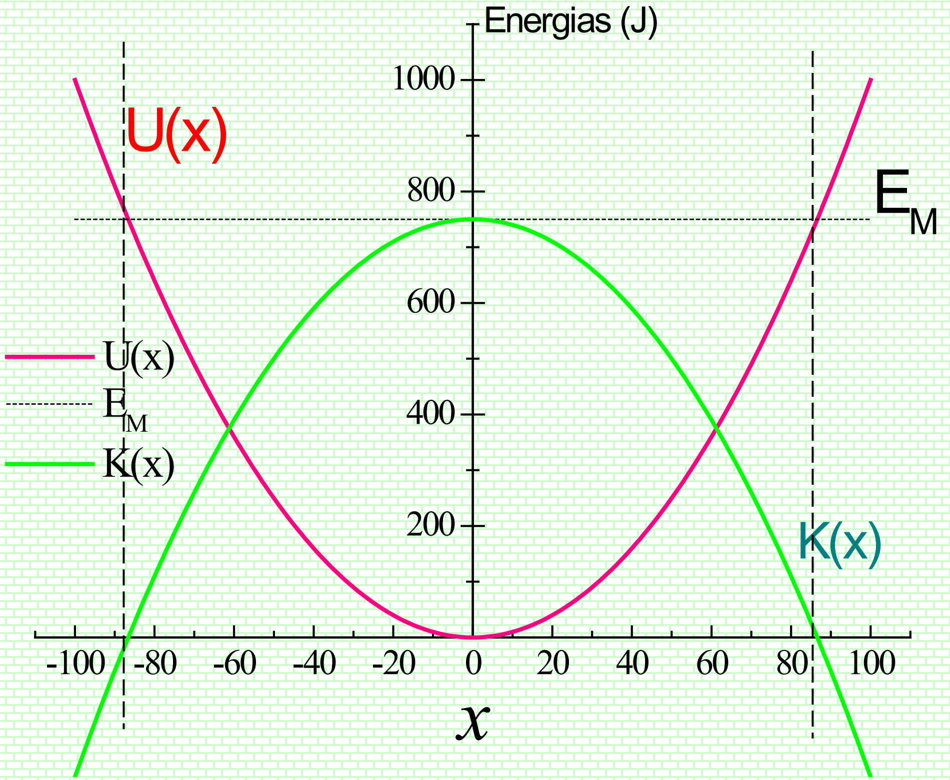
$$E_M = K(x) + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$$

$$K(x) = \frac{1}{2}mv^2 = E_M - \frac{1}{2}kx^2$$

Supongamos m = 1 kg y K = 0.2 N/m

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\times E_M}{m}} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2\times 750J}{1kg}} = 38.7\frac{m}{s}$$

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2\times E_M}{k}} \Rightarrow X_{\max} = A = \sqrt{\frac{2\times 750J}{0.2g}} = 86.6\, m$$

