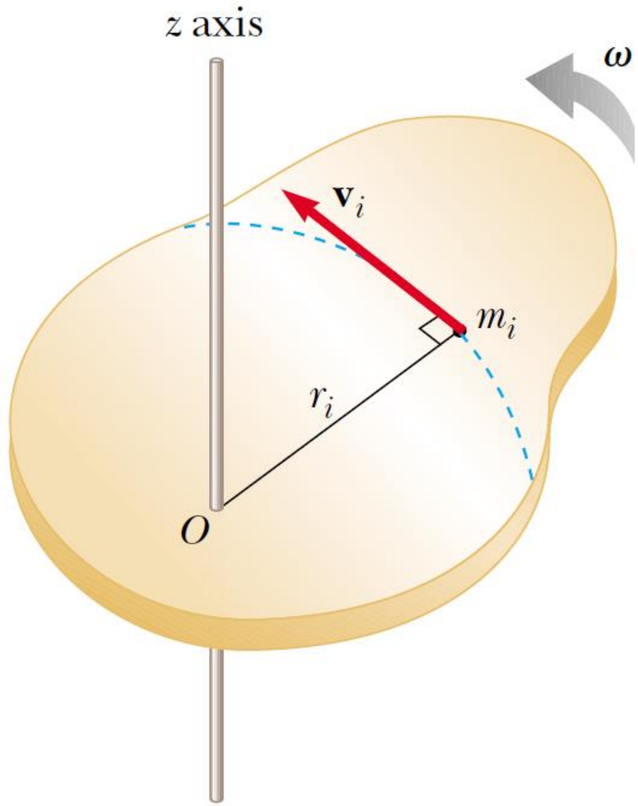
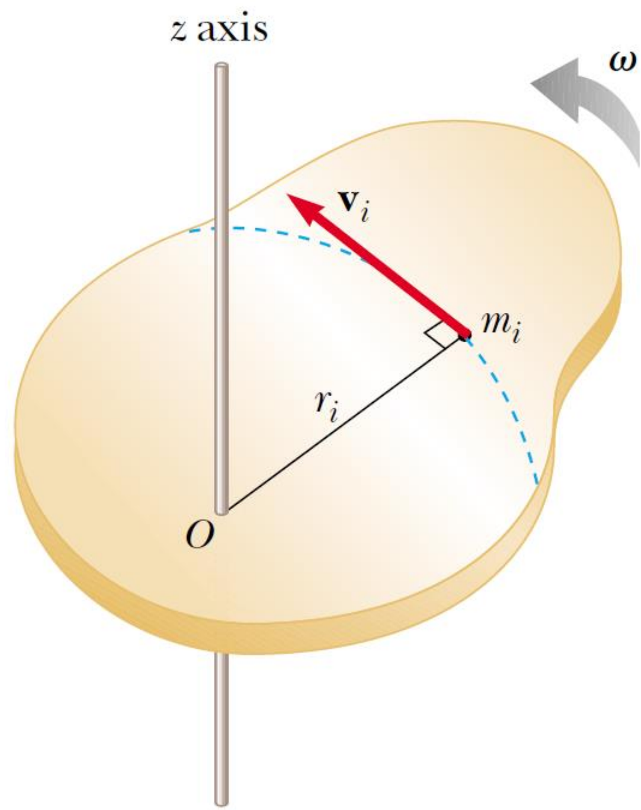
Dinámica del Sólido Rígido

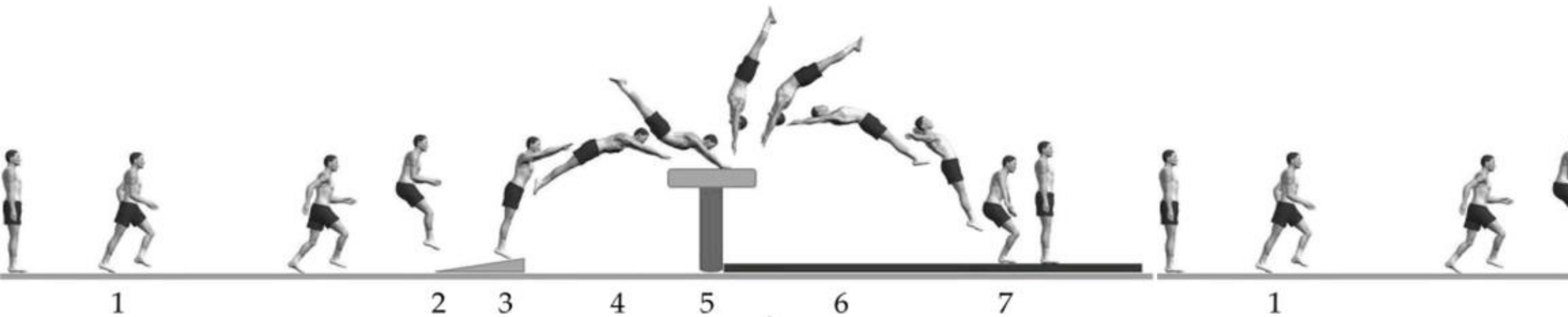


Sólido Rígido



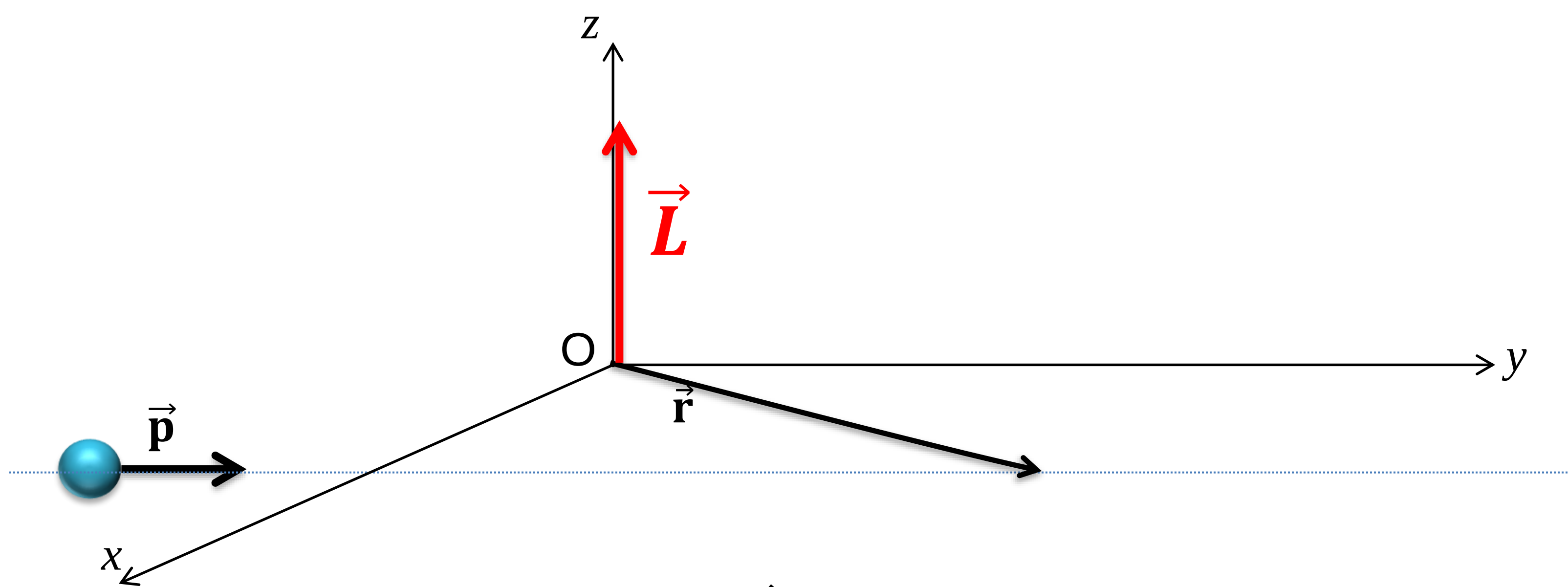
- Movimiento del sólido rígido
- Momento angular del sólido rígido
- Momento de inercia
- Rotación de sólidos
- Objetos rodantes
- Equilibrio del sólido rígido
- Analogía entre cinemática y dinámica lineal y angular.

Momento angular o cinético



Definición de momento angular o cinético

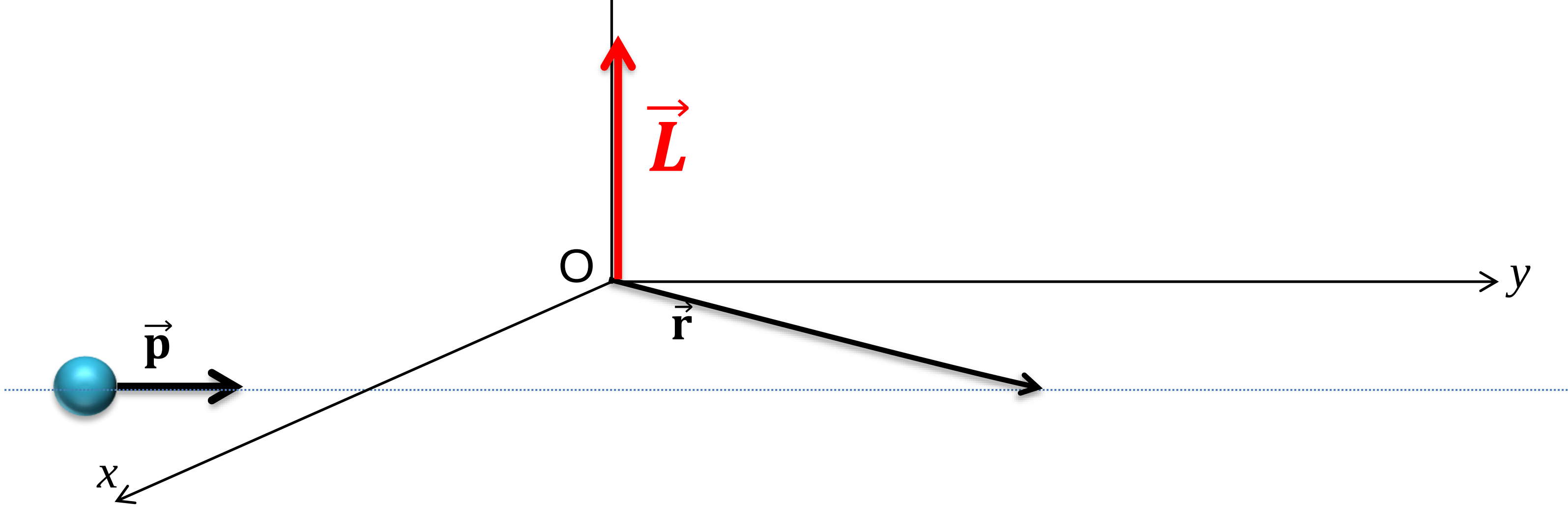
Consideremos una partícula de masa m, con un vector de posición $\boldsymbol{r}$ y que se mueve con una cantidad de movimiento $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$



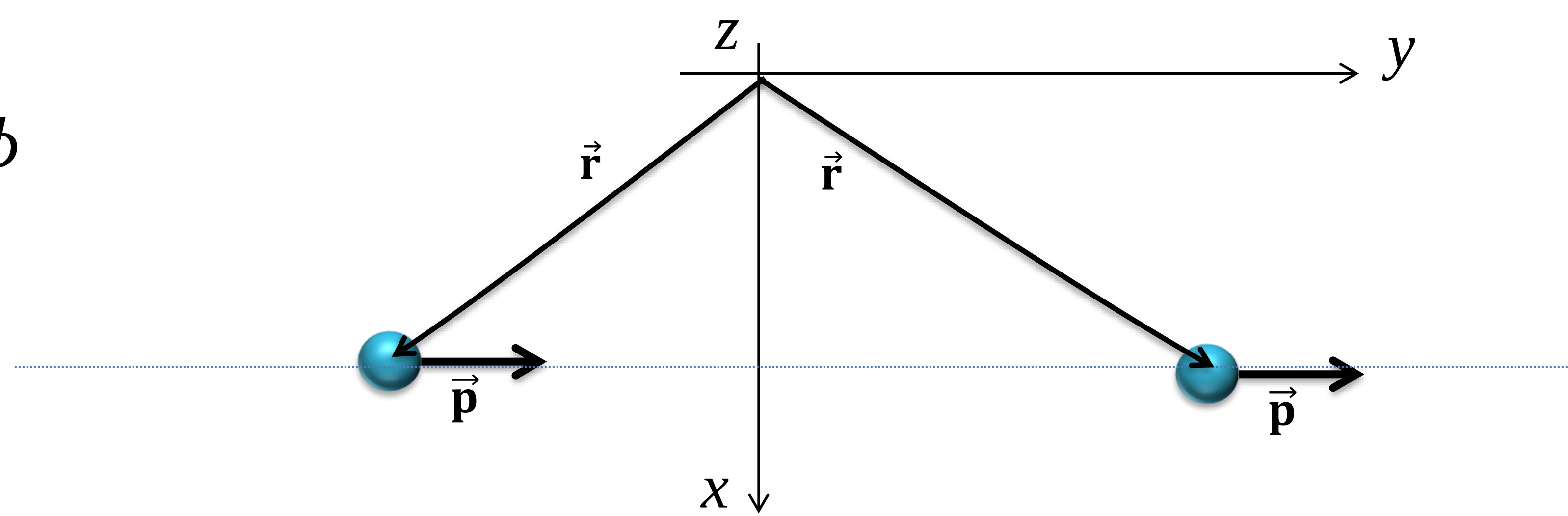
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

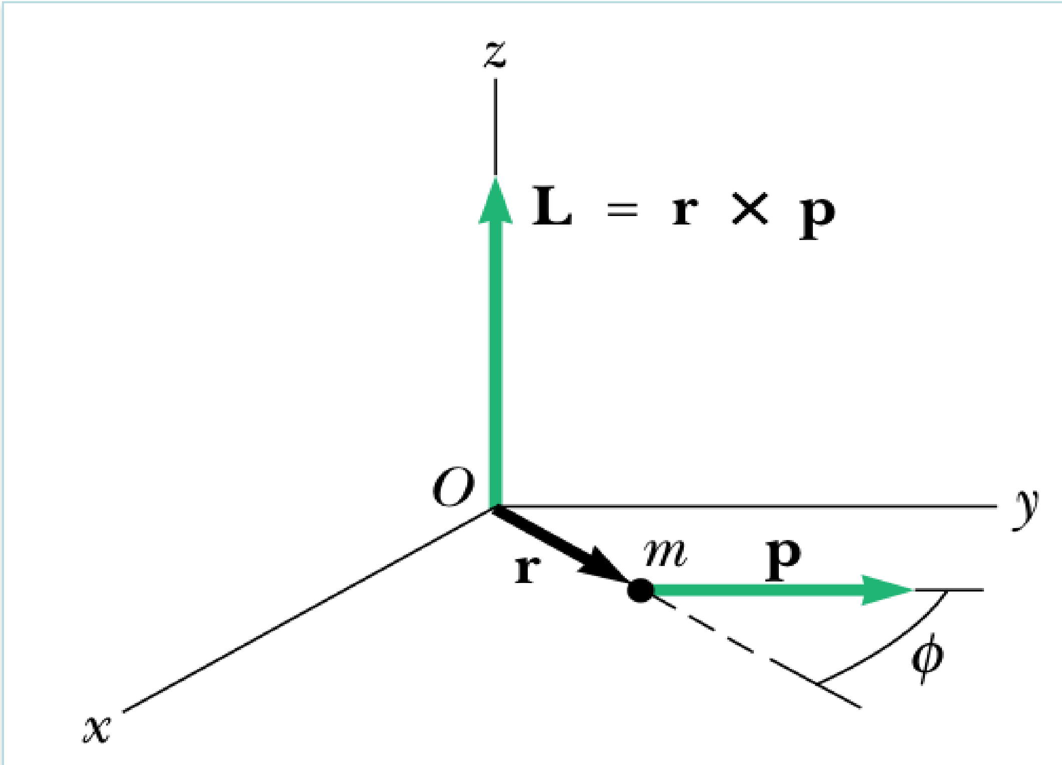
El momento angular instantáneo $\vec{L}$ de la partícula relativo al origen O se define como el producto vectorial de su vector posición instantáneo y del momento lineal instantáneo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$\left|\vec{L}\right| = \ |\vec{r}|\ |\vec{p}|\ sen\phi$$





Definición de momento angular o cinético

Tanto el módulo, la dirección como el sentido del momento angular dependen del origen que se elija

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

$$= m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Dirección: **perpendicular al plano formado por** $\vec{r}$ **y** $\vec{p}$

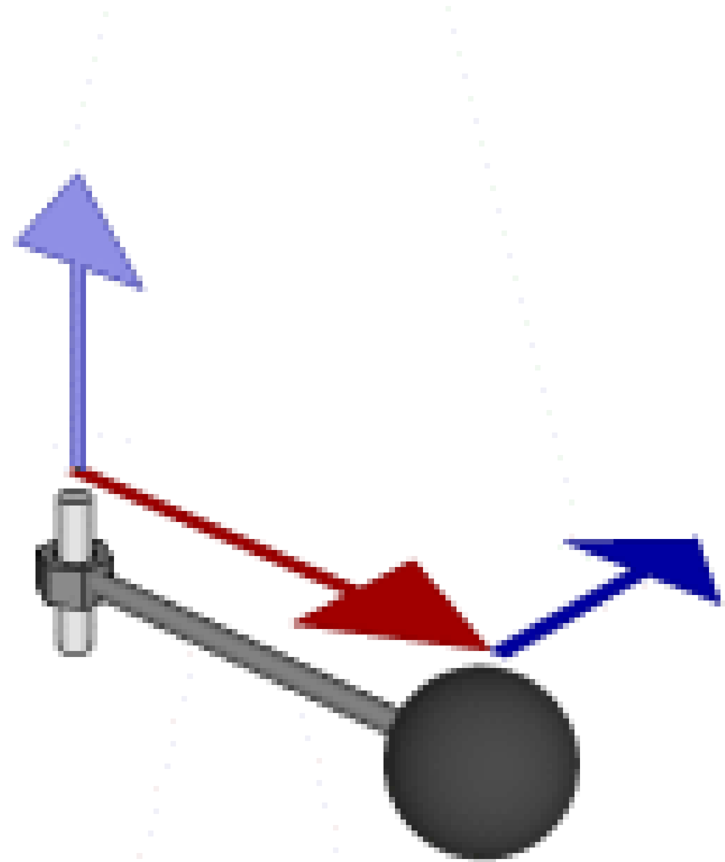
Sentido: **regla de la mano derecha**

Módulo: $|\vec{L}| = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}|\,sen\phi$

Unidades SI: kg • m²/s

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$



Vector $\vec{\mathbf{L}}$: Casos particulares

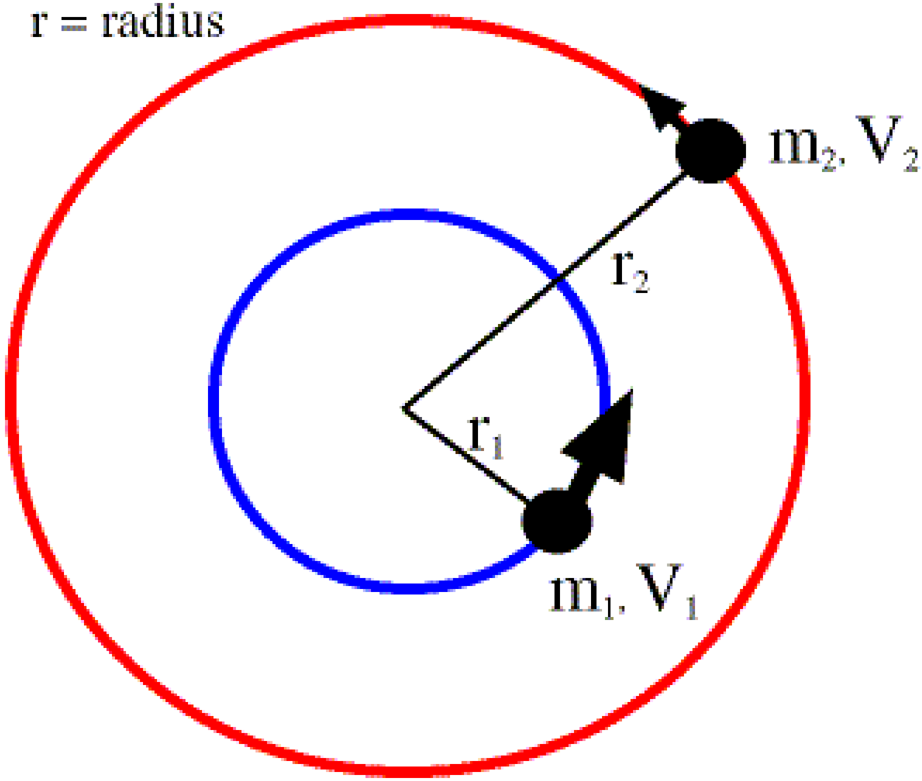
es máxima cuando $\vec{r} \perp \vec{p}$ (es perpendicular a). En ese momento la partícula se mueve exactamente igual que si estuviera en el borde de una rueda que gira alrededor del origen en el plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$ (movimiento circular).