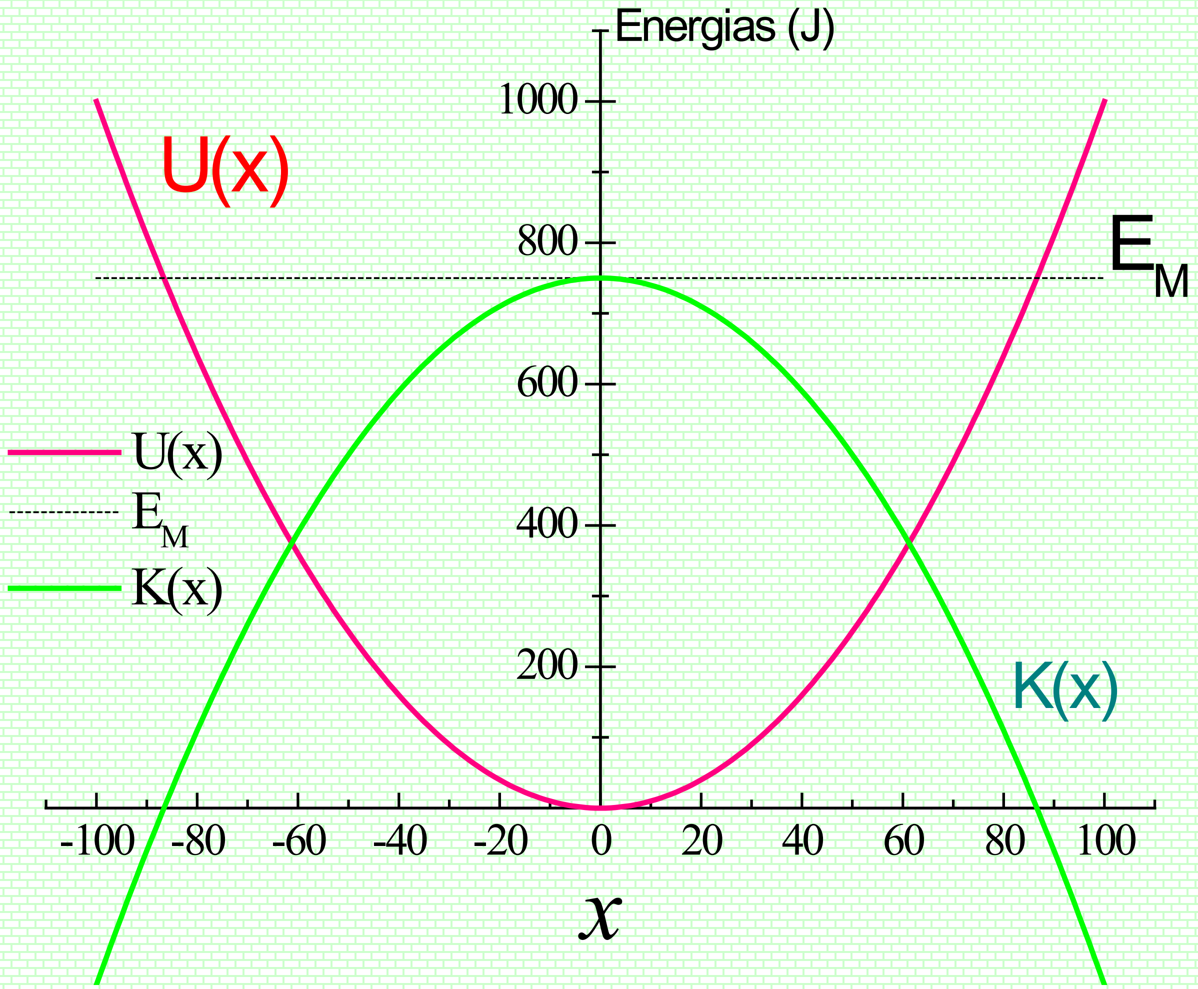


Trabajo y Energía

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

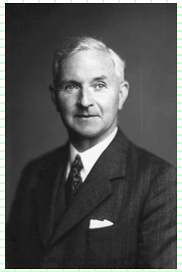
$$E_M = K + U$$



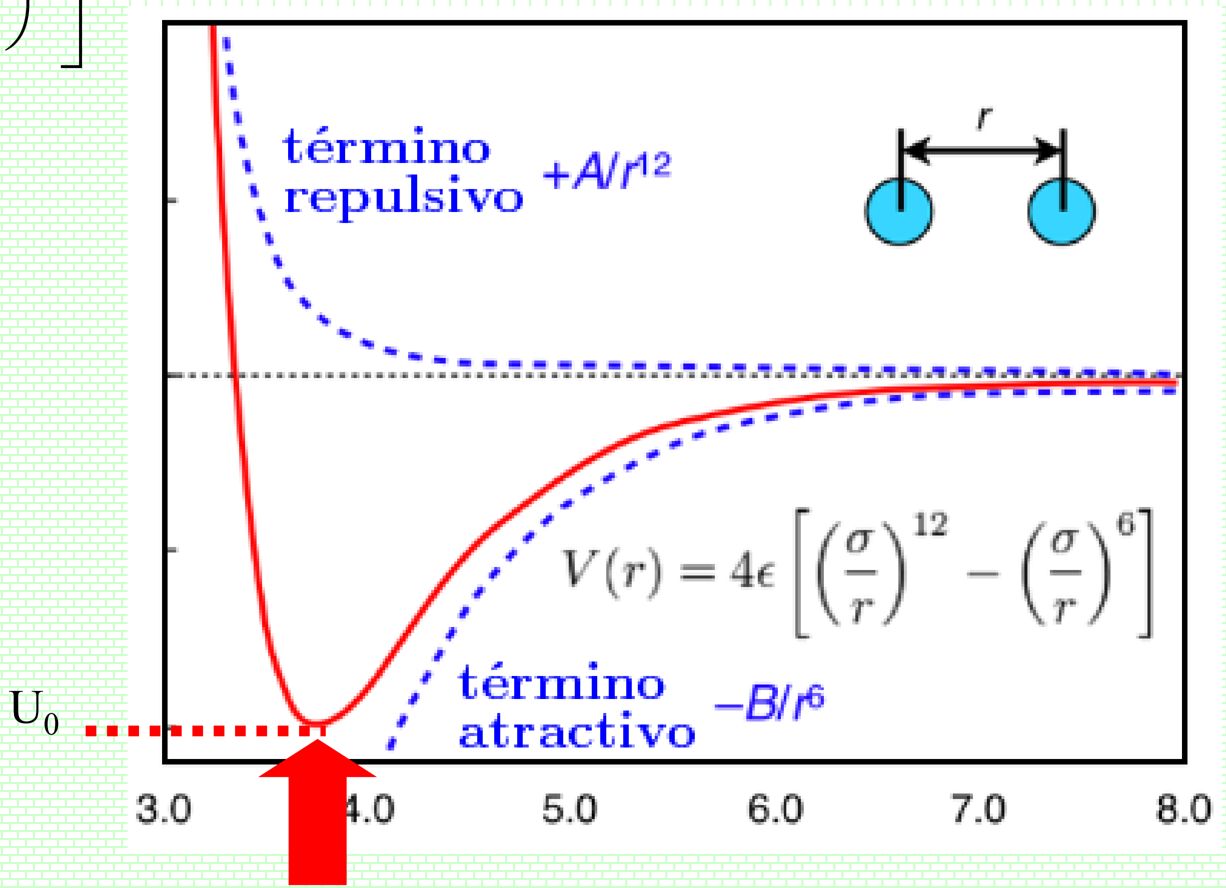