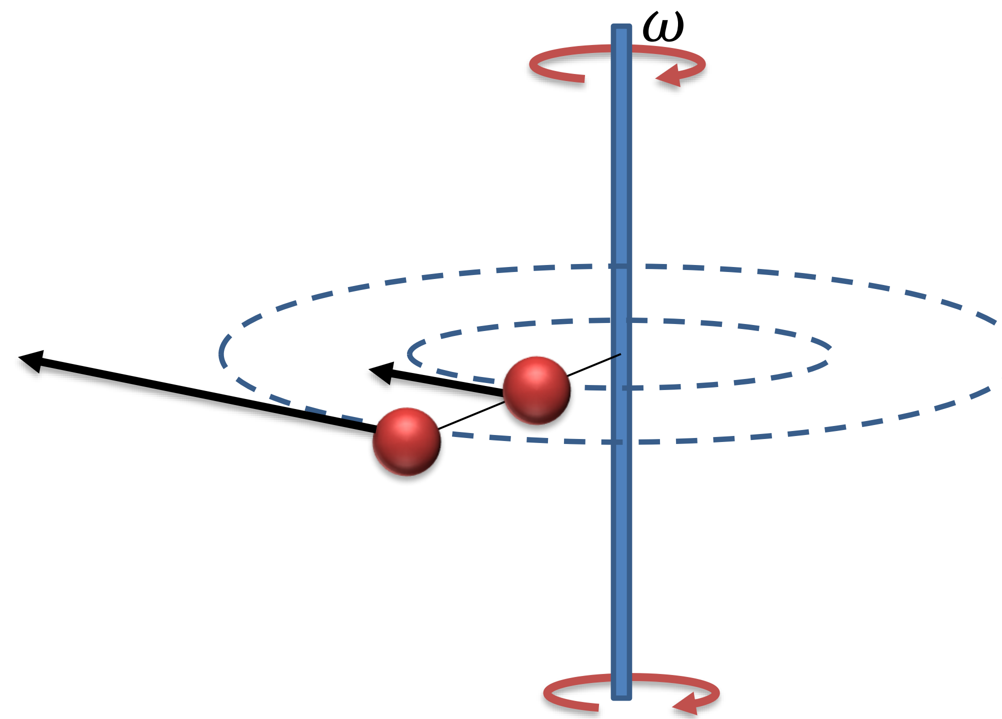
$\vec{L} = 0$ cuando $\vec{r} \parallel \vec{p}$ (son paralelos). Es decir, cuando la partícula se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por el origen tiene un momento angular nulo con respecto a ese origen

$|\vec{L}|$ es máxima cuando $\vec{r} \perp \vec{p}$ (es perpendicular a). En ese momento la partícula se mueve exactamente igual que si estuviera en el borde de una rueda que gira alrededor del origen en el plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$ (movimiento circular).

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{Módulo} & |\vec{L}| = mvr = m\omega r^2 \\ \\ \textbf{Dirección y sentido} & \vec{L} \parallel \vec{\omega} \end{array}\right\} \quad \vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

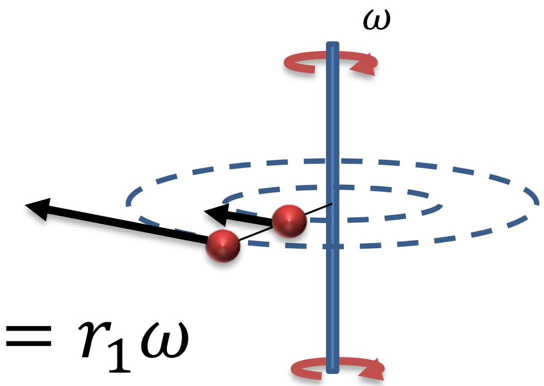
Angular momentum = mvr
m = mass
v = velocity
r = radius





$$\vec{L} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}$$

$$\vec{L} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}$$



$$\vec{L} = \overrightarrow{r_1} \times m_1 \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{r_2} \times m_2 \overrightarrow{v_2}$$

$$v_1 = r_1 \omega$$
$$v_2 = r_2 \omega$$

$$L_z = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2$$

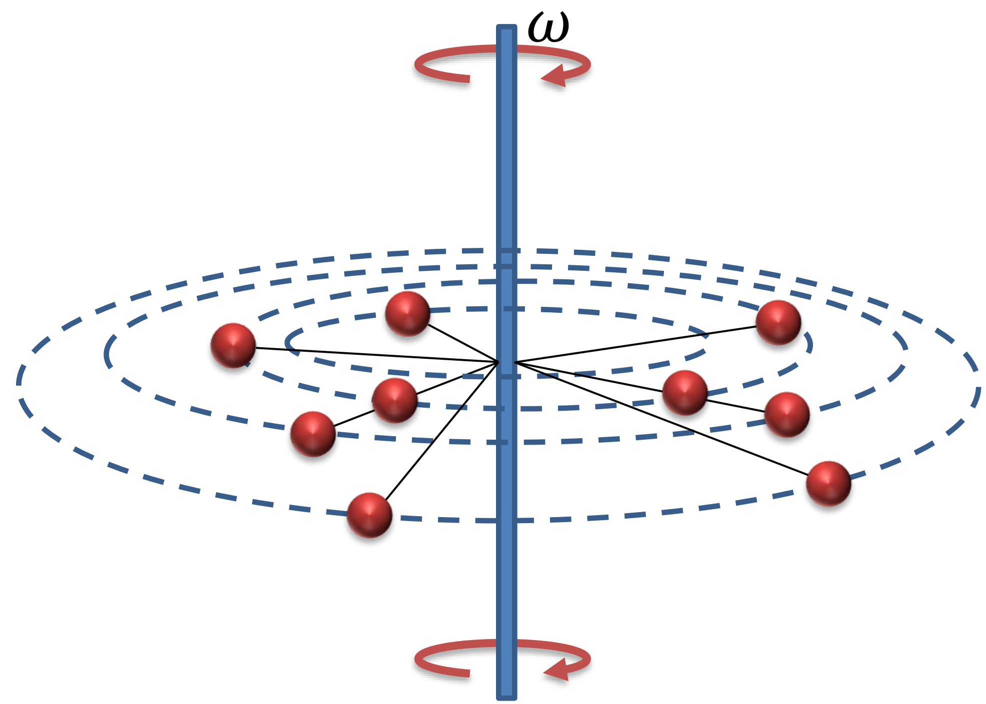
$$L_z = r_1^2 m_1 \omega + r_2^2 m_2 \omega$$

$$L_z = \; [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2]\omega = I\omega$$

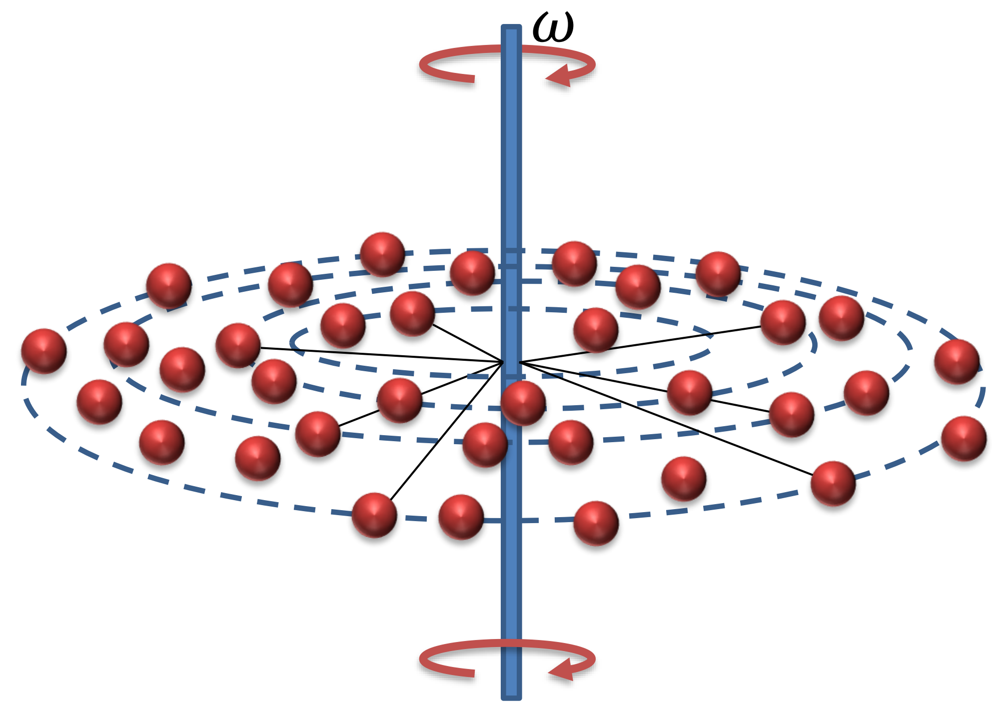
$$L_z = \; I\omega \qquad\qquad I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{9} m_i r_i^2$$

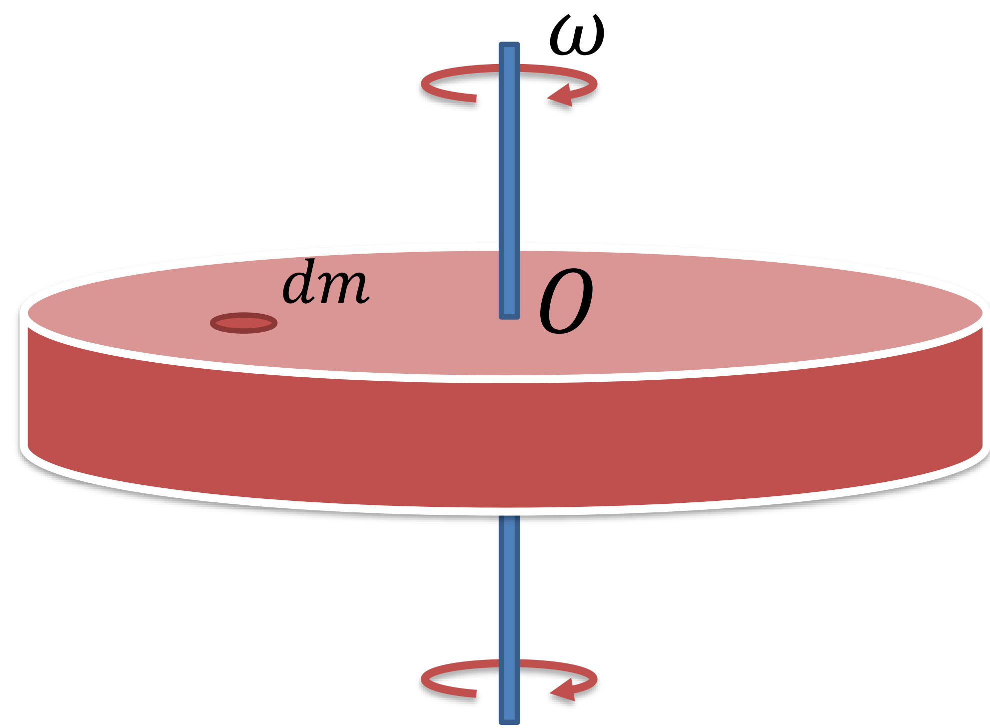


$$I = \sum_{i=1}^{36} m_i r_i^2$$



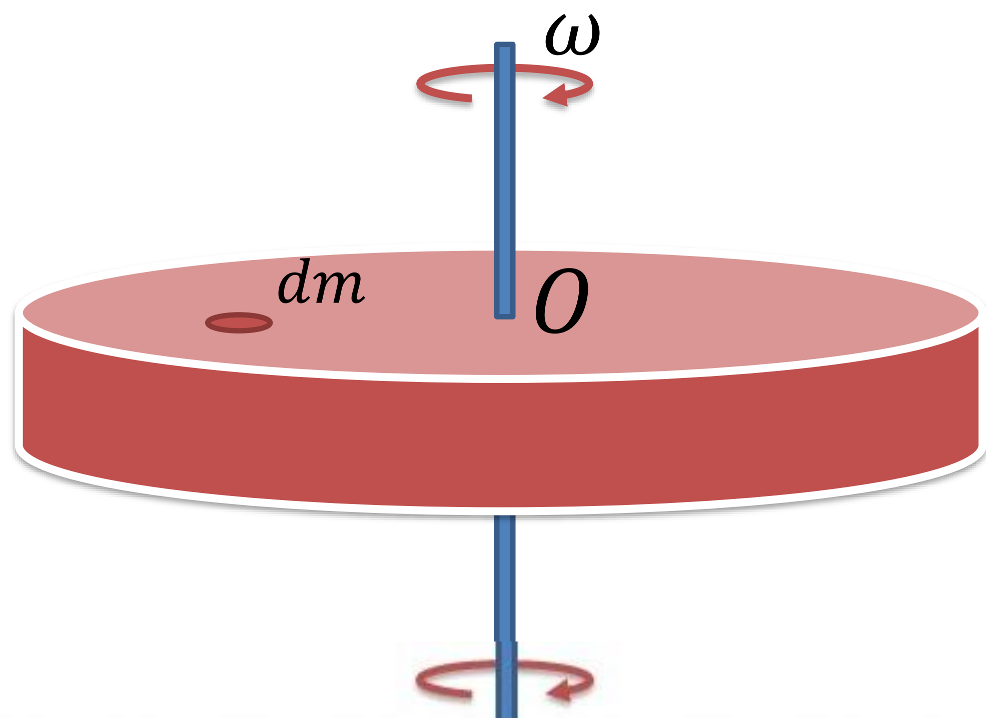
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 + m_6 r_6^2 + m_7 r_7^2 + m_8 r_8^2 + m_9 r_9^2 + m_{10} r_{10}^2$$
$$+ m_{11} r_{11}^2 + m_{12} r_{12}^2 + m_{13} r_{13}^2 + m_{14} r_{14}^2 + m_{15} r_{15}^2 + m_{16} r_{16}^2 + m_{17} r_{17}^2 + m_{18} r_{18}^2 + m_{19} r_{19}^2$$
$$+ m_{19} r_{19}^2 + m_{20} r_{20}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2$$
$$+ m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2$$

$$I = ?$$



I = Momento de Inercia respecto al punto O

$$I = \oint r^2 \, dm$$



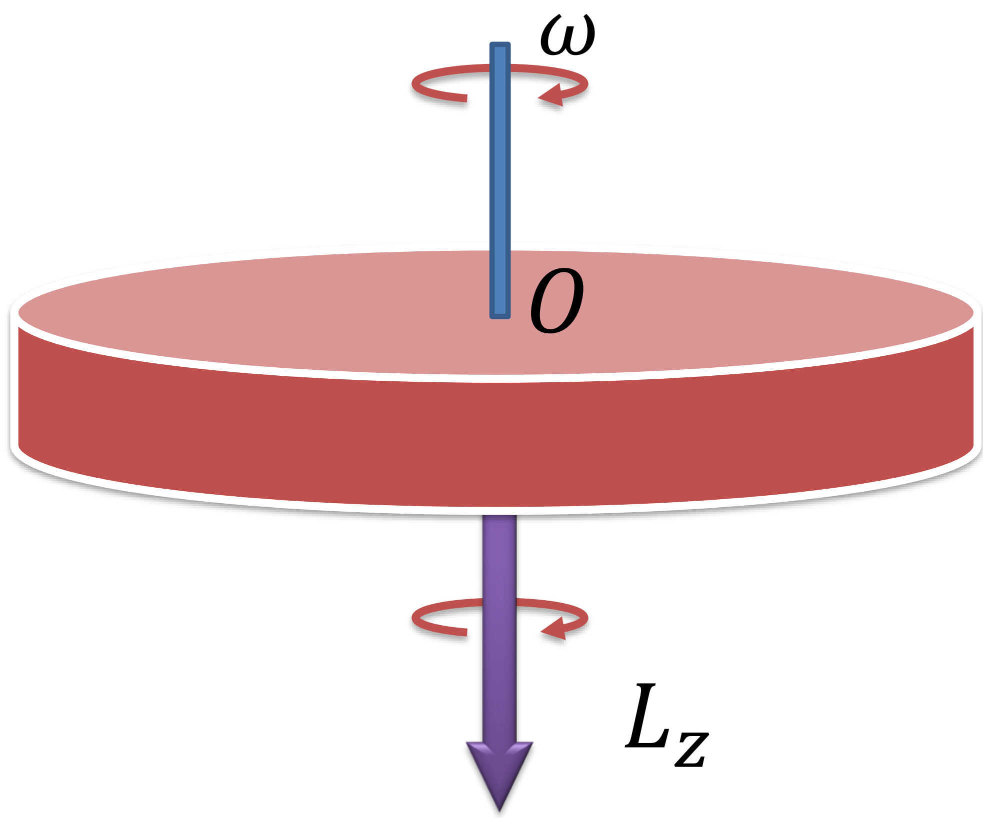
$$\begin{aligned}
I = {} & m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 + m_6 r_6^2 + m_7 r_7^2 + m_8 r_8^2 + m_9 r_9^2 + m_{10} r_{10}^2 + m_{11} r_{11}^2 + m_{12} r_{12}^2 + m_{13} r_{13}^2 + m_{14} r_{14}^2 + m_{15} r_{15}^2 + m_{16} r_{16}^2 + m_{17} r_{17}^2 + m_{18} r_{18}^2 + m_{19} r_{19}^2 \\
& + m_{19} r_{19}^2 + m_{20} r_{20}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + \\
& m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 \\
& + m_{22} r_{22}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 \\
& + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 + m_{23} r_{23}^2 \\
& + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 \\
& + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 \\
& + m_{24} r_{24}^2 + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2 + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2 + m_{23} r_{23}^2 + m_{24} r_{24}^2 \\
& + m_{25} r_{25}^2 + m_{26} r_{26}^2 + m_{27} r_{27}^2 + m_{28} r_{28}^2 + m_{29} r_{29}^2 + m_{30} r_{30}^2 + m_{31} r_{31}^2 + m_{32} r_{32}^2 + m_{33} r_{33}^2 + m_{34} r_{34}^2 + m_{35} r_{35}^2 + m_{36} r_{36}^2
\end{aligned}$$

I = Momento de Inercia respecto al punto O

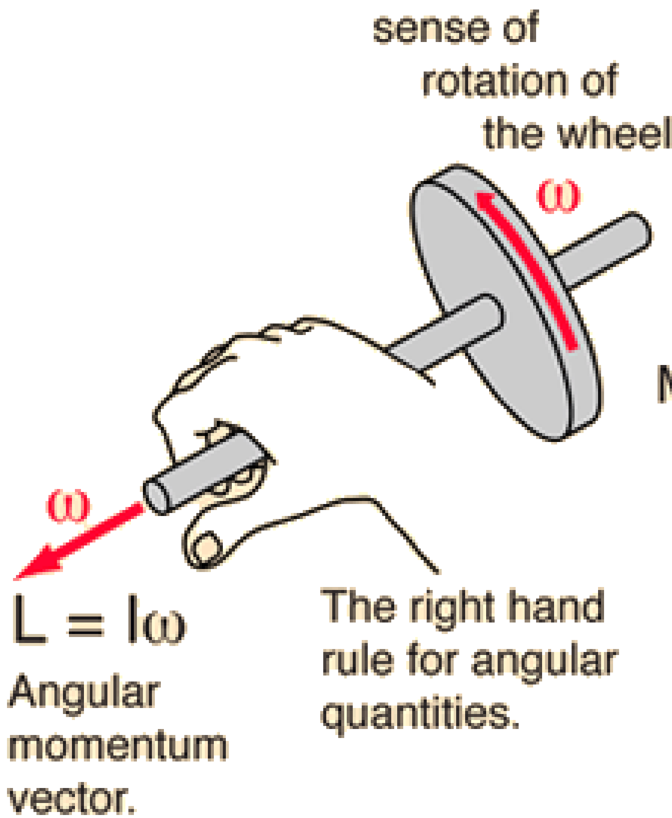
$$I = \oint r^2 \, dm$$

$$L_z = I\omega$$

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

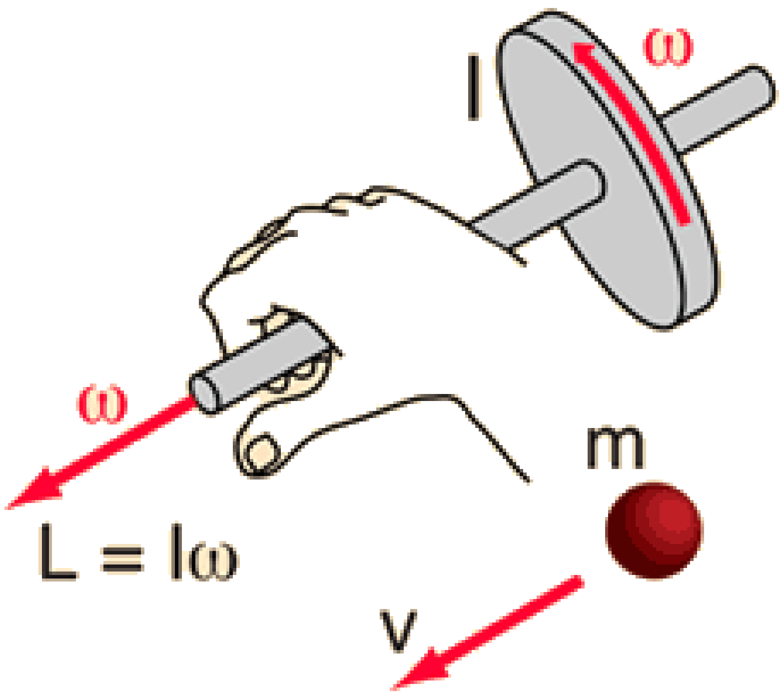


$$L_z = I\omega$$



Angular Momentum = Moment of Inertia x Angular Velocity

$$L = I \times \omega$$



Angular Momentum = Moment of Inertia x Angular Velocity

$$L = I \times \omega$$

Linear Momentum = Mass x Velocity

$$p = m \times v$$

The x implies simple multiplication here.

Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} =$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathrm{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

Conservación del momento angular

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

En general, si sobre la partícula actuase más de una fuerza

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Ecuación análoga para las rotaciones de las segunda ley de Newton para las traslaciones

Esta ecuación es válida:

- sólo si los momentos de todas las fuerzas involucradas y el momento angular se miden con respecto al mismo origen.