Energía Potencial de 2 átomos

Potencial de Lennard-Jones o 6-12

$$U = U_0\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right]$$

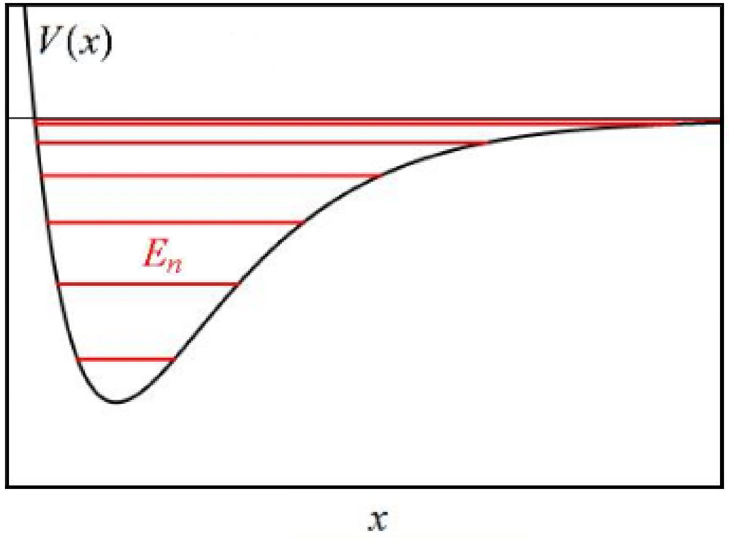


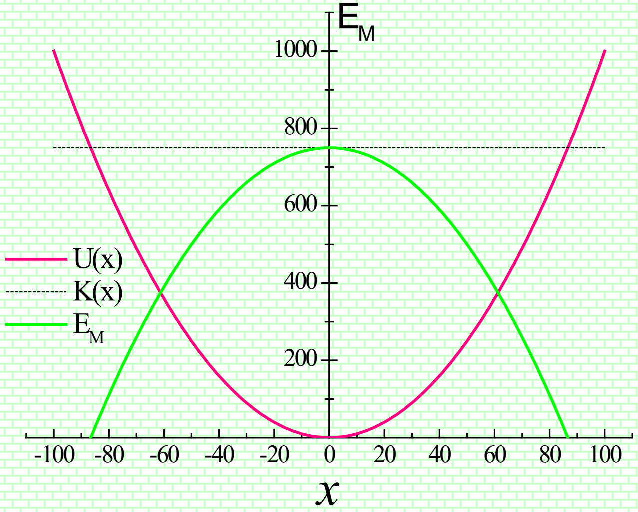
Sir John Edward Lennard-Jones

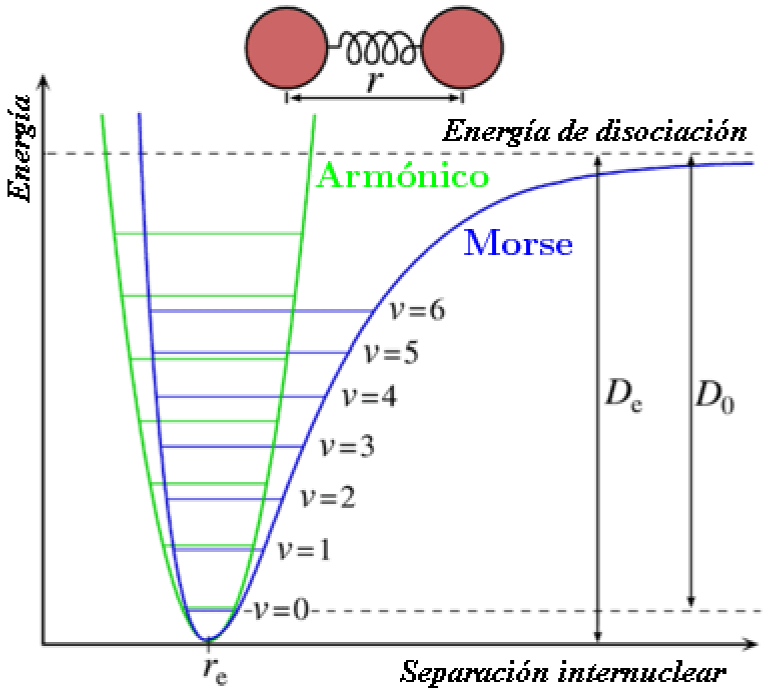


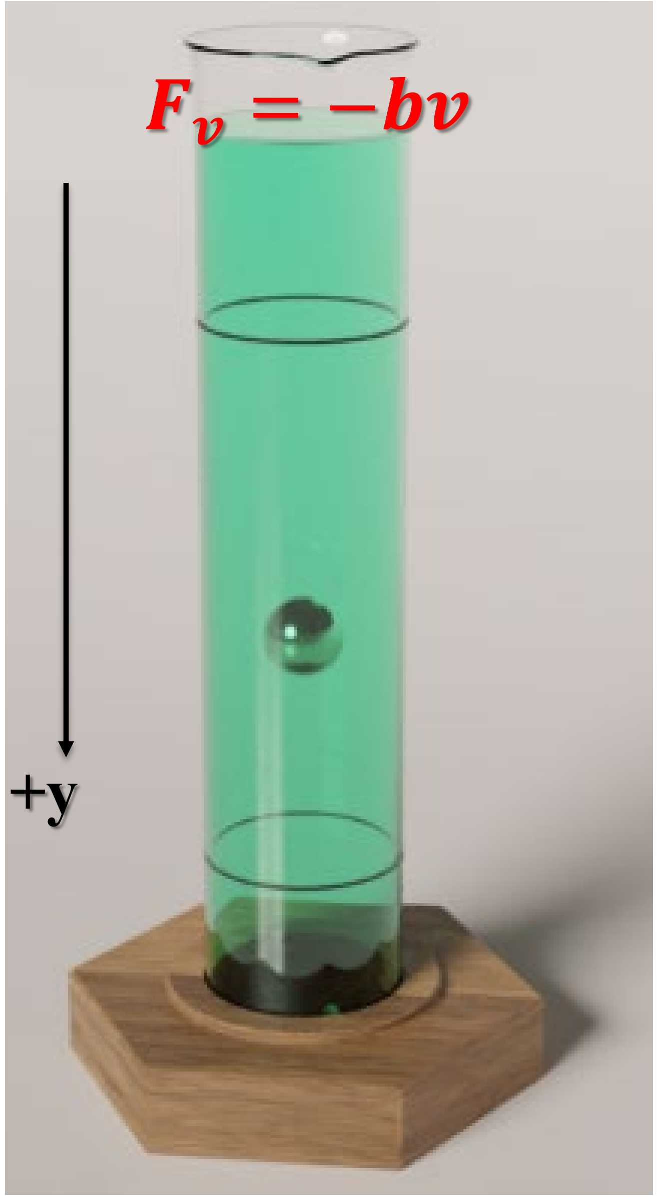
$$r = \pm a$$

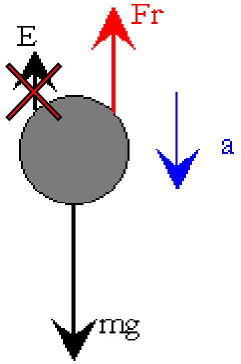
Energía Potencial de 2 átomos