-válida para cualquier origen fijo en un sistema de referencia inercial.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$$\vec{L} = I\,\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}}$$

$$(\vec{F} = m\vec{a})$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad L = I\,\omega$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = I\alpha$$

$$\vec{r} \dashrightarrow \theta$$

$$\vec{v} \dashrightarrow \omega$$

$$\vec{a} \dashrightarrow \alpha$$

$$\vec{F} \dashrightarrow \vec{\tau}$$

$$m \dashrightarrow I$$

$$\vec{P} \dashrightarrow \vec{L}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{\tau} = I\alpha$$

$$\vec{P} = m\vec{v} \qquad L = I\,\omega$$

$$W = \vec{F}.\vec{r} \qquad W = \tau.\theta$$

$$E_C = \frac{1}{2} m\, v^2 \qquad E_C = \frac{1}{2} I\, \omega^2$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

Kinematic Equations for Rotational and Linear Motion Under Constant Acceleration

Rotational Motion About Fixed Axis	Linear Motion
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

$$x \longrightarrow \theta$$

$$v \longrightarrow \omega$$

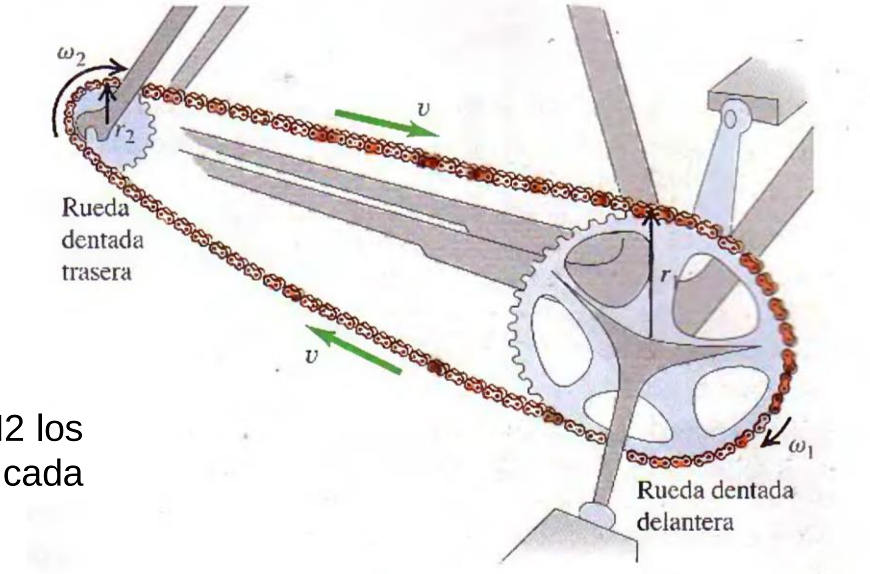
$$a \longrightarrow \alpha$$

Las expresiones cinemáticas para el movimiento de rotación bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que las del movimiento de traslación bajo aceleración de traslación constante, sustituyendo

Qué relación hay entre las velocidades angulares de las ruedas dentadas (plato y piñón) de una bicicleta y el numero de dientes de cada rueda?

La cadena es inextensible y no resbala, asique tiene la misma velocidad tangencial v en ambas ruedas.

$$v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$



La rapidez angular es inversamente proporcional al radio. Sean N1 y N2 los números de dientes, la condición de equiespaciado de los dientes en cada rueda dentada es:

$$\frac{2\pi r_2}{N_1} = \frac{2\pi r_2}{N_2} \qquad \text{O bien} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2}}$$

La rapidez angular de cada rueda dentada es inversamente proporcional al numero de dientes. En una bicicleta de varias velocidades obtendremos la máxima velocidad angular ω_2 de la rueda trasera para un pedaleo dado ω_1 cuando el cociente $\frac{N_1}{N_2}$ es máximo.

Analogías entre rotaciones y traslaciones

Traslaciones

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Una fuerza neta sobre una partícula produce un cambio en el momento lineal de la misma

Una fuerza neta actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento lineal de la partícula

Rotaciones

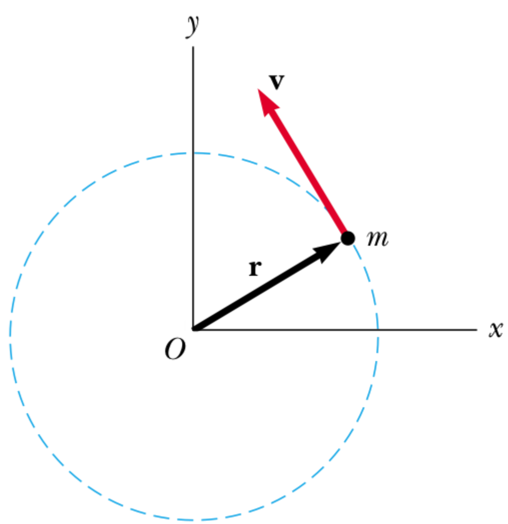
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Un torque neto sobre una partícula produce un cambio en el momento angular de la misma

Una torque neto actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento angular de la partícula

Momento angular de una partícula en un movimiento circular

Supongamos una partícula que se mueve en el plano xy en un movimiento circular de radio r.
Hallar la magnitud y dirección de su momento angular con respecto al origen O si su velocidad lineal es $\vec{v}$.



Como el momento lineal de la partícula está en constante cambio (en dirección, no en magnitud), podríamos pensar que el momento angular de la partícula también cambia de manera contínua con el tiempo

Sin embargo este no es el caso

Magnitud

$$L = mvr \sin 90^\circ = mvr$$

Dirección

Perpendicular al plano de la pantalla y saliendo hacia fuera (regla de la mano derecha)

Una partícula en un movimiento circular uniforme tiene un momento angular constante con respecto a un eje que pase por el centro de la trayectoria

Momento angular total de un sistema de partículas

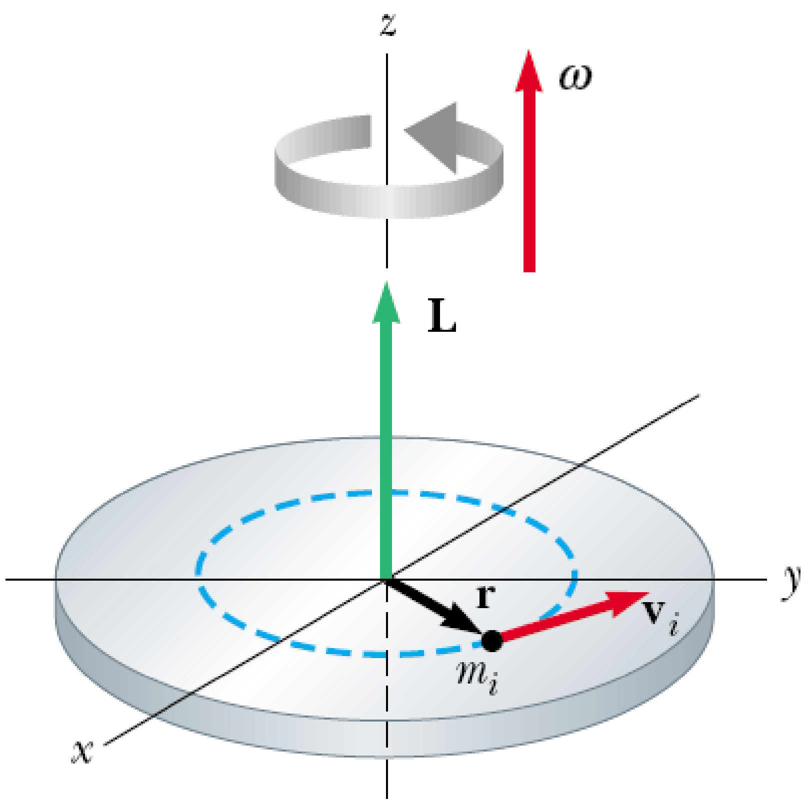
El momento angular total de un sistema de partículas con respecto a un determinado punto se define como la suma vectorial de los momento angulares de las partículas individuales con respecto a ese punto.

$$\boxed{\vec{L}_{\mathrm{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i}$$

En un sistema continuo habría que reemplazar la suma por una integral

Momento angular de un sólido rígido en rotación

Consideremos una placa que rota alrededor de un eje perpendicular y que coincide con el eje z de un sistema de coordenadas



Cada partícula del objeto rota en el plano xy alrededor del eje z con una celeridad angular ω .

El momento angular de una partícula de masa m_i que rota en torno al eje z es

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right]$$

$$= m_i \left[\vec{\omega} \left(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \right) - \vec{r}_i \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i \right) \right] = m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

Y el momento angular del sistema angular (que en este caso particular sólo tiene componente a lo largo de z)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \vec{\omega} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

Extraído de la pagina del Prof. Javier Junquera (http://personales.unican.es/junqueraj)

Observaciones

En general, la expresión $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ no siempre es válida.

Si un objeto rígido rota alrededor de un eje arbitrario, el momento angular y la velocidad angular podrían apuntar en direcciones diferentes.

En este caso, el momento de inercia no puede ser tratado como un escalar.

Estrictamente hablando, $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ se aplica sólo en el caso de un sólido rígido de cualquier forma que rota con respecto a uno de los tres ejes mutuamente perpendiculares (denominados ejes principales de inercia) y que pasan por su centro de masa.

Si la masa de un sistema aislado que rota sufre un redistribución, el momento de inercia *I* cambia

Como la magnitud del momento angular del sistema es

$$L = I\omega$$

Si no hay torques externos $\Rightarrow$ $$\sum \tau_{ext} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} Remember, \\ \Delta L = L_f - L_i \end{matrix}\right)$$

Entonces vale lo que llamamos ‘ley de conservación del momento angular’ requiere que el producto

$$L = I\omega$$

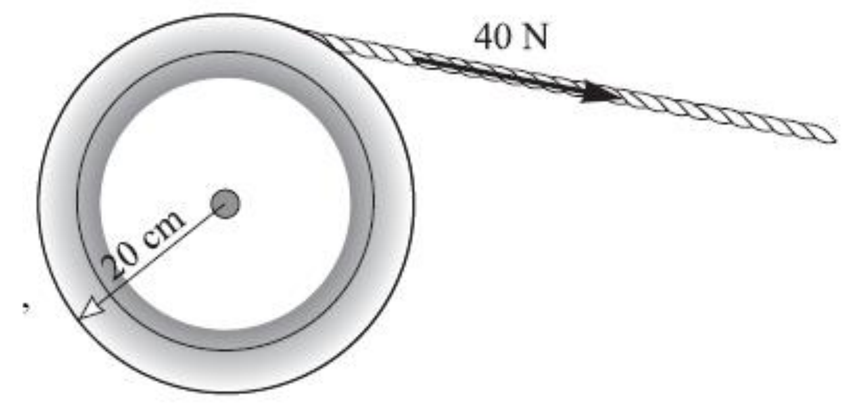
permanezca constante. Por lo tanto $L_f = L_i$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{cte.}$$

Es decir, para un sistema aislado, un cambio en *I* requiere un cambio en ω

Problema

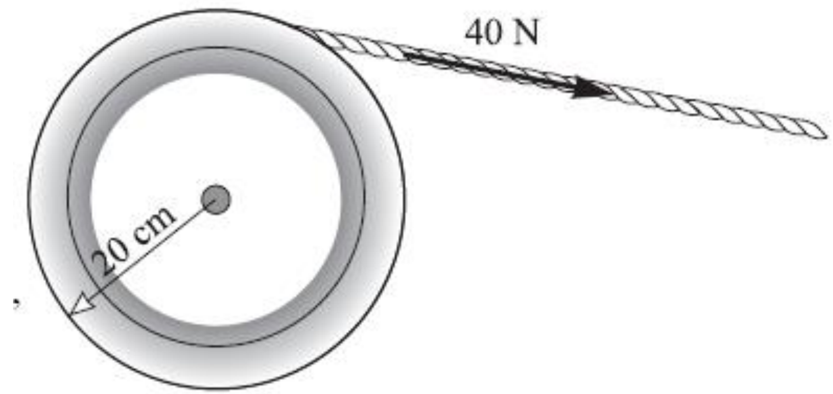
Como se muestra en la figura, una fuerza constante de 40 N se aplica tangencialmente al borde de una rueda de 20 cm de radio. La rueda tiene un momento de inercia de 30 kg.m^2.



Encuentre

a) la aceleración angular,
b) la rapidez angular después de 4.0 s si parte del reposo y
c) el número de revoluciones realizadas en 4.0 s.
d) Demuestre que el trabajo efectuado sobre la rueda en los 4.0 s es igual a la E_C de la rueda al cabo de los 4.0 s.

Sol.



a) Utilizando $\tau = I\alpha$, se obtiene

$$(40 \text{ N})(0.20 \text{ m}) = (30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\ \alpha$$

de donde $\alpha = 0.267 \text{ rad/s}^2$ o 0.27 rad/s^2.

b) Se usa $\omega_f = \omega_i + \alpha t$, para encontrar la rapidez angular final,

$$\omega_f = 0 + (0.267 \text{ rad/s}^2)(4.0 \text{ s}) = 1.07 \text{ rad/s} = 1.1 \text{ rad/s}$$

c) En virtud de que $\theta = \omega_{prom} t = \frac{1}{2}(\omega_f + \omega_i)t$, se tiene

$$0 = \tfrac{1}{2}(1.07 \text{ rad/s})(4.0 \text{ s}) = 2.14 \text{ rad}$$

que equivale a 0.34 revoluciones.

d) Se sabe que trabajo = torca $\times\ \theta$, por ende

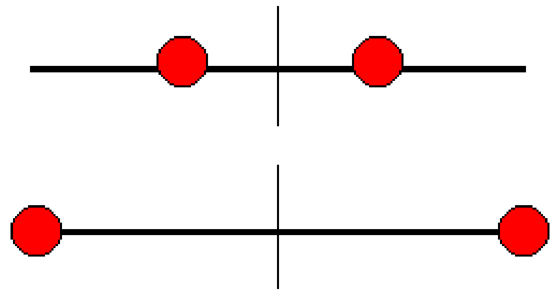
$$\text{Trabajo} = (40 \text{ N} \times 0.20 \text{ m})(2.14 \text{ rad}) = 17 \text{ J}$$

Note que deben usarse radianes. La EC_r final es $\frac{1}{2} I\omega_f^2$, por tanto

$$EC_r = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(1.07 \text{ rad/s})^2 = 17 \text{ J}$$

El trabajo realizado es igual a la EC_r.

Problema

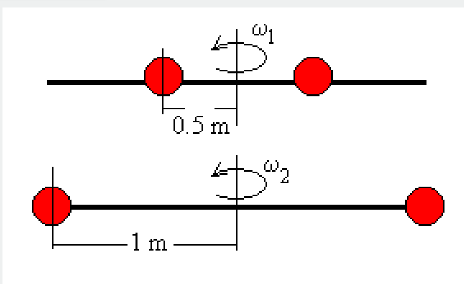


Dos esferas iguales de masas 6 kg y 20 cm de radio están montadas como se indica en la figura, y pueden deslizar a lo largo de una varilla delgada de 3 kg de masa y 2 m de longitud. El conjunto gira libremente con una velocidad angular de 120 rpm respecto a un eje vertical que pasa por el centro del sistema.

Inicialmente los centros de las esferas se encuentran fijos a 0.5 m del eje de giro. Se sueltan las esferas y las esferas deslizan por la barra hasta que salen por los extremos. Calcular:

- La velocidad angular de rotación cuando los centros de las esferas se encuentran en los extremos de la varilla.
- Hallar la energía cinética del sistema en los dos casos.

Rta.



Conservación del momento angular

$I_1 = \frac{1}{12}3 \cdot 2^2 + 2\left(\frac{2}{5}6 \cdot 0.2^2 + 6 \cdot 0.5^2\right) \qquad \omega_1 = \frac{120 \cdot 2\pi}{60} = 4\pi \text{ rad/s}$

$I_2 = \frac{1}{12}3 \cdot 2^2 + 2\left(\frac{2}{5}6 \cdot 0.2^2 + 6 \cdot 1^2\right)$

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad \omega_2 = 1.27\pi \text{ rad/s}$

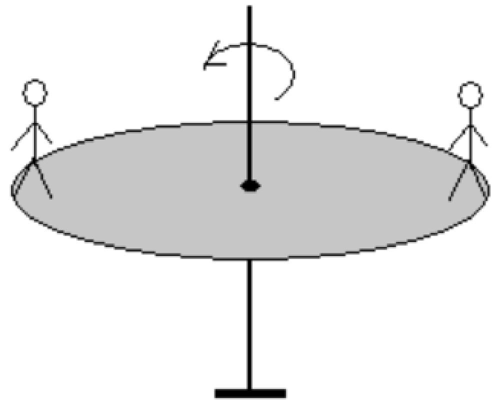
Variación de la energía cinética

$E_{k1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = 330.99 \text{ J}$

$E_{k2} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = 105.20 \text{ J}$

http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/problemas/solido/conservacion/problemas/conservacion_problemas.xhtml

Problema



Dos niños de 25 kg de masa cada uno están situados en el borde de un disco de 2.6 m de diámetro y 10 kg de masa. El disco gira a razón de 5 rpm respecto del eje perpendicular al disco y que pasa por su centro.

- ¿Cuál será la velocidad angular del conjunto si cada niño se desplaza 60 cm hacia el centro del disco?.
- Calcular la variación de energía cinética de rotación del sistema, y explica la causa del incremento de energía.

Rta.

Conservación del momento angular

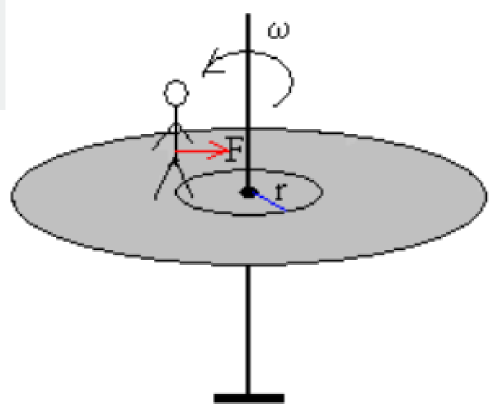
$$I_1 = \frac{1}{2}10 \cdot 1.3^2 + 2(25 \cdot 1.3^2) \qquad \omega_1 = \frac{5 \cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad/s}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}10 \cdot 1.3^2 + 2(25 \cdot 0.7^2)$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad \omega_2 = 1.48\ \text{rad/s}$$

Variación de la energía cinética

$$\Delta E = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = 27.2\ \text{J}$$

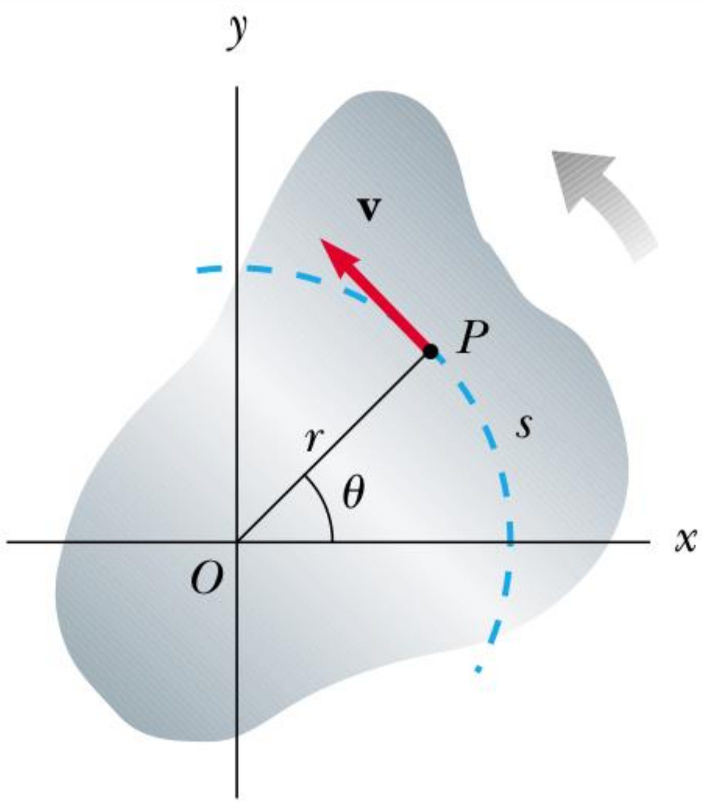


La fuerza sobre un niño para que describa un movimiento circular de radio r es $F=m\omega^2 r$, cuando la plataforma gira con velocidad angular ω. El trabajo de la fuerza F cuando el niño pasa de la posición inicial (en el borde) a la posición final (hacia el centro) incrementa la energía cinética de rotación.

http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/problemas/solido/conservacion/problemas/conservacion_problemas.xhtml

Repaso de las relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

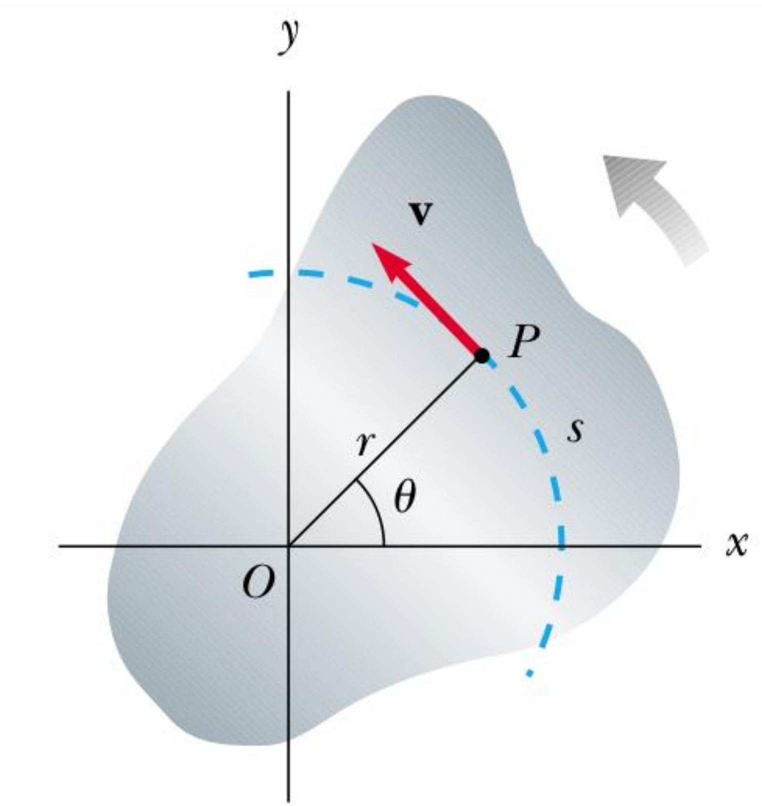
Dado que la partícula se mueve en una trayectoria circular, su vector velocidad es siempre perpendicular a la trayectoria

(la llamamos ***velocidad tangencial***)

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

El módulo de la velocidad tangencial viene dado por

$$v = \frac{ds}{dt}$$



Donde s es la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular

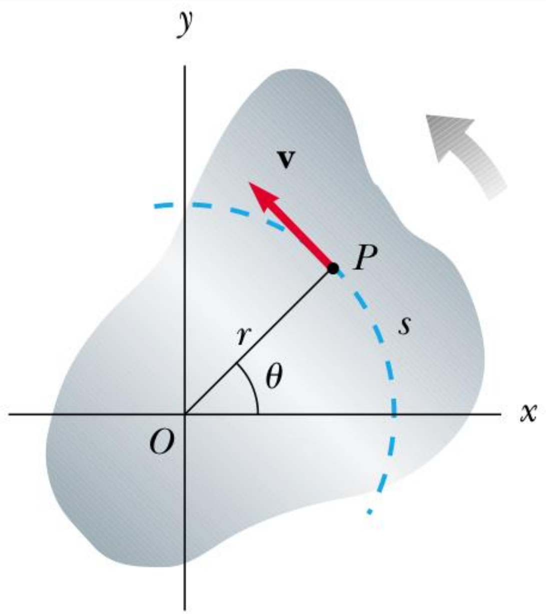
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\omega$$

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio *r* alrededor del eje *z*

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

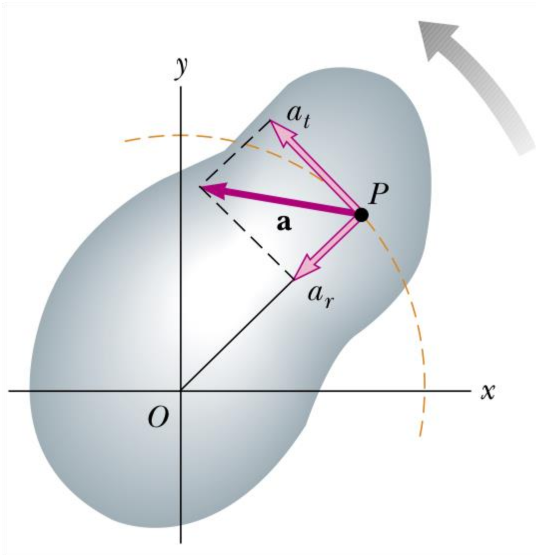
$$v = r\omega$$

Aunque cada punto del sólido rígido tenga la misma velocidad angular, no todos los puntos tienen la misma velocidad tangencial, puesto que *r* cambia de punto a punto.