$$\sum F_y = mg - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} + bv - mg = 0$$

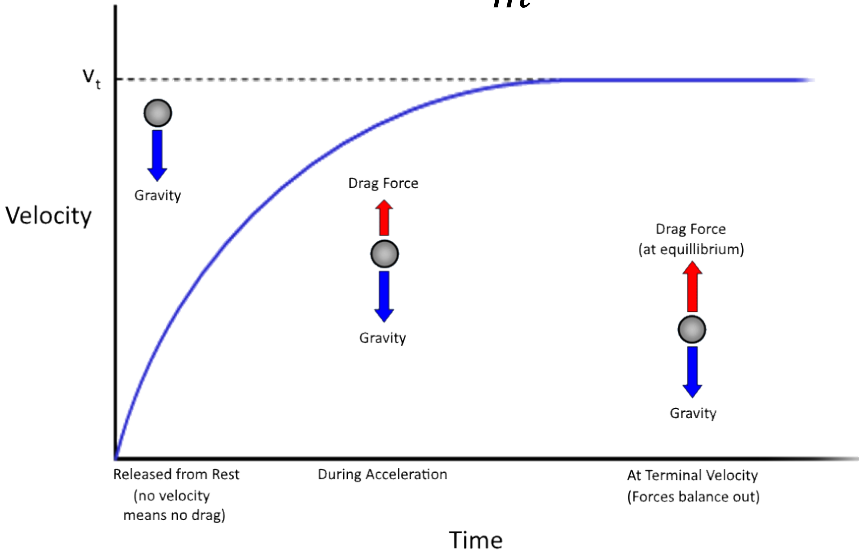
$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v - g = 0$$