La velocidad tangencial de un punto en un objeto que rota aumenta según nos separamos del eje de giro

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Podemos establecer una relación entre la aceleración angular de la partícula y su aceleración tangencial a_t , cuya componente es tangente a la trayectoria del movimiento



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

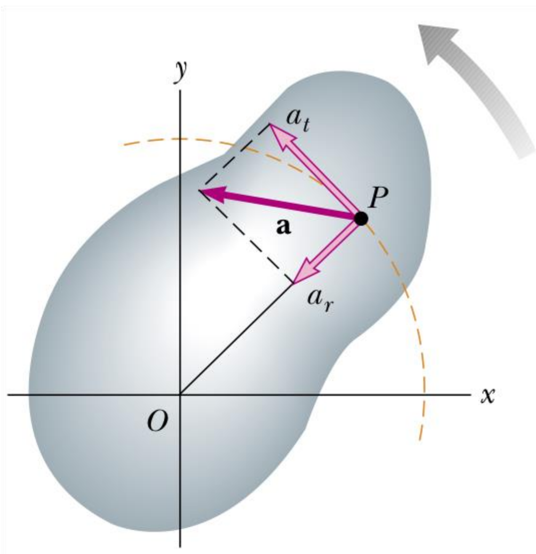
$$a_t = r\alpha$$

La componente tangencial de la aceleración de traslación de una partícula que experimenta un movimiento circular es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la aceleración angular

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Pero la aceleración de traslación también tiene una componente centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$



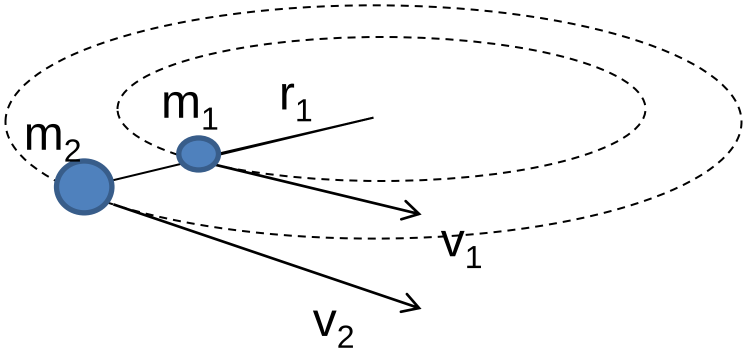
Aceleración de traslación total

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_c}$$

Módulo de la aceleración de traslación total

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Energía cinética rotacional



Supongamos una particula en una cuerda girando circularmente. Cada una de esas partículas tiene una energía cinética caracterizada por su masa y el módulo de su velocidad tangencial

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

$$E_T = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2} m_1\, {v^2}_1 + \frac{1}{2} m_2\, {v^2}_2$$

Todas las partículas tienen la misma celeridad angular, **PERO** las celeridades tangenciales individuales dependerán de su distancia al eje de rotación $v_i = \omega\, r_i$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2} m_1 {r_1}^2\, \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 {r_2}^2\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left[m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2\right]\omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} m_i {r_i}^2\right)\omega^2$$

Energía cinética rotacional

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} m_i {r_i}^2\right)\omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} m_i\right)v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$$

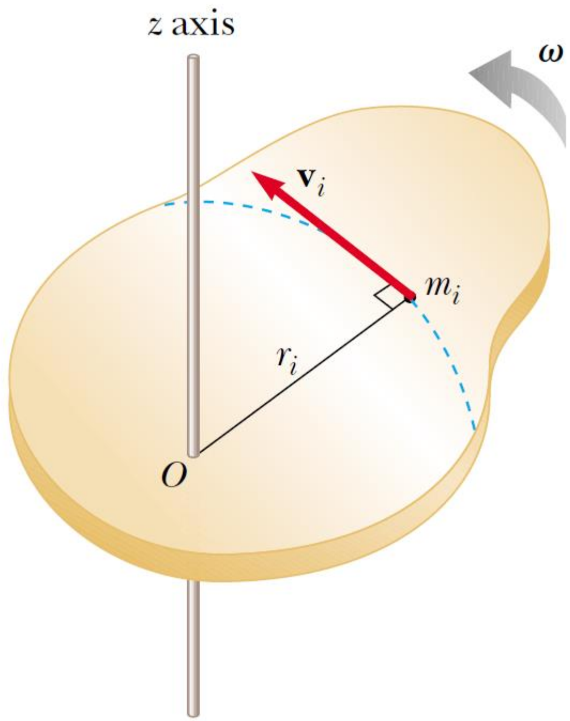
El momento de inercia se define como

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2$$

Tiene por dimensiones ML^2, siendo sus unidades en el SI ($kg \cdot m^2$)

Energía cinética rotacional

Supongamos que podemos considerar el objeto como un conjunto de partículas que rotan alrededor del eje z con una celeridad angular ω



Cada una de esas partículas tiene una energía cinética caracterizada por su masa y el módulo de su velocidad tangencial

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

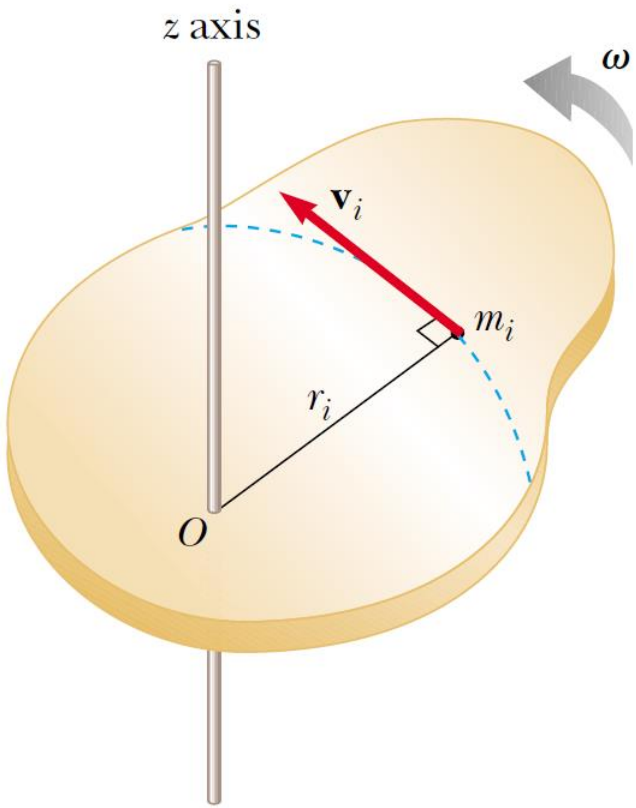
Todas las partículas tienen la misma celeridad angular, **PERO** las celeridades tangenciales individuales dependerán de su distancia al eje de rotación

$$v_i = r_i \omega$$

La energía cinética total del sólido rígido vendrá dada por la suma de las energías cinéticas de todas las partículas que lo componen

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Energía cinética rotacional



La energía cinética rotacional toma el valor

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

La energía cinética rotacional no es una nueva forma de energía.

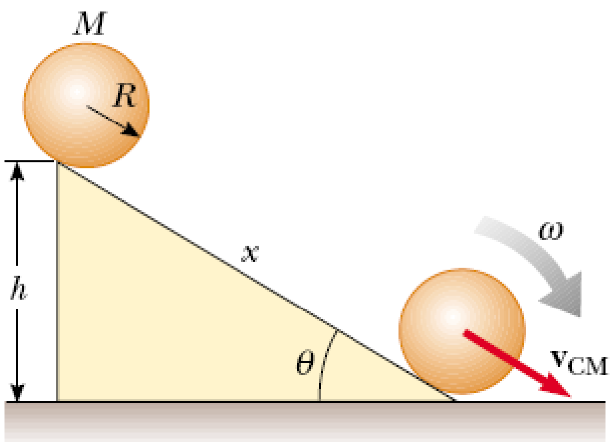
Simplemente se trata de energía cinética ordinaria (se ha calculado como la suma de la energía cinética de las partículas contenidas en el sólido rígido).

Sin embargo, la nueva expresión matemática es más conveniente cuando tratamos con rotaciones (siempre que sepamos como calcular el momento de inercia)

Ahora, en el lado correspondiente al almacenamiento, dentro de la ecuación de conservación de la energía, deberemos ahora considerar que el término de la energía cinética es la suma de los cambios tanto en la energía cinética de traslación como de rotación.

Energía cinética rotacional

La energía cinética total de un cuerpo que rota es la suma de la energía cinética de rotación y la energía cinética traslacional del centro de masas



$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Si las fuerzas que actúan sobre un sistema son conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva (es una constante)

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + Mgy_{CM} = \text{constante}$$

Analogía entre la energía cinética asociada con las rotaciones y la energía cinética asociada con movimiento lineal

La energía cinética de traslación	**La energía cinética rotacional**
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
El papel de …	**… lo juega**
m	I
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$

Esto va a ocurrir cada vez que comparemos una ecuación del movimiento lineal con su correspondiente análogo en el movimiento rotacional

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento rotacional

Analogías y diferencias entre masa y momento de inercia

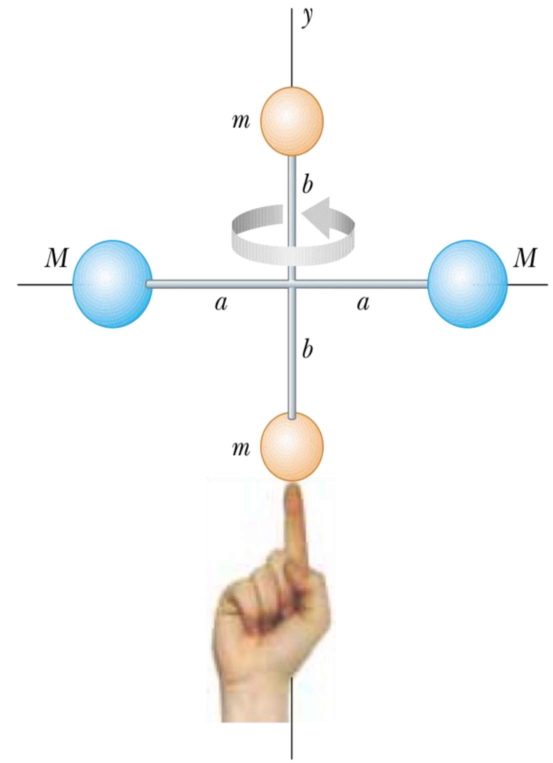
Masa	Momento de inercia
Analogías	
Es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento lineal	**Es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento rotacional**
Diferencias	
Es una propiedad intrínseca del objeto (asumiendo velocidades no relativistas)	**Depende de la elección del eje de rotación (no hay un valor único del momento de inercia de un objeto). No sólo depende de la masa, sino de cómo está distribuida la masa alrededor del eje de giro.**
Es un escalar	**Es un tensor**

Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

Sistema discreto $$I = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2$$

Ejemplo: cuatro pequeñas esferas están unidas a las cuatro esquinas de un marco de masa despreciable que está situado sobre el plano xy. Si la rotación se produce alrededor del eje y con celeridad angular ω, calcular:

- el momento de inercia I_y con respecto al eje y
- la energía cinética de rotación con respecto a dicho eje.



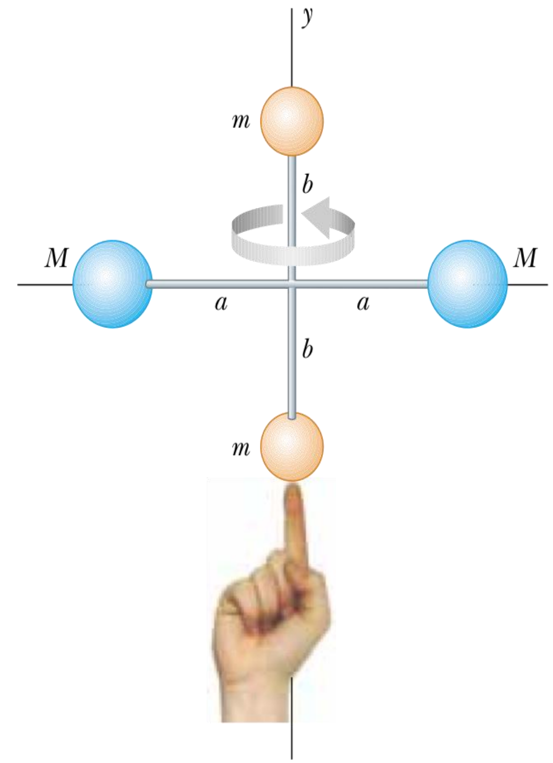
Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

Sistema discreto $$I = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2$$

Las dos esferas de masa m que están situadas en el eje y no contribuyen a I_y

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$



Las dos esferas de masa m no se mueven alrededor del eje y y, por tanto, no tienen energía cinética

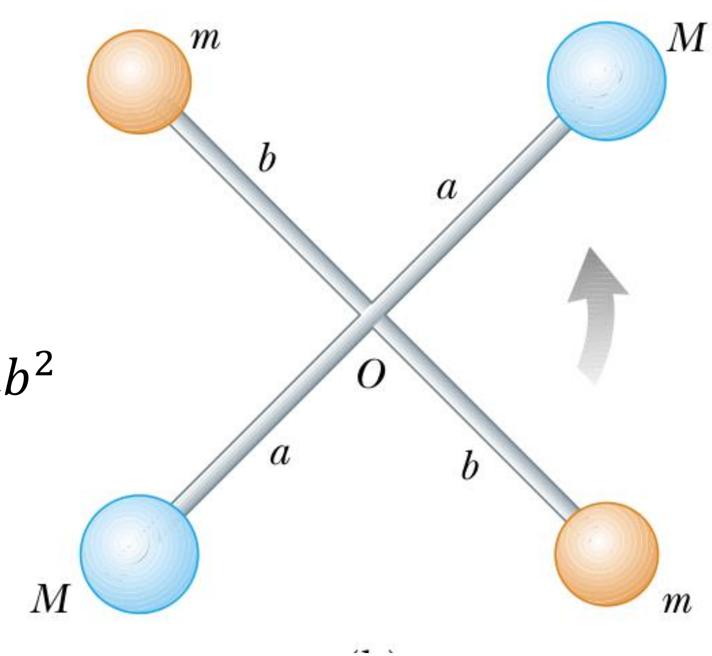
Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

Sistema discreto

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2$$

Ejemplo: cuatro pequeñas esferas están unidas a las cuatro esquinas de un marco de masa despreciable que está situado sobre el plano xy. Si la rotación se produce alrededor del eje z con celeridad angular ω, calcular:

- el momento de inercia I_z con respecto al eje z
- la energía cinética de rotación con respecto a dicho eje.



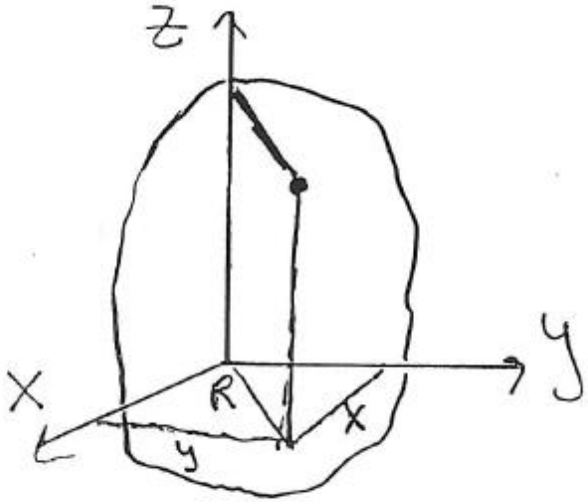
Dado que r_i representa la distancia perpendicular al eje de giro

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2 \quad = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

El momento de inercia y la energía cinética de rotación asociada a una celeridad angular determinada cambia con respecto al eje de giro