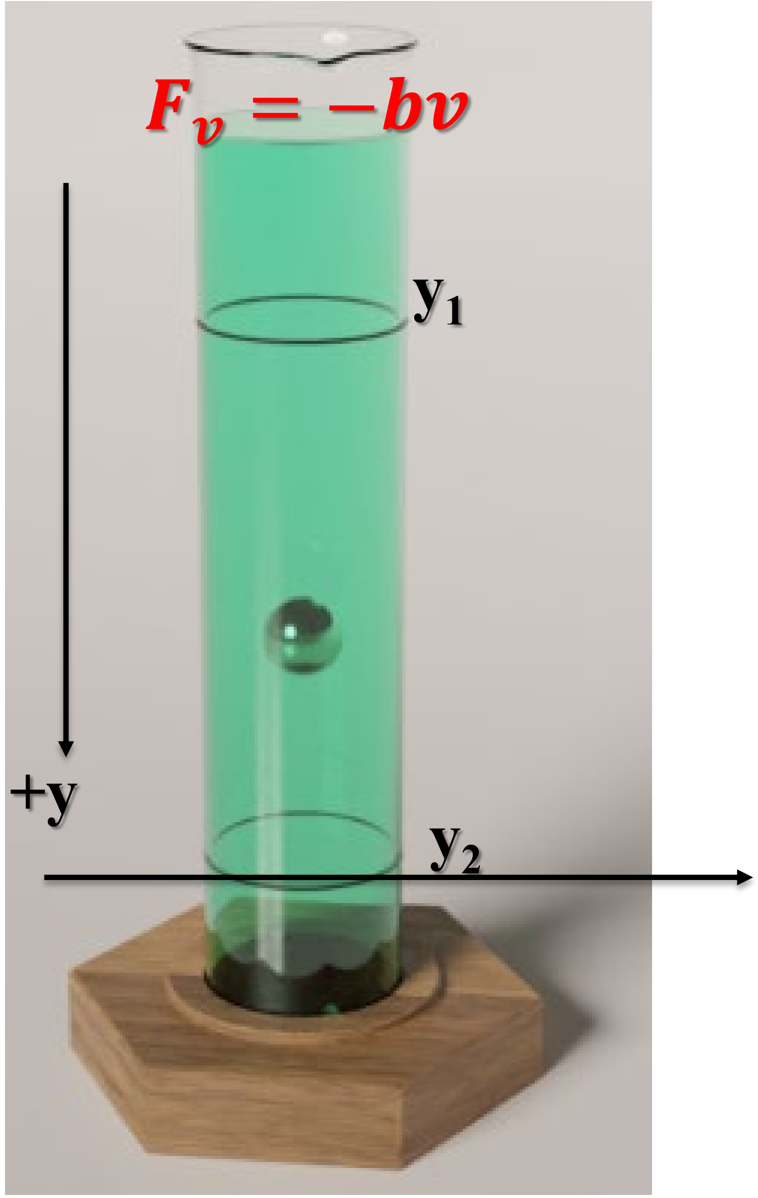
$$v_L = \frac{mg}{b}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = v_L\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$\beta = \frac{b}{m}$$