Cálculos de momentos de inercia

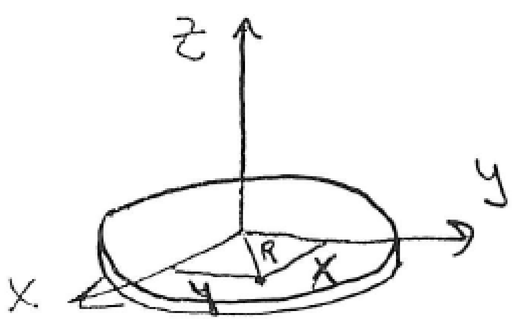


Sistema discreto

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2$$

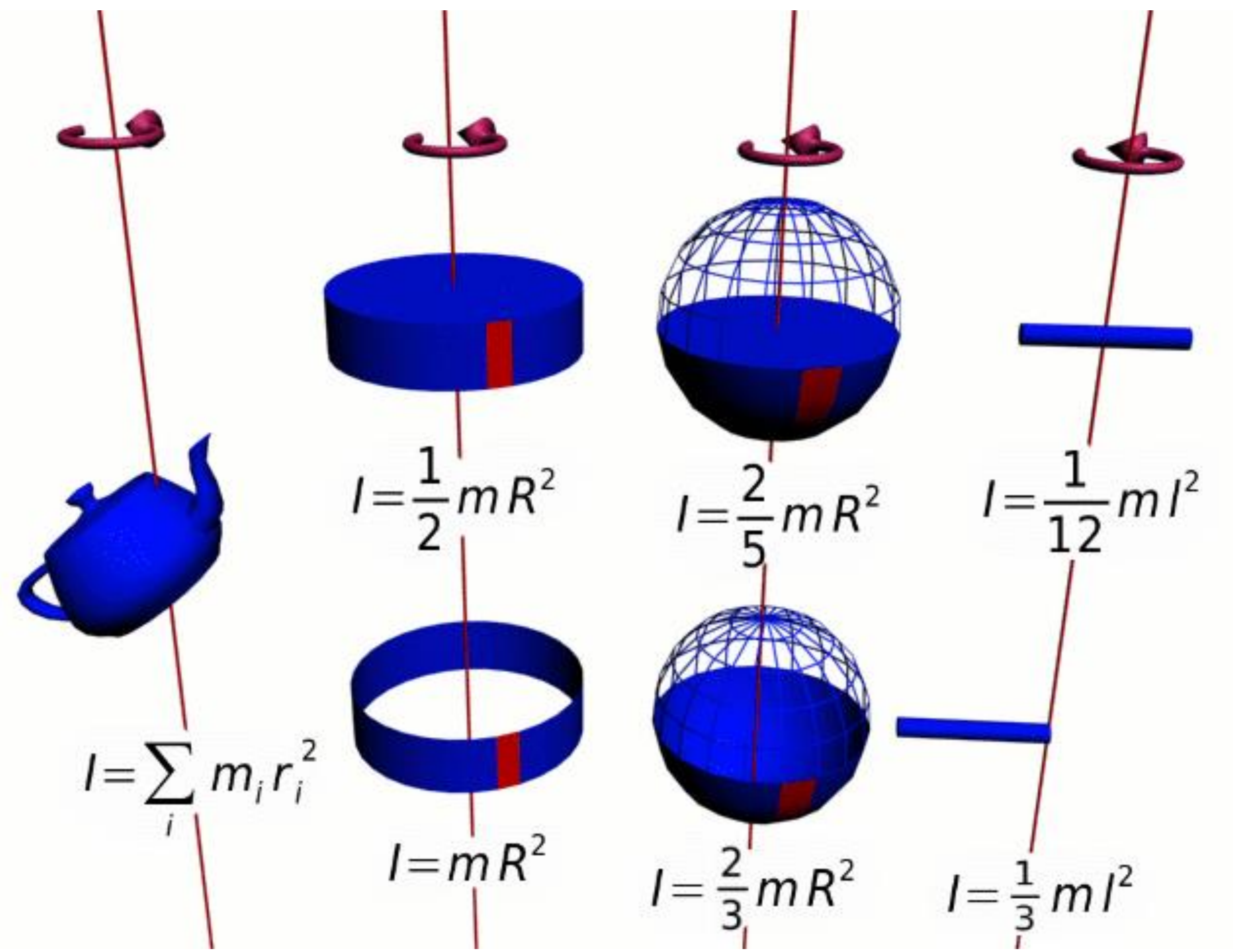
Sistema continuo

$$I_z = \int r^2\, dm = \int (x^2 + y^2) dm$$



Placa plana

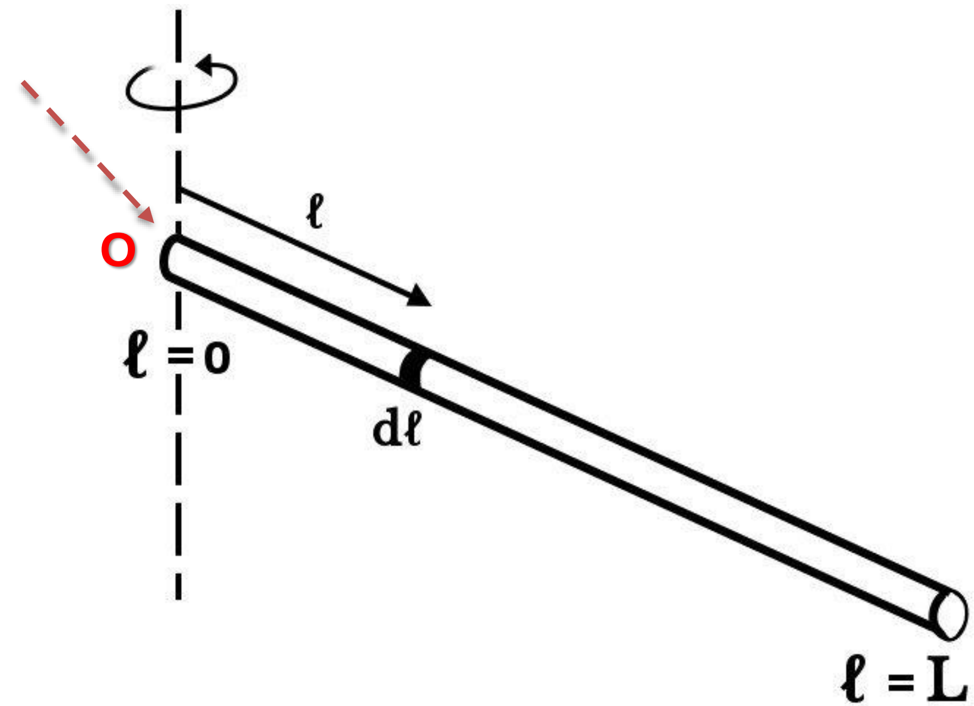
$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int y^2\, dm \\ I_y &= \int x^2\, dm \end{aligned}\right\} \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm = I_x + I_y$$



By PanCiasteczko - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3507671

WIKIVERSITY

$$I = \int_0^L r^2 \, dm = \int_0^L x^2 \, \lambda \, dx$$



$$I = \lambda \int_0^L x^2 \, dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \lambda\left(\frac{L^3}{3} - 0\right)$$

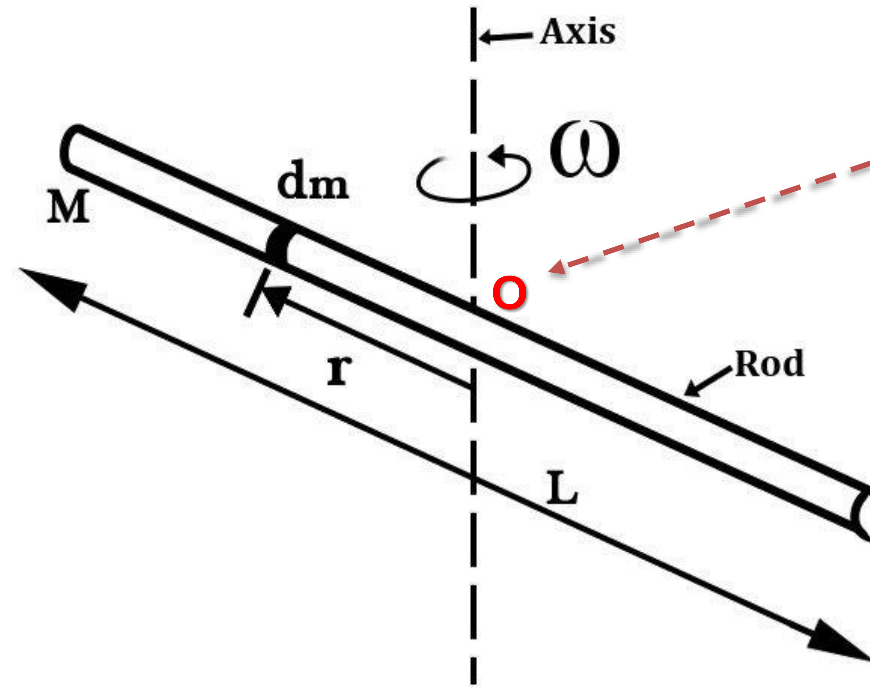
$$I = \frac{1}{3}\lambda L^3 = \frac{1}{3}\frac{M}{L}L^3$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

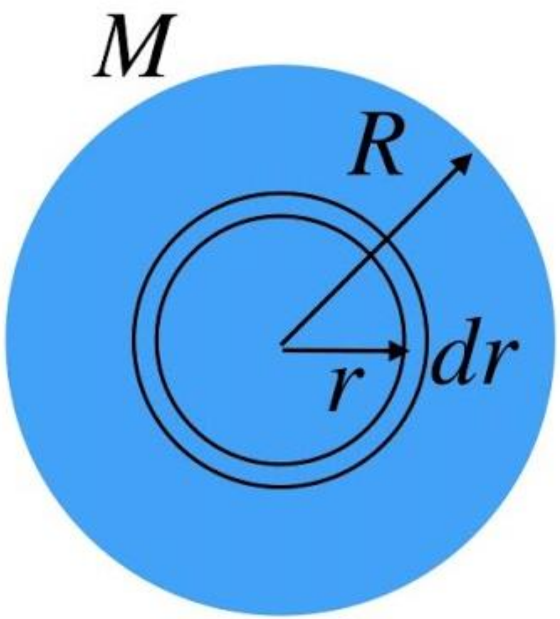
$$I = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \, dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, \lambda \, dx$$

$$I = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{L^3}{8} - \left(\frac{-L^3}{8}\right)\right)$$

$$I = \frac{\lambda}{3}\frac{L^3}{4} = \frac{1}{12}\frac{M}{L}L^3$$



$$\boxed{I = \frac{1}{12} M L^2}$$



$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA}$$

$$A = \pi R^2$$

$$dA = 2\pi r\, dr$$

$$dm = \sigma\, dA$$

$$I = \int_0^R r^2\, dm = \int_0^R r^2 \sigma\, dA = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r\, dr$$

$$I = 2\pi\sigma \int_0^R r^3\, dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi\sigma \left(\frac{R^4}{4} - 0\right)$$

$$I = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4}$$

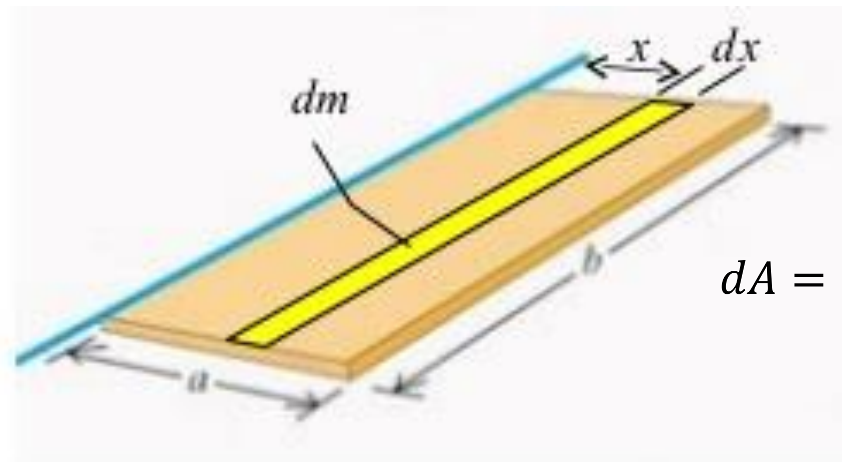
$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I = \int r^2\, dm = \int_0^a x^2 \sigma b dx = \sigma b \left[\frac{x^3}{3}\right]$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} = \frac{M}{a.b}$$

$$dm = \sigma\, bdx$$

$$I = \sigma b \left(\frac{a^3}{3}\right)$$



$$dA = bdx$$

$$I = \frac{M}{a.b} b \frac{a^3}{3} = M.\frac{a^2}{3}$$

$$\boxed{I = M.\frac{a^2}{3}}$$

Momentos de inercia de diferentes sólidos rígidos con respecto a determinados ejes

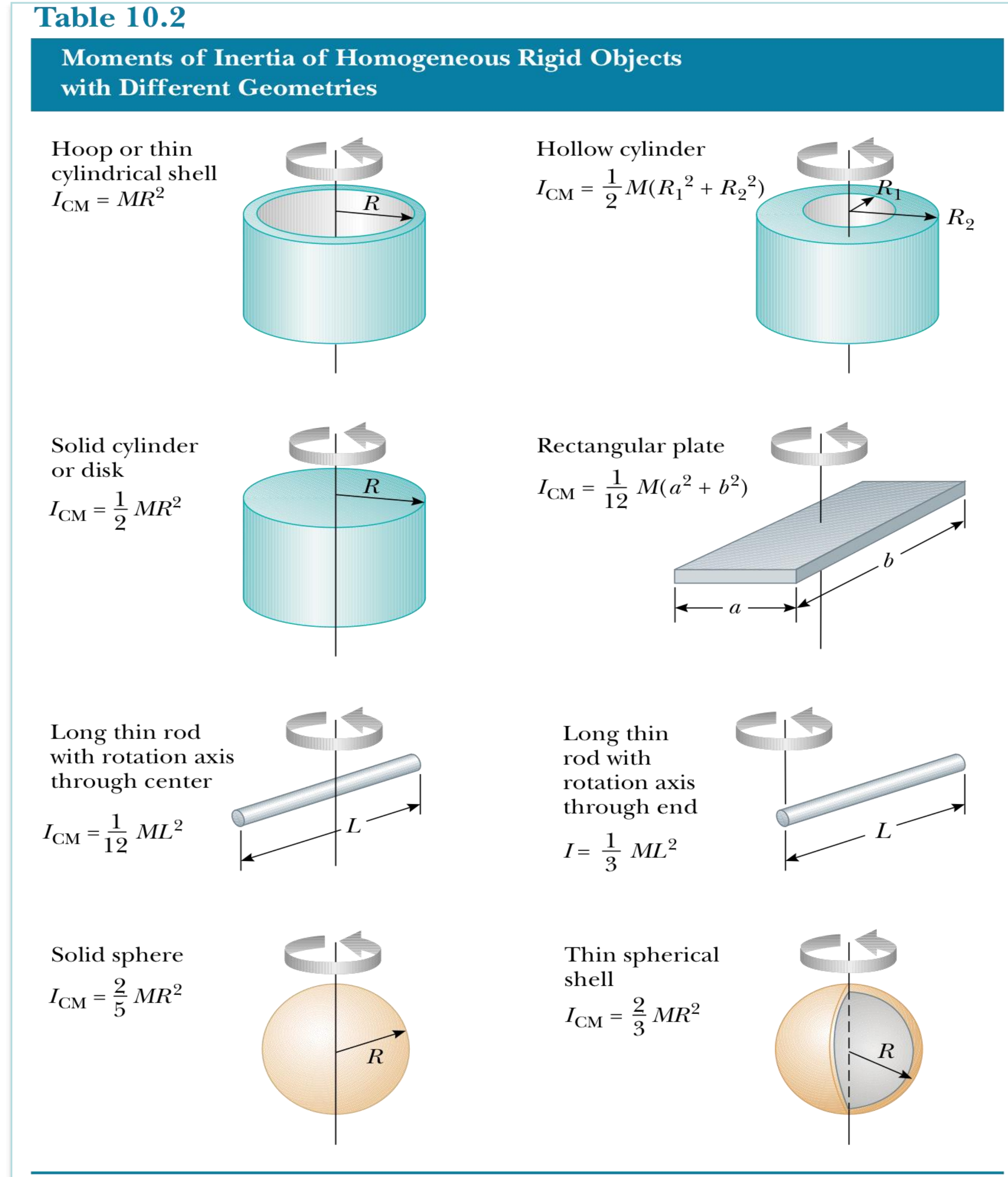


Table 10.2

Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Objects with Different Geometries

Hoop or thin cylindrical shell $I_{CM} = MR^2$

Hollow cylinder $I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

Solid cylinder or disk $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$

Rectangular plate $I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Long thin rod with rotation axis through center $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

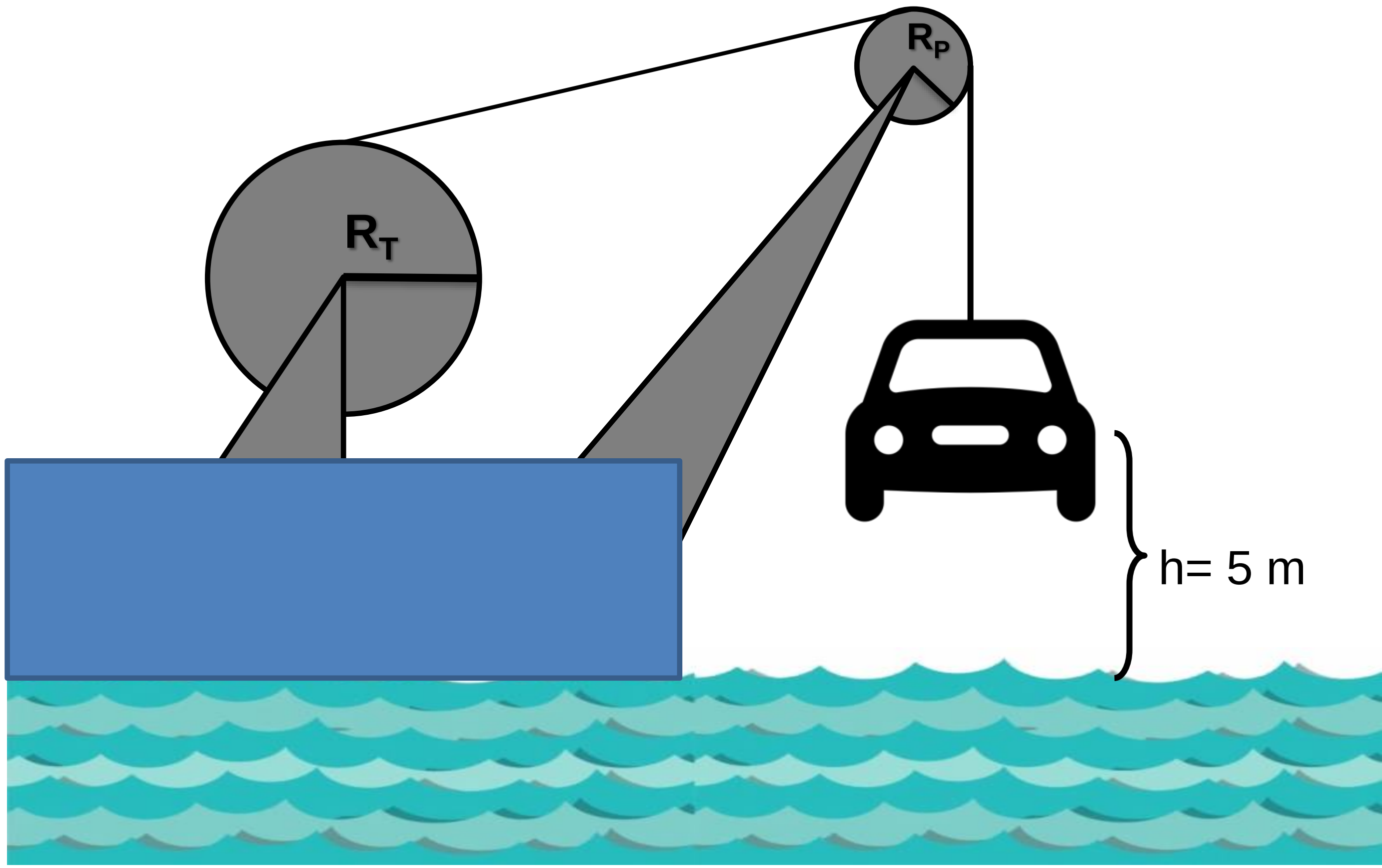
Long thin rod with rotation axis through end $I = \frac{1}{3}ML^2$

Solid sphere $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

Thin spherical shell $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$

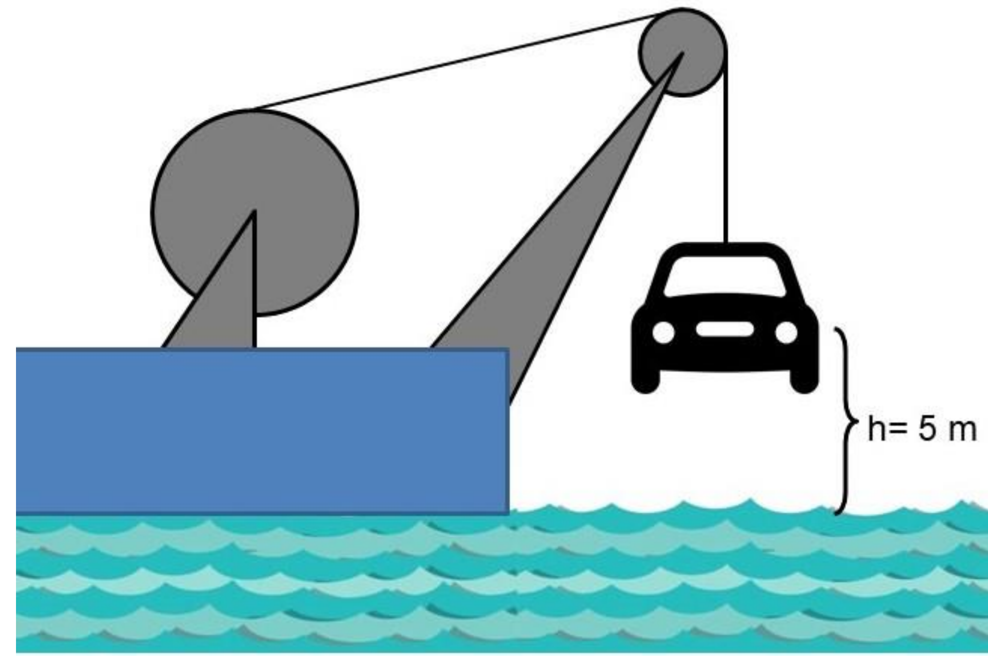
Mediante un torno de engranaje (grúa) se procede a levantar un coche de m=1200 kg de la forma que se muestra en la figura. El coche está a h=5.0 m sobre la superficie del agua. En ese instante se rompen los engranajes de la grúa y el coche cae desde el reposo. Durante la caída del coche no hay deslizamiento entre la cuerda (sin masa) la polea, y el tambor.

El momento de inercia del Tambor es $I_{Tambor} = 320\ kg.m^2$ y el de la polea es $I_{Polea} = 4\ kg.m^2$. El radio del Tambor es $R_T = 0{,}80\ m$ y el de la polea es $R_P = 0{,}30\ m$. Calcule la velocidade com la que el coche golpea la superfície del agua.



$$\boxed{E_{Mi} = E_{Mf}}$$

$$E_M = E_c + E_P + E_R$$



$$E_{Mi} = E_{Pi} + E_{Ci} + E_{Ri}$$

$$E_{Pi} = M_{ch} g\, h \qquad E_{Ci} = E_{Ri} = 0$$

$$E_{Pf} = 0$$

$$E_{Cf} = \frac{1}{2} M_{ch} {v_f}^2$$

$$E_{Rf} = \frac{1}{2} I_P {\omega_P}^2 + \frac{1}{2} I_T {\omega_T}^2$$

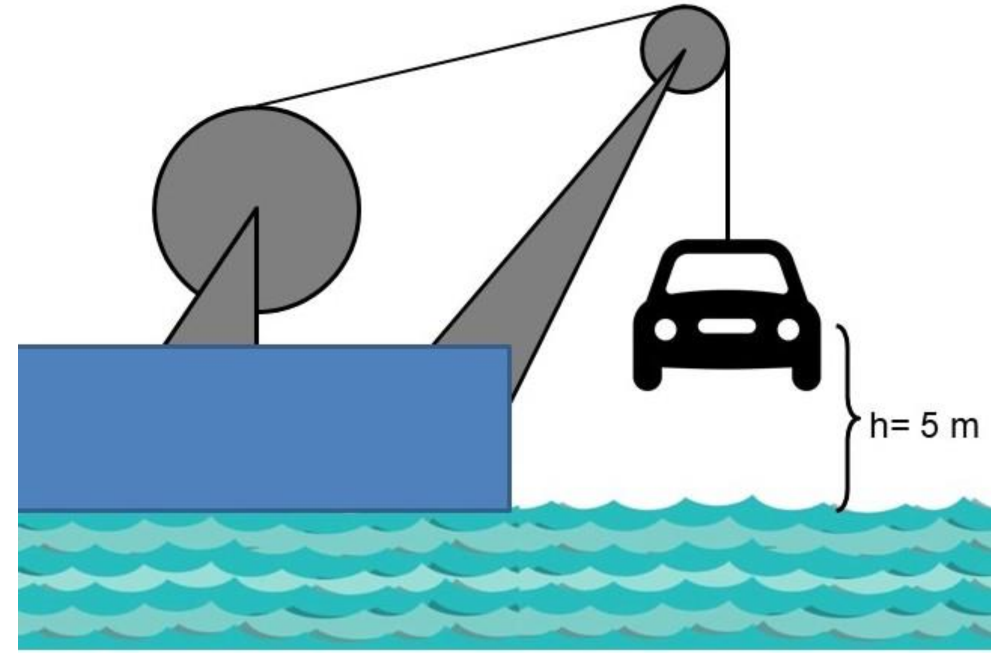
$$v_T = v_P = v_f$$

$$\Downarrow$$

$$v_f = \omega_T R_T = \omega_P R_P$$

$$E_{Pi} = E_{Ci} + E_{Ri}$$

$$E_{Pi} = E_{Ci} + E_{Ri}$$



$$M_{ch} g\, h = \frac{1}{2} M_{ch} {v_f}^2 + \frac{1}{2} I_P {\omega_P}^2 + \frac{1}{2} I_T {\omega_T}^2$$

$$M_{ch} g\, h = \frac{1}{2} M_{ch} {v_f}^2 + \frac{1}{2} I_P \left(\frac{v_f}{R_P}\right)^2 + \frac{1}{2} I_T \left(\frac{v_f}{R_T}\right)^2$$

$$M_{ch} g\, h = \frac{1}{2} {v_f}^2 \left[M_{ch} + \left(\frac{I_P}{{R_P}^2}\right) + \left(\frac{I_T}{{R_T}^2}\right)\right]$$

$$v_f = \omega_T R_T = \omega_P R_P$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 M_{ch} g\, h}{M_{ch} + \left(\frac{I_P}{{R_P}^2}\right) + \left(\frac{I_T}{{R_T}^2}\right)}} = 2{,}62\ M/s$$

Teorema de Steiner

Los momentos de inercia de sólidos rígidos con una geometría simple (alta simetría) son relativamente fáciles de calcular si el eje de rotación coincide con un eje de simetría.

Sin embargo, los cálculos de momentos de inercia con respecto a un eje arbitrario puede ser engorroso, incluso para sólidos con alta simetría.

El Teorema de Steiner (o teorema del eje-paralelo) a menudo simplifican los cálculos.

Premisa: Supongamos que conocemos el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masas de un objeto, I_{CM}

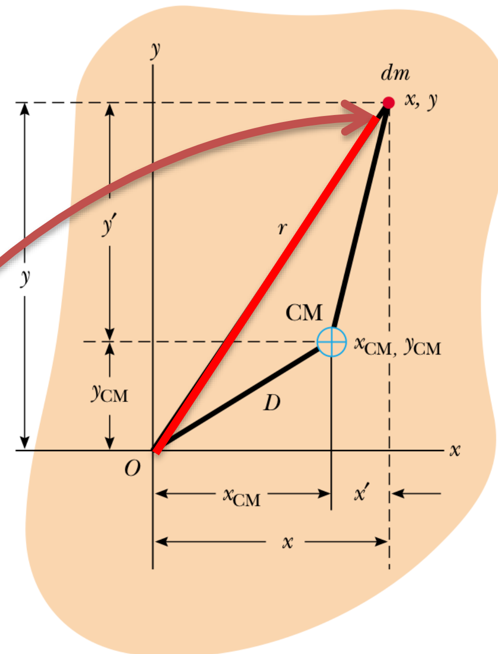
Teorema: Entonces podemos conocer el momento de inercia con respecto a cualquier otro eje paralelo al primero y que se encuentra a una distancia D

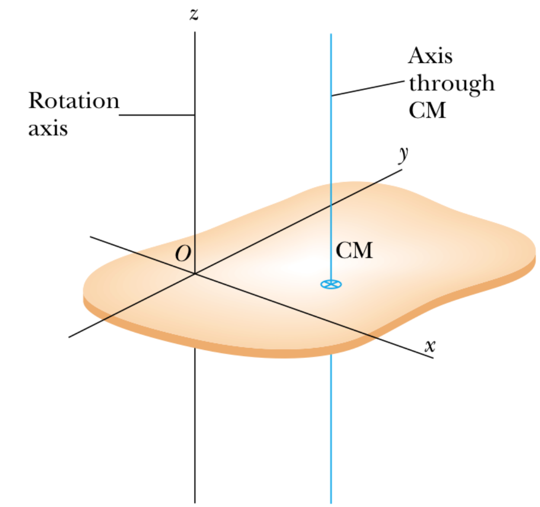
$$\boxed{I = I_{\mathrm{CM}} + MD^2}$$

Teorema de Steiner: demostración

Supongamos que un objeto rota en el plano xy alrededor del eje z.

Supongamos además que las coordenadas del centro de masas son x_{CM} e y_{CM}





Tomemos un elemento de masa dm situado en las coordenadas (x, y).

La distancia desde este elemento al eje de rotación (eje z) es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

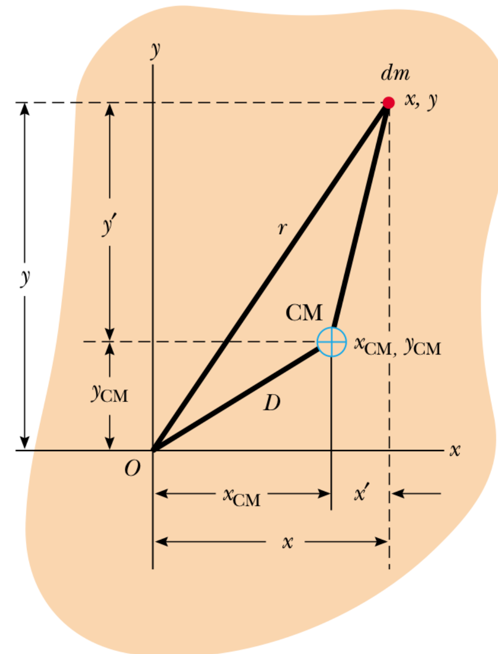
Y el momento de inercia con respecto al eje z vale $I_z = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$

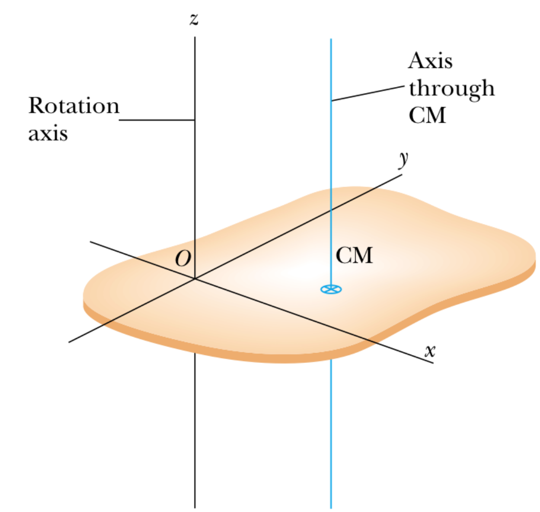
Teorema de Steiner: demostración

Tomemos un elemento de masa dm situado en las coordenadas(x, y).

Si ahora escogemos un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas del objeto, las nuevas coordenadas del elemento de masa serán (x', y').

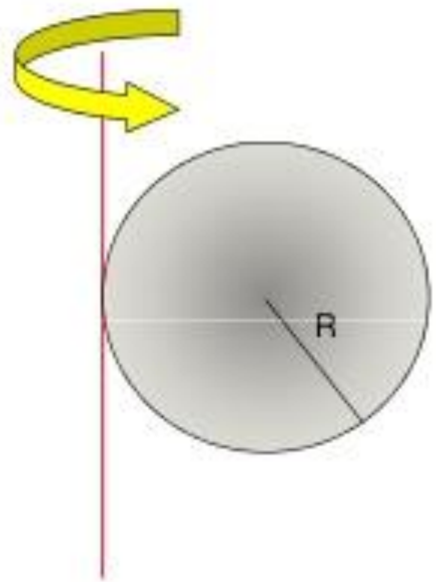
$$x = x' + x_{\mathrm{CM}} \qquad y = y' + y_{\mathrm{CM}}$$





$$\begin{aligned} I_z &= \int \left[\left(x' + x_{\mathrm{CM}} \right)^2 + \left(y' + y_{\mathrm{CM}} \right)^2 \right] dm \\ &= \int \left[\left(x' \right)^2 + \left(y' \right)^2 \right] dm + 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \, dm + 2y_{\mathrm{CM}} \int y' \, dm + \left(x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2 \right) \int dm \\ &= I_{\mathrm{CM}} + MD^2 \end{aligned}$$

5.- Emplear el teorema de Steiner para hallar el momento de inercia de una esfera maciza alrededor de un eje tangente a la esfera.



Según el teorema de Steiner:

$$I = I_{CM} + M\ a^2$$

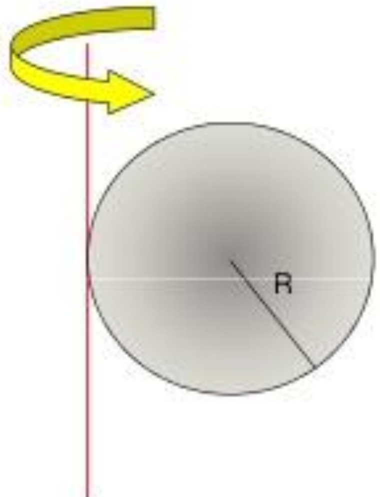
$$a = R \Rightarrow I = I_{CM} + M\,R^2$$

5.- Emplear el teorema de Steiner para hallar el momento de inercia de una esfera maciza alrededor de un eje tangente a la esfera.

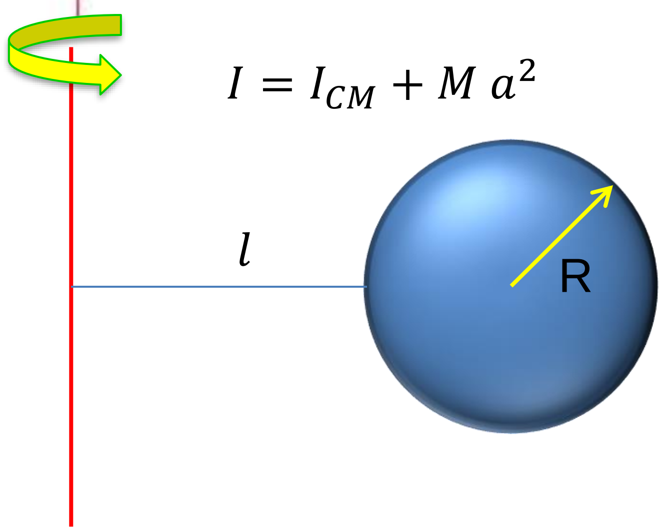
Según el teorema de Steiner:

$$I = I_{CM} + M\,a^2$$

$$a = R \Rightarrow I = I_{CM} + M\,R^2$$



$$I = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$



$$I = I_{CM} + M\,a^2$$

$$I = I_{CM} + M\,(l+R)^2$$

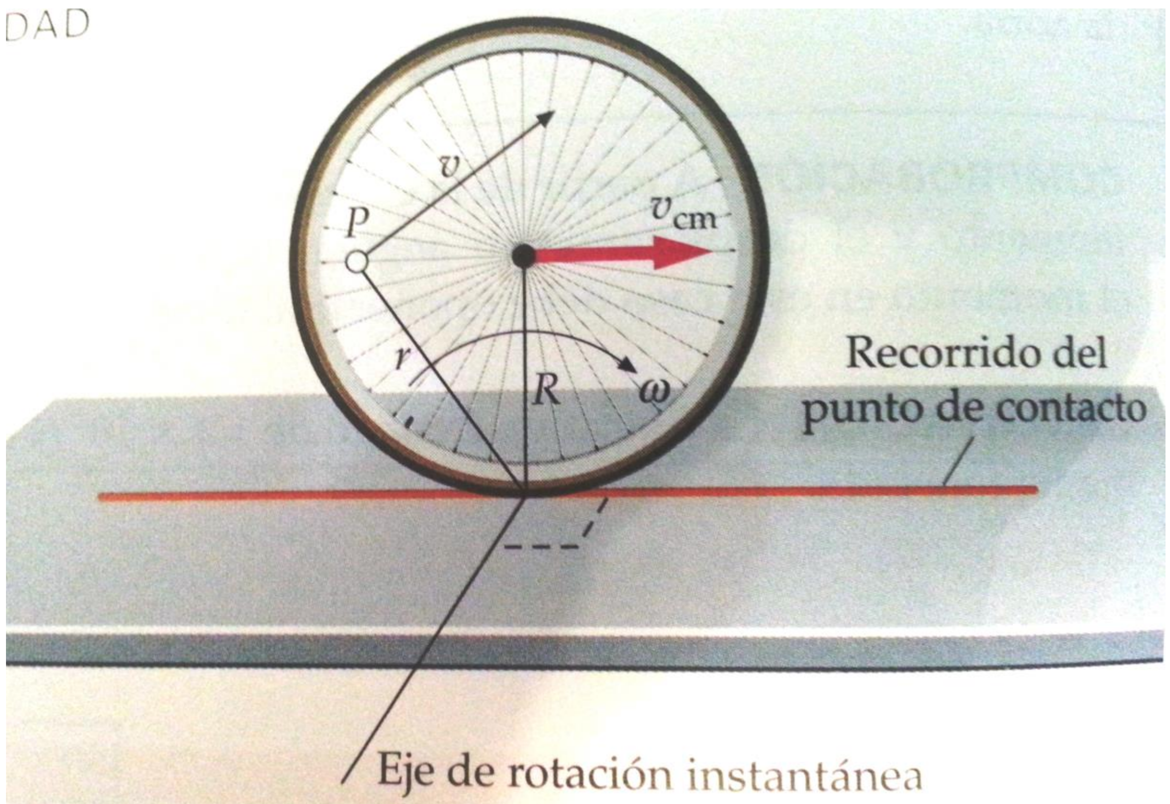
$$I = \frac{2}{5}MR^2 + M\,(l+R)^2$$

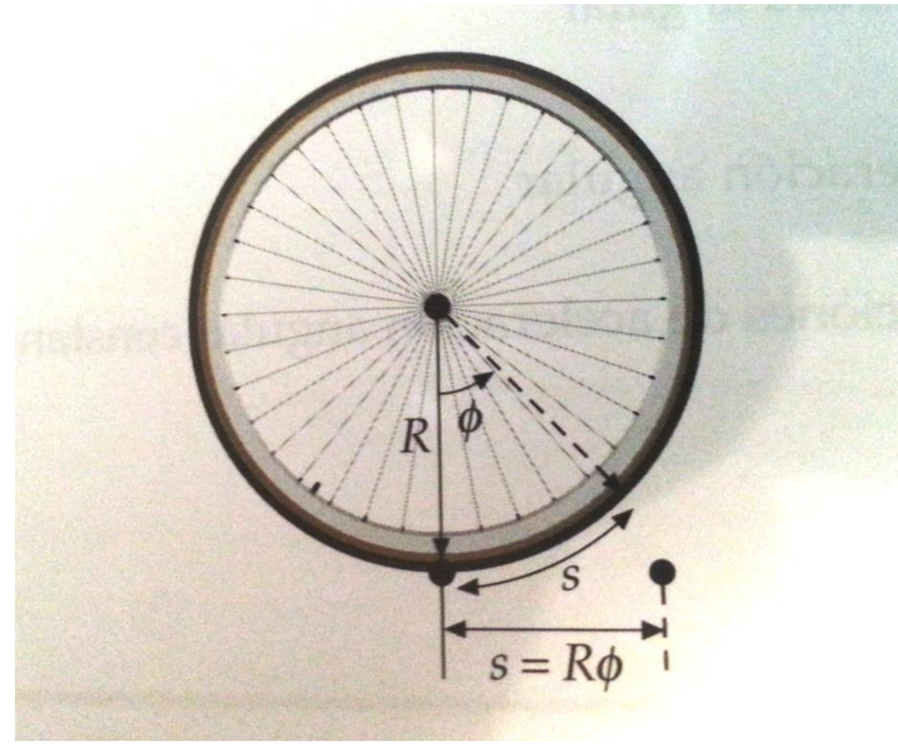
$$I = \frac{2}{5}MR^2 + M\,(l+R)^2$$

Si $R \ll l$

$$I \approx \frac{2}{5}MR^2 + M\,l^2$$

Rodamiento sin Deslizamiento





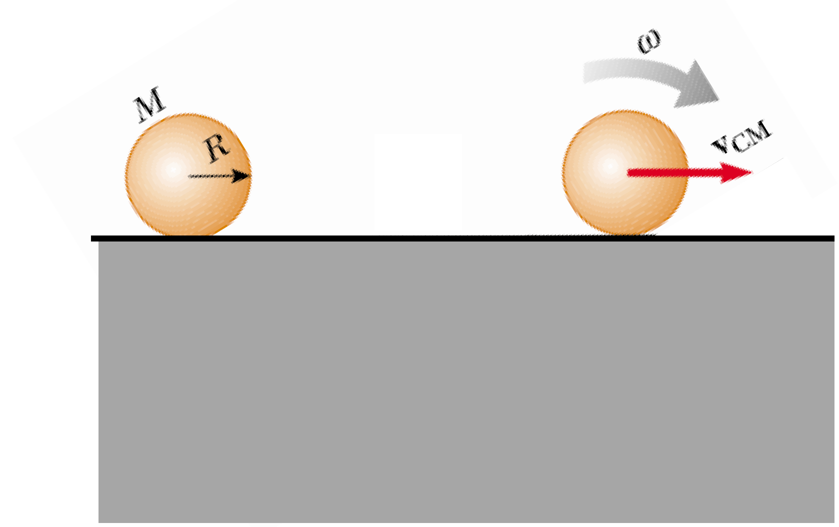
$$s = R\,\theta$$

$$v = R\,\omega$$

$$a = R\,\alpha$$

Cuánto vale la E_C de un objeto que rueda sin deslizar?

La energía cinética total de un cuerpo que rota es la suma de la energía cinética rotación y la energía cinética traslacional del centro de masas



$$E_C = E_{C\_Traslacion} + E_{C\_rotacion}$$

Del Centro de Masas

Respecto de un eje que pase por el Centro de Masas

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Además tenemos la relación entre ambos términos

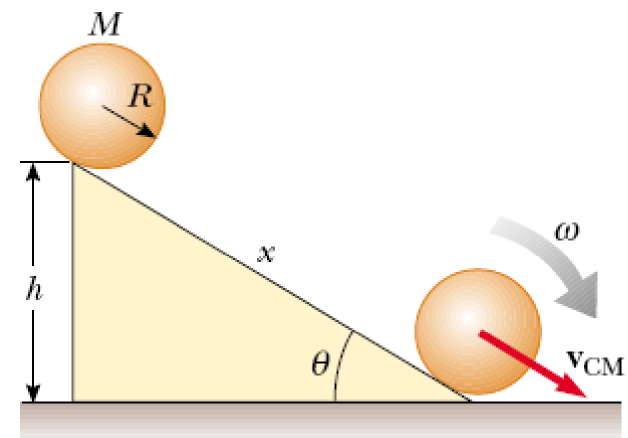
$$v_{CM} = \mathrm{R}\,\omega$$

Cuánto vale la E_C de un objeto que rueda sin deslizar?

La energía cinética total de un cuerpo que rota es la suma de la energía cinética de rotación y la energía cinética traslacional del centro de masas

$$E_M = E_C + E_P$$

$$E_M = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + M\, g\, h$$



Si las fuerzas que actúan sobre un sistema son conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva (es una constante)

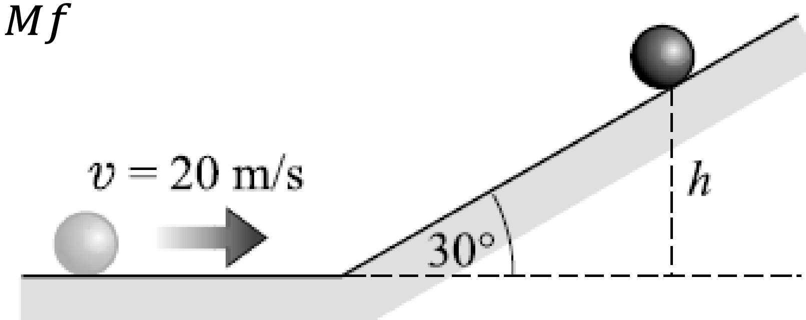
$$E_M = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + M\, g\, h = constante$$

h es la altura de qué?