$$v(t) = v_L\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$





$$W_{Fv} = \int_{y1}^{y2} -bv\,dy$$

$$W_{Total} = \Delta E_C$$

A Million Dollar Idea

$$W_{Total} = W_{grav} + W_{Fv} = \Delta E_C$$

$$\Delta U = mgy$$

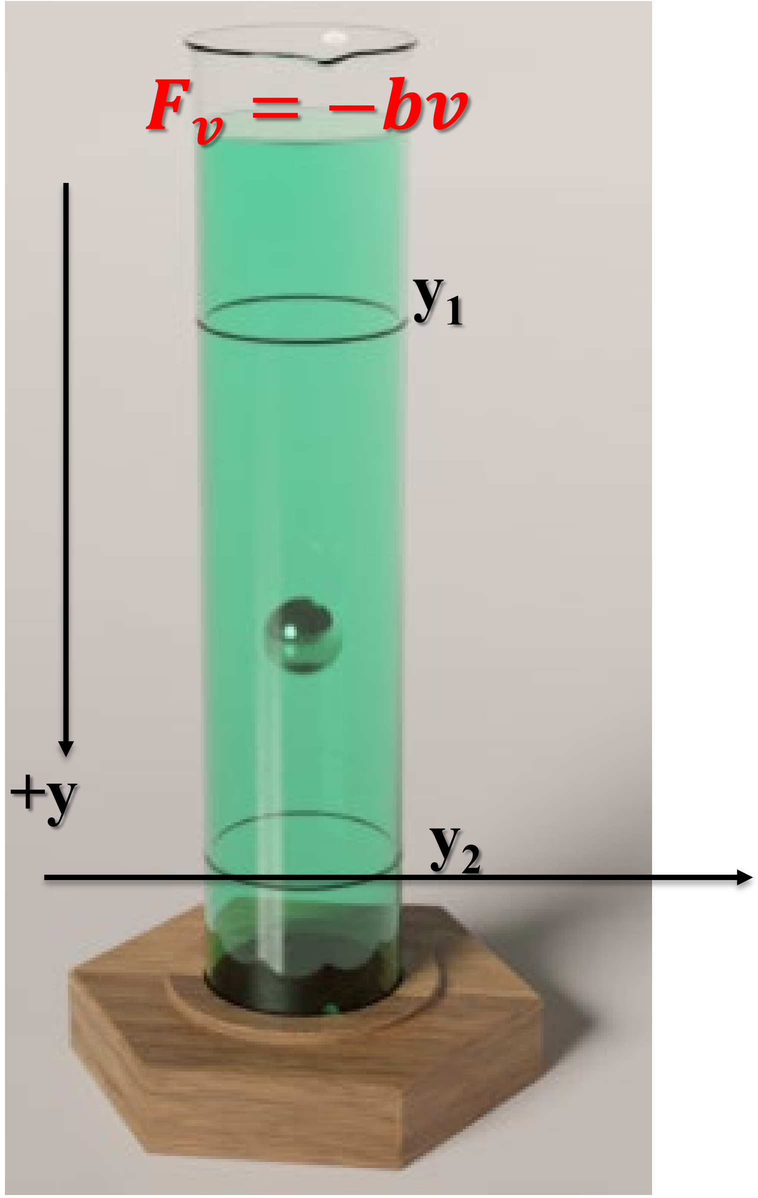
$$-\Delta U + W_{Fv} = \Delta E_C \Rightarrow W_{Fv} = \Delta E_C + \Delta U = \Delta EM$$

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$W_{Fv} = \left[\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right] - \left[\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right]$$

$$W_{Fv} = \left[\frac{1}{2}mv_2^2 + 0\right] - [0 + mgy_1]$$

$$W_{Fv} = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgy_1$$



$$\left[\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right] = \left[\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right]$$

$$E_{M1} = E_{M2}$$

??

$$W_{Fv} = \Delta E_C + \Delta U = \Delta EM \neq 0$$

Potencia

$$P_{méd} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

1 watt = 1 Joule /s

Si los Δt se hacen mas y mas pequeños….

$$P_{ins} = \frac{dW}{dt} = \frac{d(F.x)}{dt}$$

Remember derivada?

$$\boxed{\frac{d(F.x)}{dt} = \frac{dF}{dt}x + F\frac{dx}{dt}}$$

En el caso F(x) = cte :

$$\frac{dW}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{F}}{dt}}\vec{r} + \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$\mathrm{P} = \vec{\mathrm{F}}.\vec{\mathrm{v}}$$

Potencia

Ejemplo: Qué potencia requiere un coche para producir una aceleración de 0 a 100 km/h en 3.7 s si m = 1200 kg ?