Como se muestra en la figura, una esfera sólida uniforme rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s y luego rueda hacia arriba sobre un plano inclinado. Si las pérdidas debidas a la fricción son despreciables, ¿cuál será el valor de *h* en el lugar donde se detiene la esfera?

$$E_M = E_C + E_P$$

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$



$$E_M = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + M\ g\ h$$

$$E_{Mi} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + 0$$

$$E_{Mf} = 0 + 0 + Mgh$$

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = Mgh$$

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mr^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{r}\right)^2 = Mgh$$

$$\frac{1}{2}v_{CM}^2 + \frac{1}{5}v_{CM}^2 = gh$$

$$\boxed{h = \frac{7}{10}\frac{1}{g}\ v_{CM}^2}$$

$$h = 28\ m$$

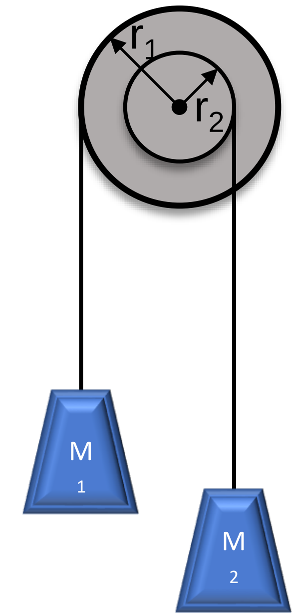
- ✓ Unidades?
- ✓ Extremos?

$$h = \frac{1}{\frac{m}{s^2}}\frac{m^2}{s} = \frac{m}{s}$$

$m_1 = 20$ kg $r_1 = 20$ cm $M_1 = 2$ kg

$m_2 = 30$ kg $r_2 = 50$ cm $M_2 = 1$ kg

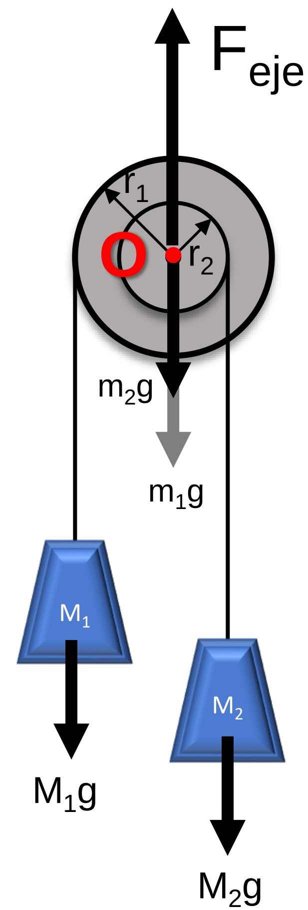
α?



m_1= 20 kg r_1= 20 cm M_1= 2 kg

m_2= 30 kg r_2= 50 cm M_2= 1 kg

α?



m_1= 20 kg r_1= 20 cm M_1= 2 kg

m_2= 30 kg r_2= 50 cm M_2= 1 kg

α?

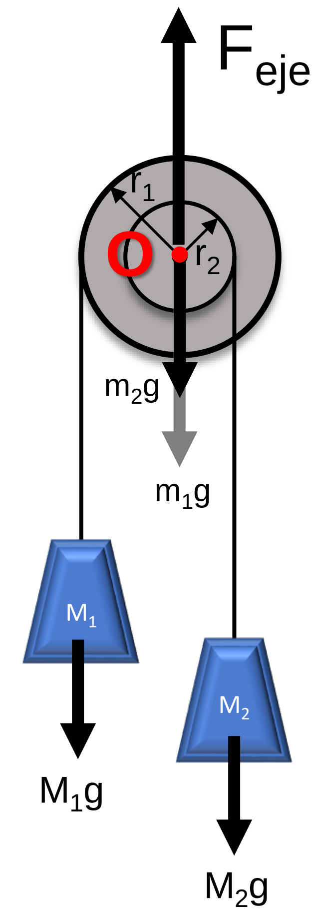
$$\sum F_x = 0$$

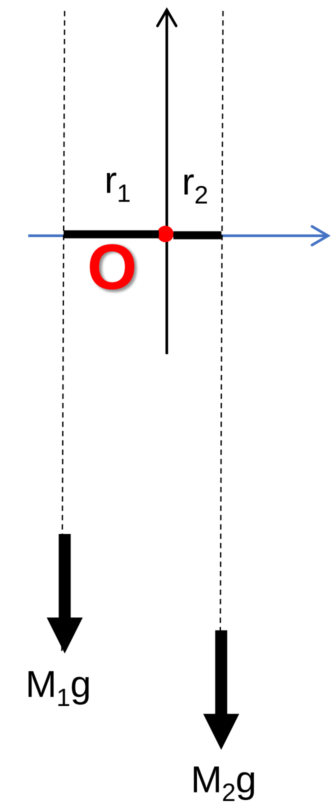
$$\sum F_y = F_{eje} - m_1 g - m_2 g - M_1 g - M_2 g = 0$$

$$\sum_{O} \tau_z = \cancel{\tau_{z_{eje}}} + \cancel{\tau_{p_1}} - \cancel{\tau_{p_2}} + \tau_1 - \tau_2 = I\alpha$$

$$\sum \tau_z = +\tau_1 - \tau_2 = I\alpha$$

$$\sum \tau_z = +M_1 g r_1 - M_2 g r_2 = I\alpha$$





m_1= 20 kg r_1= 20 cm M_1= 2 kg

m_2= 30 kg r_2= 50 cm M_2= 1 kg

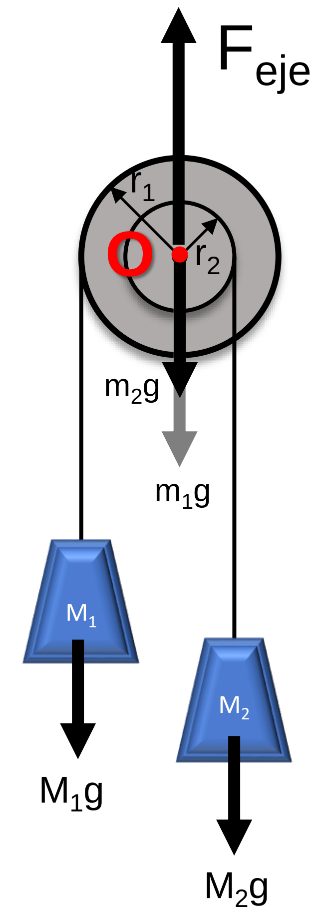
α?

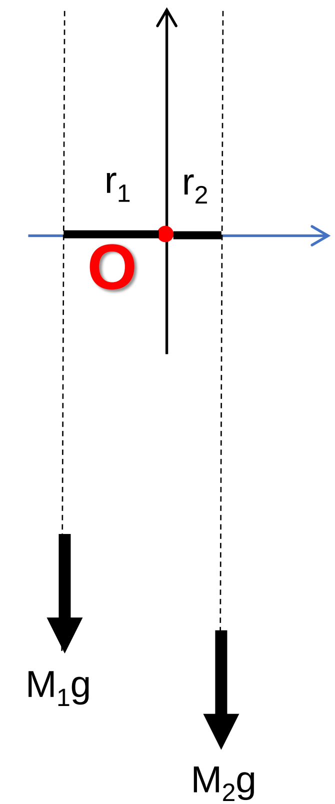
$$I_z = \frac{1}{2}M_1r_1^2 + \frac{1}{2}M_2r_2^2$$

$$\sum \tau_z = +M_1gr_1 - M_2gr_2 = \left[\frac{1}{2}M_1r_1^2 + \frac{1}{2}M_2r_2^2\right]\alpha$$

$$\frac{+M_1gr_1 - M_2gr_2}{\left[\frac{1}{2}M_1r_1^2 + \frac{1}{2}M_2r_2^2\right]} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{+M_1gr_1 - M_2gr_2}{\frac{1}{2}\left[M_1r_1^2 + M_2r_2^2\right]}$$





m_1= 20 kg r_1= 20 cm M_1= 2 kg

m_2= 30 kg r_2= 50 cm M_2= 1 kg

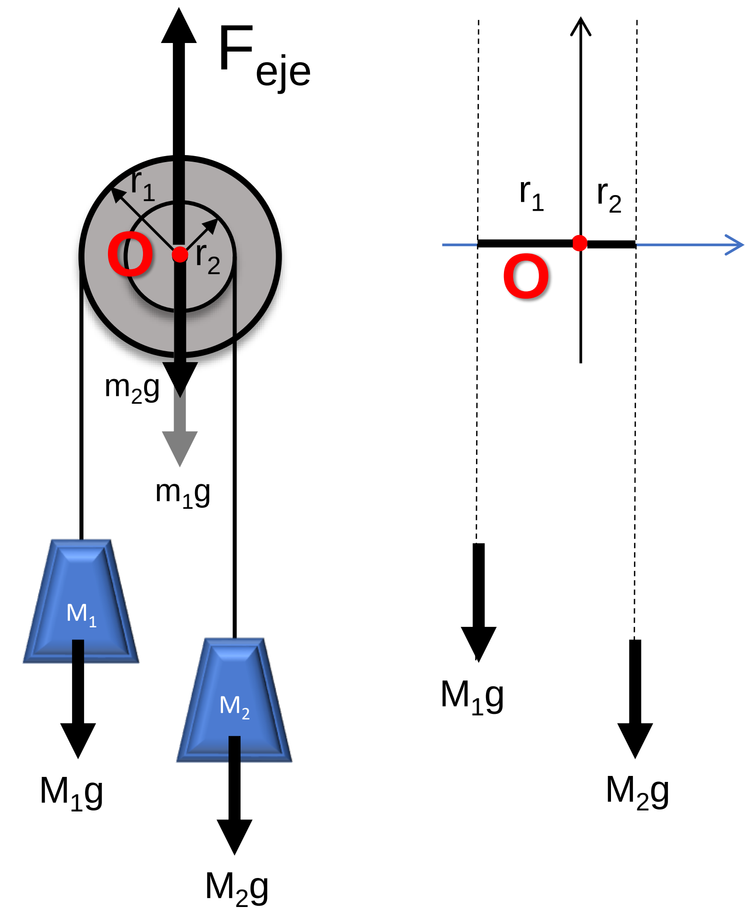
α?

$$\alpha = \frac{+M_1 g r_1 - M_2 g r_2}{\frac{1}{2}[M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2]}$$

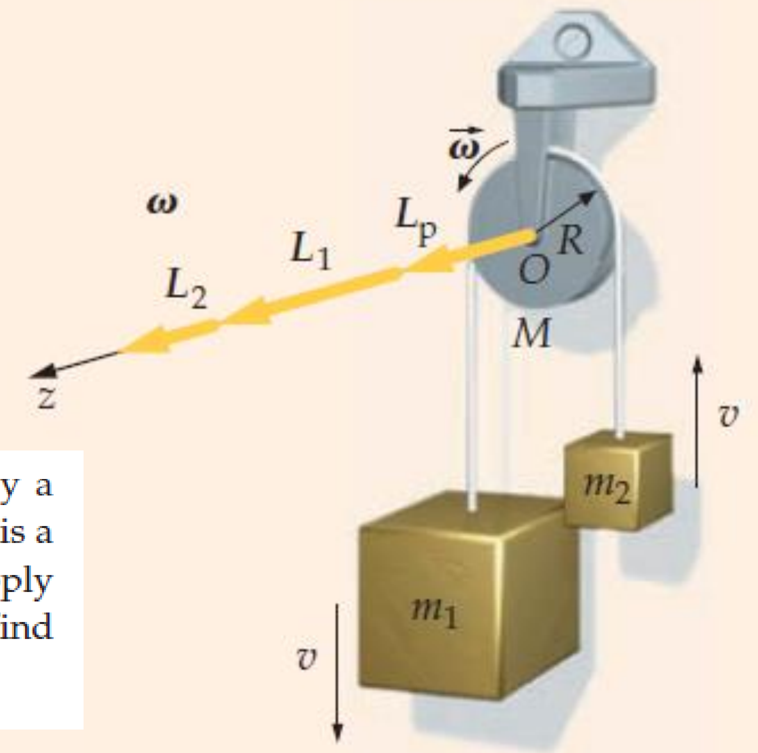
$$\alpha = \frac{+2\ kg\ 10\frac{m}{s^2}\ 0{,}2m - 3\ kg\ 10\frac{m}{s^2}\ 0{,}5m}{\frac{1}{2}[2\ kg\ 0{,}2^2 m^2 + 1\ kg\ 0{,}5^2 m^2]} =$$

$$\alpha = \frac{+4\ \ kg\frac{m^2}{s^2} - 15kg\frac{m^2}{s^2}}{\frac{1}{2}[2\ kg\ 0{,}2^2 m^2 + 1\ kg\ 0{,}5^2 m^2]} =$$

$$\alpha = \frac{-11\ kg.\frac{m^2}{s^2}}{0{,}165\ kg.m^2} = -66{,}6\frac{rad}{s^2}$$



The Atwood's Machine



An Atwood's machine has two blocks with masses m_1 and m_2 ($m_1 > m_2$) connected by a string of negligible mass that passes over a pulley with frictionless bearings. The pulley is a uniform disk of mass M and radius R. The string does not slip on the pulley. Apply Equation 10-16 to the system consisting of the two blocks, the string, and the pulley, to find the angular acceleration of the pulley and the linear acceleration of the blocks.

PICTURE Let the pulley and blocks be centered in the xy plane with the z axis out of the page and through the center of the pulley at point O, as shown in Figure 10-19. We compute the torques and angular momenta about the z axis and apply Newton's second law for angular motion (Equation 10-10). Because m_1 is greater than m_2, the disk will rotate counterclockwise, which means $\vec{\omega}$ is directed in the $+z$ direction. All the forces are in the xy plane, so all torques are parallel to the z axis. Also, all the velocities are in the xy plane, so all the angular-momentum vectors are also parallel with the z axis. Because the torque, angular velocity, and angular-momentum vectors are all parallel with the z axis, we can treat this as a one-dimensional problem with positive assigned to counterclockwise motion and negative to clockwise motion. The acceleration a of the blocks is related to the angular acceleration α of the pulley by the nonslip condition $a = R\alpha$.

The Atwood's Machine

SOLVE

1. Let the system be everything that moves. Draw a free-body diagram of the system (Figure 10-20). The only thing touching the system is the pulley bearings. The external forces on the system are the normal force of the pulley bearings on the pulley and the gravity forces on the two blocks and the pulley:

2. Express Newton's second law for rotation, z components only (Equation 10-16):

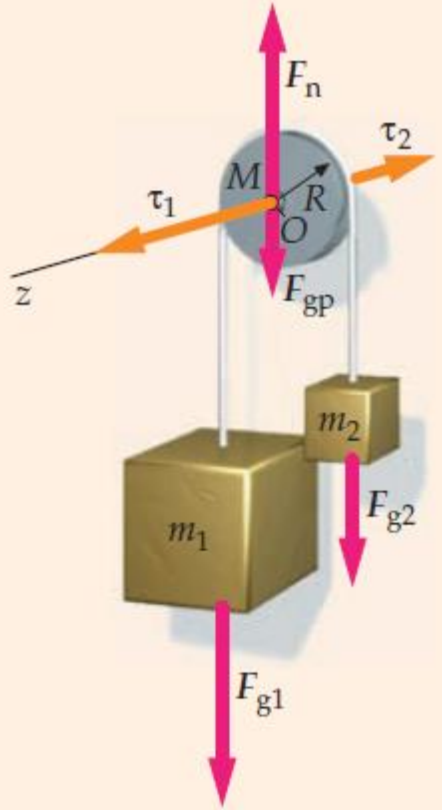
$$\sum \tau_{\text{ext}\,z} = \frac{dL_z}{dt}$$

3. The total external torque about the z axis is the sum of the torques exerted by the external forces. The moment arms for F_{g1} and F_{g2} each equal R. (The moment arms of F_n and F_{gp} each equal zero.) $F_{g1} = m_1 g$ and $F_{g2} = m_2 g$:

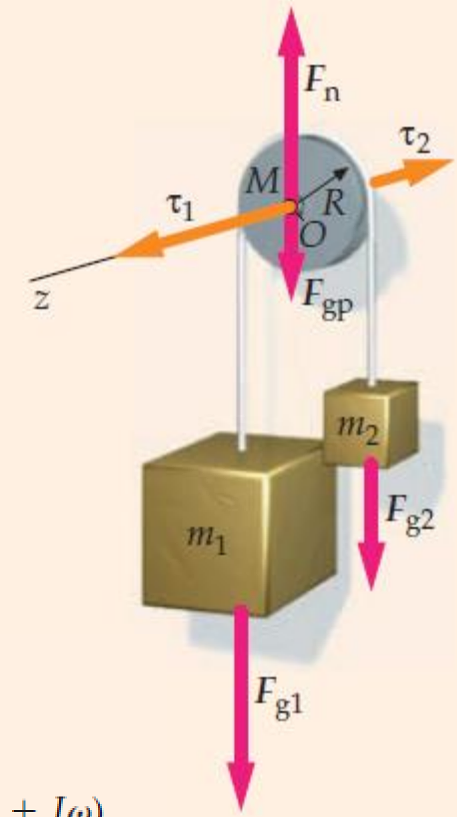
$$\sum \tau_{i\,\text{ext}\,z} = \tau_n + \tau_{gp} + \tau_{g1} + \tau_{g2}$$
$$= 0 + 0 + m_1 gR - m_2 gR$$

4. The total angular momentum about the z axis equals the angular momentum of the pulley, $\vec{L}_p$, plus the angular momenta of block 1, $\vec{L}_1$, and block 2, $\vec{L}_2$, each in the positive z direction. The pulley has spin angular momentum, but no orbital angular momentum because its center of mass is at rest. Each block has orbital angular momentum, but no spin angular momentum.

$$L_z = L_1 + L_2 + L_p$$
$$= m_1 vR + m_2 vR + I\omega$$



The Atwood's Machine



5. Substitute these results into Newton's second law for rotation in step 2:

$$\sum \tau_{\text{ext}\,z} = \frac{dL_z}{dt}$$

$$m_1 gR - m_2 gR = \frac{d}{dt}(m_1 vR + m_2 vR + I\omega)$$

$$m_1 gR - m_2 gR = (m_1 + m_2)Ra + I\alpha$$

6. Relate I to M and R, and use the nonslip condition to relate α to a and solve for both a and α:

$$m_1 gR - m_2 gR = (m_1 + m_2)Ra + \tfrac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$$

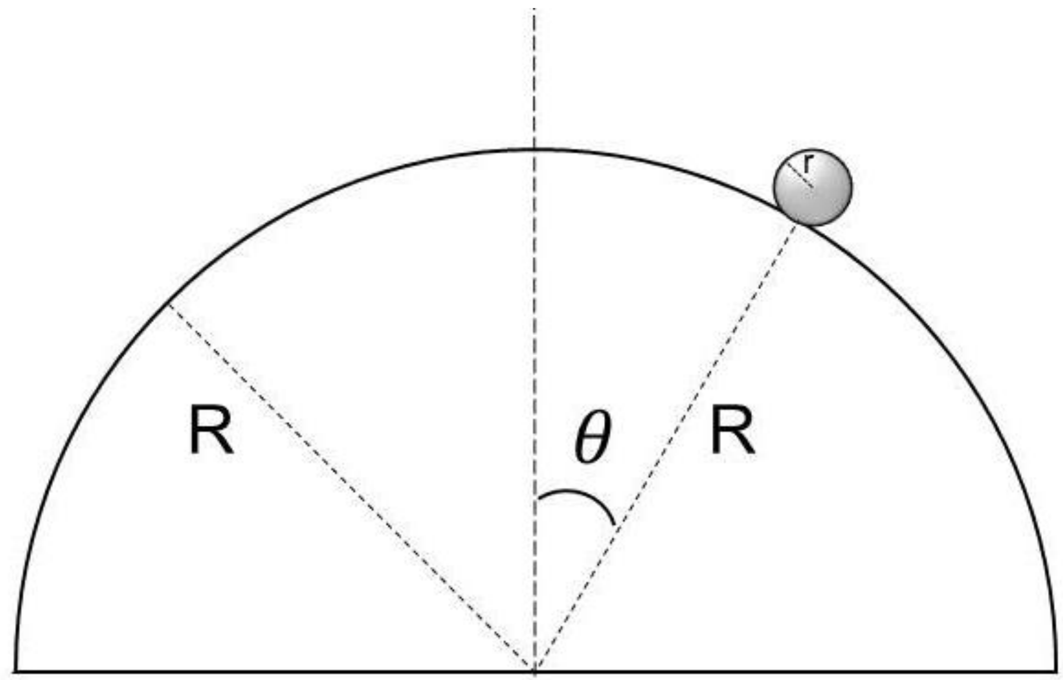
so $$a = \boxed{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g}$$

and $$\alpha = \frac{a}{R} = \boxed{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}\frac{g}{R}}$$

REPASO

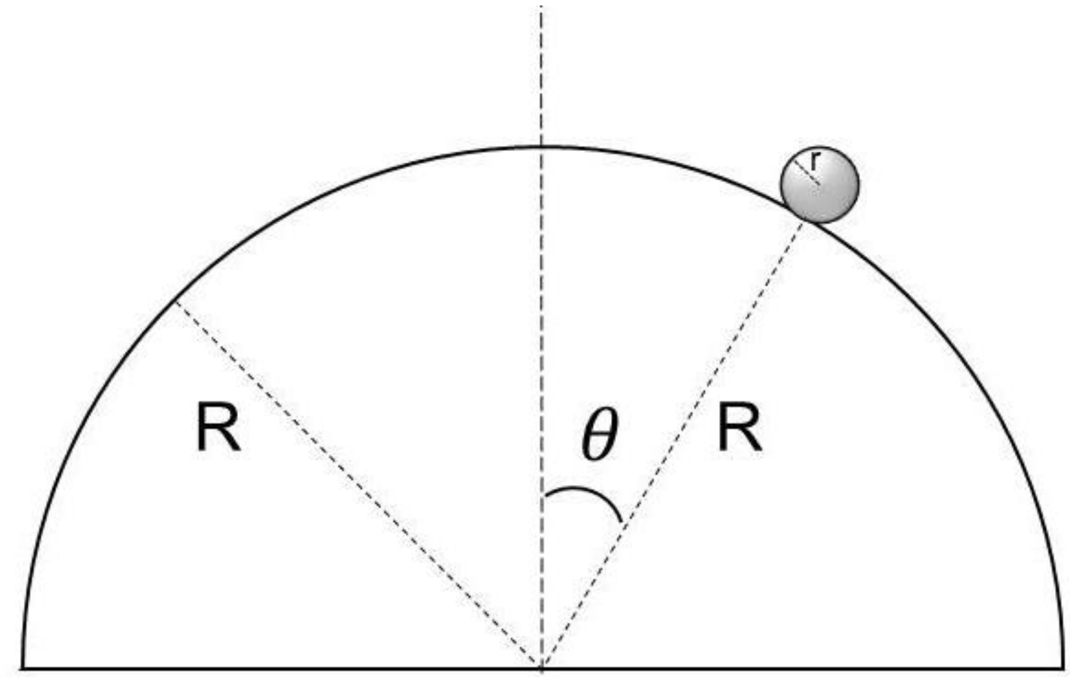

FOR THE EXAM PERIOD IS DARK
AND FULL OF TERRORS
makeameme.org

Una bolita, inicialmente en reposo en el punto más alto de una gran esfera fija, comienza a rodar sin deslizamiento por la superficie de la esfera. Determinar el ángulo desde el polo de la esfera hasta el punto donde la bolita pierde el contacto con aquella.



https://personales.unican.es/junqueraj/JavierJunquera_files/Fisica-1/solido_rigido.pdf

$$\left.\begin{array}{c} E_{arriba} = mg(R+r) \\ E_{abajo} = mg(R+r)\cos\theta + \frac{1}{2}mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I_{C.M.}\omega^2 \\ I_{C.M.} = \frac{2}{5}mr^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_{arriba} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ v_{C.M.}^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) \end{array}$$



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roz.} = m\vec{a}_{C.M.} \quad \Rightarrow \quad mg\cos\theta - N = m\underset{normal}{a_{C.M.}} = m\frac{v_{C.M.}^2}{(R+r)} = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta)$$

La bolita se despegará de la superficie cuando $N = 0$. Si llamamos $\theta_{critico}$ al valor del ángulo en ese momento:

$$mg\cos\theta_{crítico} = \frac{10}{7}mg\left(1-\cos\theta_{crítico}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{crítico} = \frac{10}{17} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{crítico} = 54°}$$

https://personales.unican.es/junqueraj/JavierJunquera_files/Fisica-1/solido_rigido.pdf

Un hombre de 70 kg sube por una escalera de 2 m de longitud y 10 kg de peso, apoyada tal como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento entre el extremo inferior de la escalera y el suelo es 0.4.