V = 100 km/h = 27.7 m/s

La aceleración es

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27{,}7\, {}^{m}/_{s}}{3{,}7\ s} = 7{,}5\, {}^{m}/_{s^2}$$

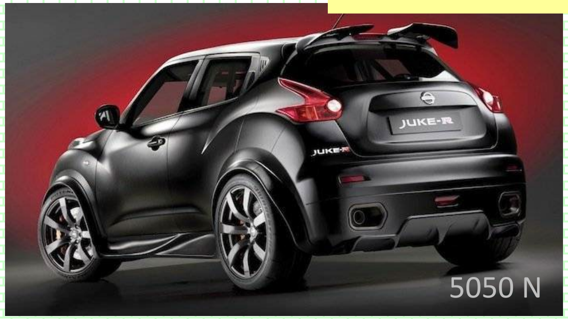
$$F = m.a = 1200\, kg.\ 7{,}5\, {}^{m}/_{s^2} = \mathbf{9000\ N}$$

$$P = F.v = 9000\ N.27{,}7\, {}^{m}/_{s} = 249300\ Watts$$

$$P = 249{,}3\ kW \quad ó \quad P = \frac{249300\ W}{746} = 334\ hp$$

Comparar

«…Concretamente el Nissan Juke-R hace el **0 a 100 km/h en 3.7 segundos**, una cifra que sólo se pueden permitir los mejores, los elegidos, un puñado de deportivos que cuestan bastantes millones y que pueden presumir de haber entrado en el selecto club de aquellos que bajan de los 4 segundos.



este pequeño crossover **alcanza los 258 km/h sin despegar o desintegrarse por el camino**. Obteniendo un buen provecho de los **485 hp** de su motor V6.

Resumen

- ✓ Nuestra **definición GENERAL** del **trabajo de una Fuerza** F sobre un objeto que se desplaza entre los puntos r0 y r1 es

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} d\vec{r}$$

- ✓ Para movimiento unidimensional, y fuerzas constantes, el trabajo realizado por una fuerza (paralela al desplazamiento) sobre un cuerpo es

$$\boxed{W = F.\Delta x}$$

- ✓ El Teorema del Trabajo-Energía dice que el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual al cambio de energía cinética de dicho cuerpo.

$$W = \Delta K$$

- ✓ El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre un cuerpo se transforma en energía potencial

$$W = -\Delta U$$

- ✓ **Si sólo actúan fuerzas conservativas**, entonces la energía mecánica definida como $E_M = K + U$

se conserva. En este caso, la energía cinética del cuerpo se transforma en energía potencial, y viceversa.

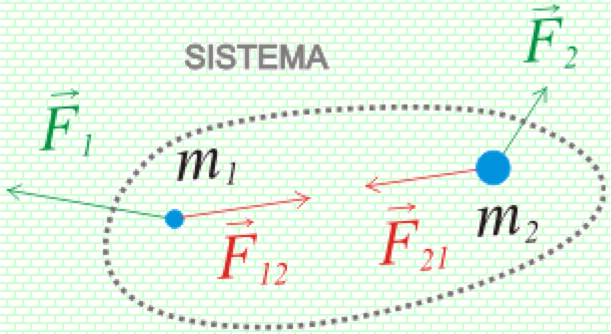
- ✓ **La Potencia** está relacionada con la rapidez instantánea con la que una fuerza realiza trabajo sobre una partícula. $P = F \, . \, v$

O bien, es la **velocidad de cambio de la energía cinética** (o mecánica) de dicha partícula.

Coming soon:

- Repaso brevíssssimo.
- Sección 'la pregunta tonta'.
- Problemas numéricos

- Trabajo y energía en sistemas de partículas.



$$W_{ext} = \Delta U$$

Sistema aislado (no actúan fuerzas externas): el trabajo de las fuerzas externas es nulo de lo que se deduce que en un sistema aislado **la energía propia se conserva**.

$$W_{ext} = 0 \;\Rightarrow\; U \;\; cte$$


THE END