Calcular:

A. Hallar las reacciones en los apoyos, cuando el hombre ha ascendido x=0.5 m a lo largo de la escalera

B. La máxima altura x a la que puede subir el hombre por la escalera antes de que esta comience a deslizar.

$$\sum F_{ext} = 0$$

$$\sum \tau_{ext} = 0$$

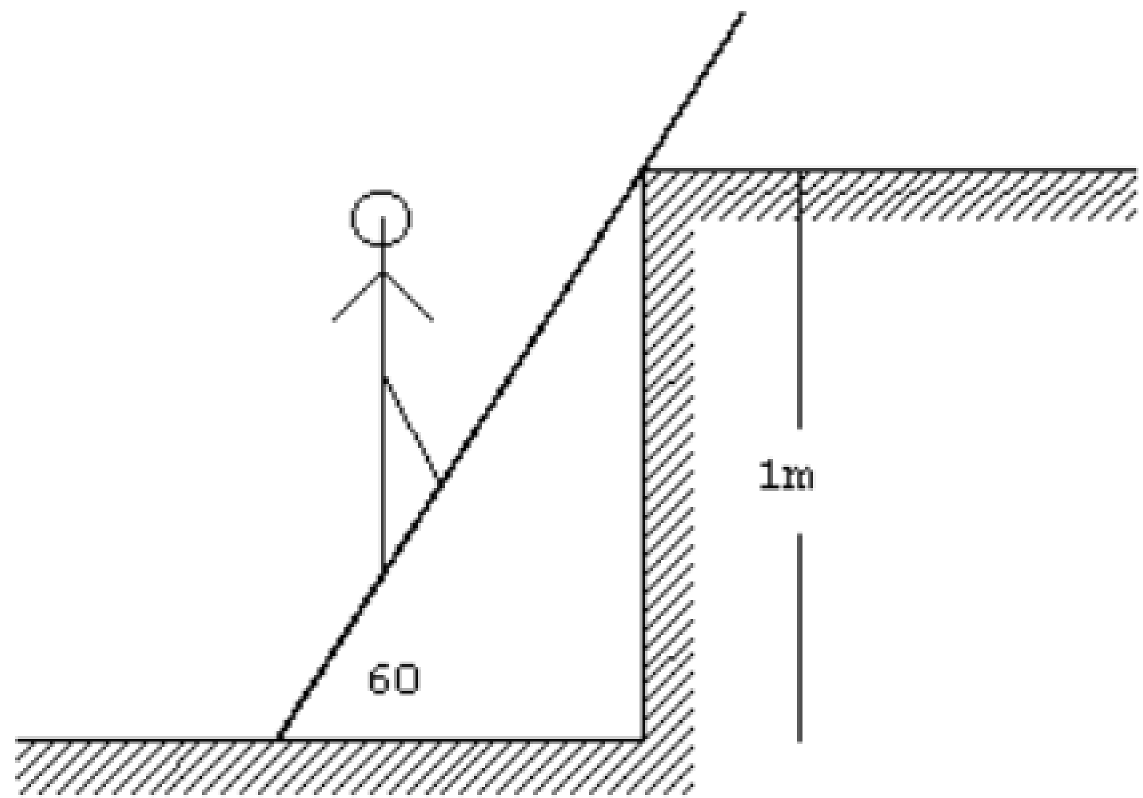
$$P_H = 700\ N$$

$$P_H = 100\ N$$

$$l = 2\ m$$

$$\mu_e = 0{,}4$$

$$x = ?$$



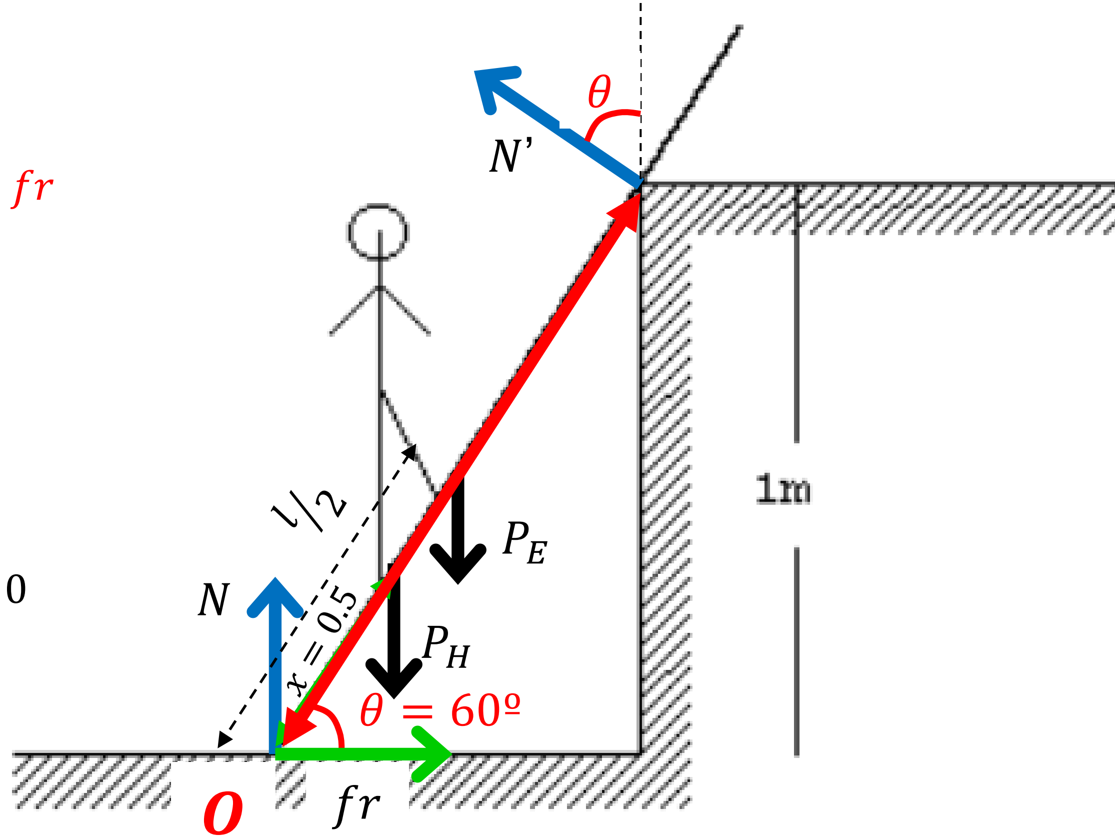
http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/problemas/solido/estatica/problemas/estatica_problemas.xhtml

$$\sum F_x = fr - N' \, sen \, \theta = 0$$

$N' \, sen \, \theta = fr$

$$\sum F_y = N + N' \cos\theta - P_H - P_E = 0$$

$$\sum \tau_{ext} = 0$$



$$\sum \tau_z = N' l' - P_H . x . cos\theta - P_E . \frac{l}{2} cos\theta + fr . 0 + N . 0 = 0$$

Cuando $x = 0.5 \, m$

$N' \, sen \, 60 = fr$ $\qquad$ $N + N' \cos 60 = 800$ N

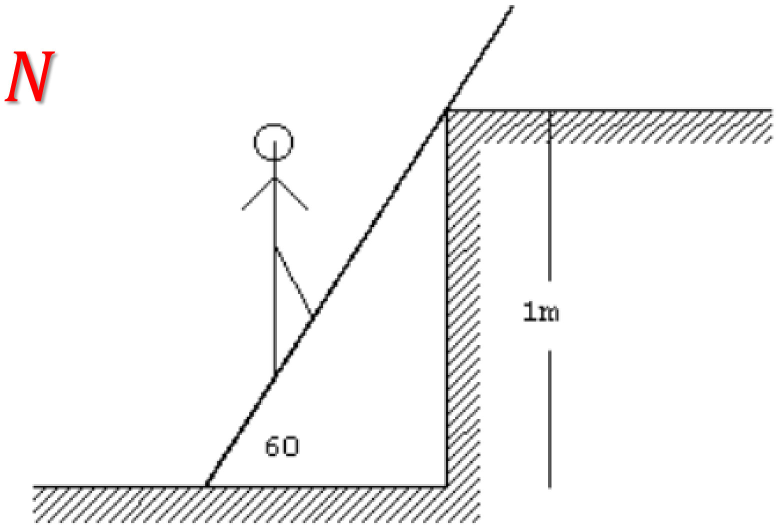
$$N' \frac{1}{sen60} = 700.0{,}5. cos60 + 100.1. cos60 = 175 + 50 = 225 \text{ N.m}$$

$N' = 194{,}9$ N $\qquad$ $fr = 168{,}8$ N $\qquad$ $N = 702{,}6$ N

http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/problemas/solido/estatica/problemas/estatica_problemas.xhtml

En el instante en que comienza a caer:

$$fr = fr_{max} = \mu_e N$$



$$\mu_e N - N' \, sen\, \theta = 0 \qquad N' \, sen\, \theta = \mu_e N$$

$$N + N' \cos\theta = P_H + P_E$$

$$\sum \tau_z = N' \frac{1}{sen\theta} - P_H . x . cos\theta - P_E . \frac{l}{2} cos\theta + fr . 0 + N . 0 = 0$$

$$N' \, sen\, 60 = \mu_e N \qquad N + N' \cos 60 = 800 \text{ N}$$

$$N' \frac{1}{sen\theta} = 700 . x . cos60 + 100.1 . cos60 = 350 . x + 50$$

$N' = 300{,}2$ N $\qquad x = 0{,}847$ m $\qquad N = 649{,}9$ N

http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/problemas/solido/estatica/problemas/estatica_problemas.xhtml

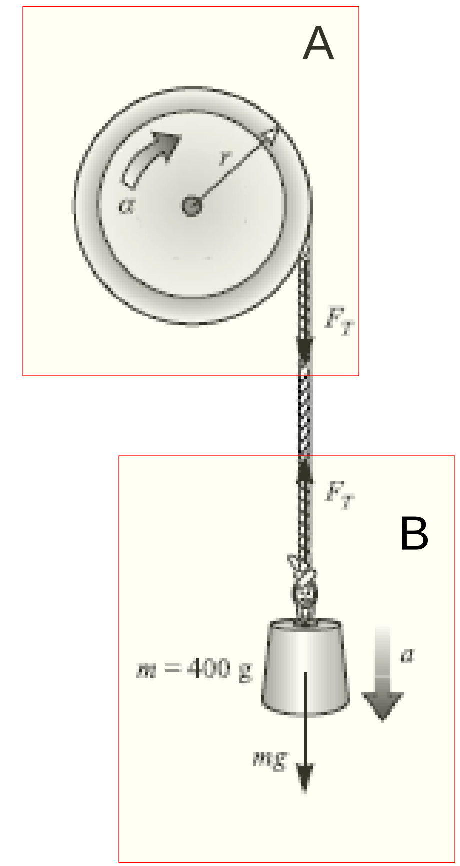
Como muestra la figura, una masa $m = \ 400\ g$ cuelga del borde de una rueda de radio $r = 15\ cm$. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2.0 m en 6.5 s. Determine el momento de inercia de la rueda.

$$I \ =?$$

$$\sum F_{ext} = Ma$$

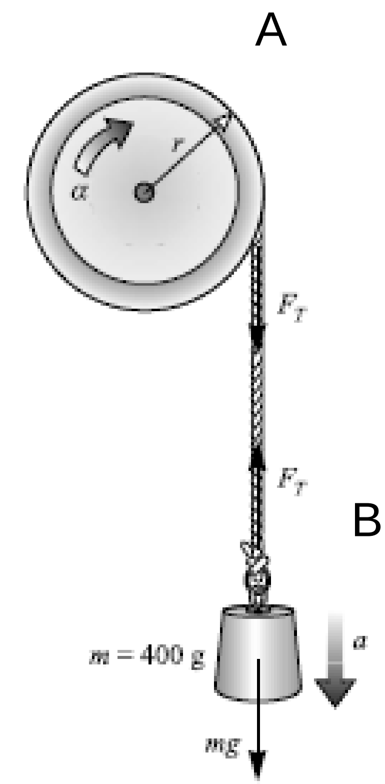
$$\sum \tau_{ext} = I\ \alpha$$

Sistemas a elegir?



Como muestra la figura, una masa $m = 400\ g$ cuelga del borde de una rueda de radio $r = 15\ cm$. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2.0 m en 6.5 s. Determine el momento de inercia de la rueda.

$$I = ?$$



Sistema B

$$\sum F_{ext} = mg - F_T = ma$$

$$a = R\,\alpha$$

Sistema A

$$\sum \tau_{ext} = F_T R = I\alpha$$

$$F_T R = I\frac{a}{R}$$

$$mg - F_T = ma$$

$$\frac{F_T R^2}{a} = I$$

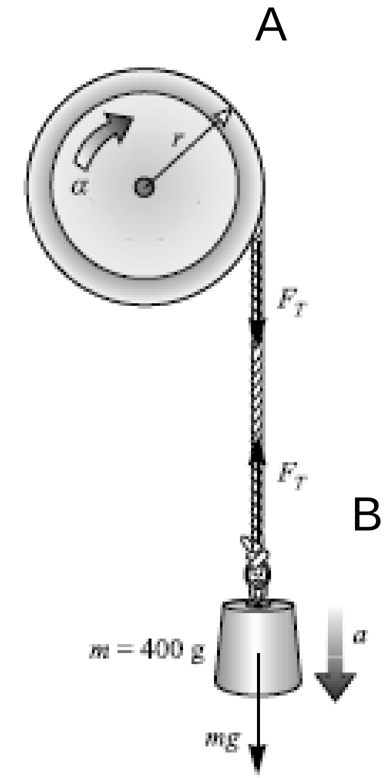
$$F_T = mg - ma$$

$$\frac{(mg - ma)R^2}{a} = I$$

$$\frac{m(g - a)R^2}{a} = I$$

Como muestra la figura, una masa $m = 400\ g$ cuelga del borde de una rueda de radio $r = 15\ cm$. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2.0 m en 6.5 s. Determine el momento de inercia de la rueda.

$$I\ =?$$



$$\frac{m(g-a)R^2}{a} = I = m\left(\frac{g}{a} - 1\right)R^2$$

$$a = R\ \alpha$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = 0 + 0 + \frac{1}{2}at^2$$

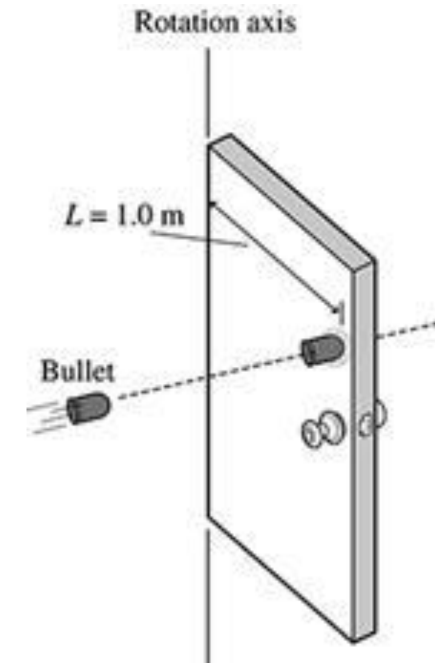
$$a = \frac{2h}{t^2}$$

$$I = m\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)R^2$$

- ✓ Unidades?
- ✓ Extremos?

$$I = 0{,}92\ kg.m^2$$

Una bala de $m = 10\ g$ que viaja a $v = 400\ m/s$ golpea una puerta de $M = 10\ kg$ y 1.0 m de ancho en el borde opuesto a la bisagra. La bala se incrusta en la puerta, lo que hace que la puerta se abra. ¿Cuál es la velocidad angular de la puerta inmediatamente después del impacto?



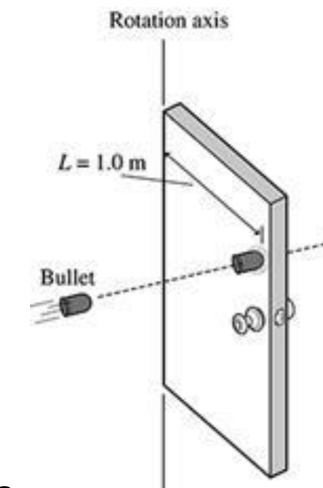
$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$$

$$L_{sist} = cte$$

$$L_{antes\ del\ choque} = L_{despues\ del\ choque}$$

$$L_i = L_f$$

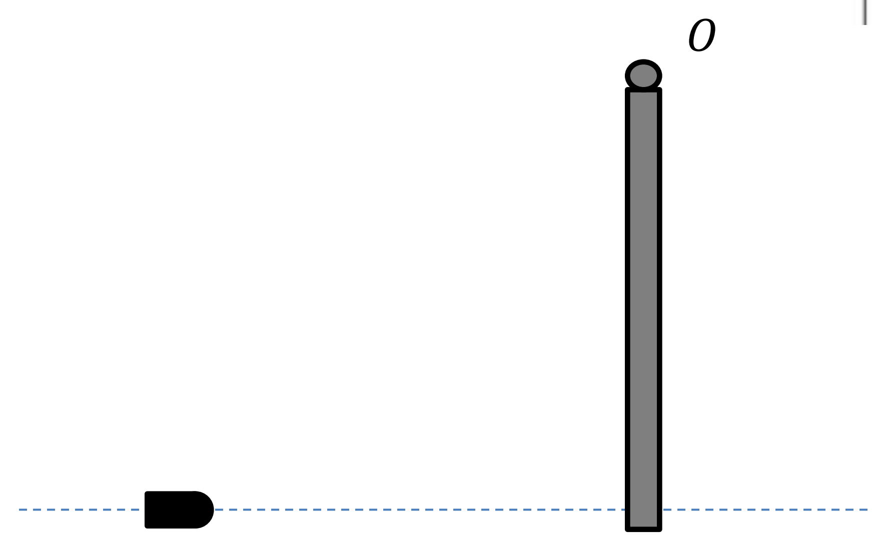
Una bala de $m = 10\ g$ que viaja a $v = 400\ m/s$ golpea una puerta de $M = 10\ kg$ y $D = 1.0\ m$ de ancho en el borde opuesto a la bisagra. La bala se incrusta en la puerta, lo que hace que la puerta se abra. ¿Cuál es la velocidad angular de la puerta inmediatamente después del impacto?



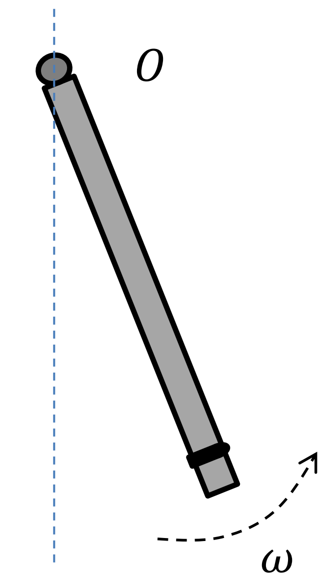
$$L_i = L_f$$

$$L_i = m_B v_B D$$

$$L_i = (0{,}01kg)(400m/s)(1{,}0m) = 4{,}0\ kg\ m^2/s$$



Una bala de $m_B = 10\ g$ que viaja a $v = 400\ m/s$ golpea una puerta de$m_P = 10\ kg$ y $D = 1.0\ m$ de ancho en el borde opuesto a la bisagra. La bala se incrusta en la puerta, lo que hace que la puerta se abra. ¿Cuál es la velocidad angular de la puerta inmediatamente después del impacto?



$$L_i = L_f$$

$$L_f = m_B v_B D + I_P \omega$$ O bien $$L_f = I_{P+B}\omega$$

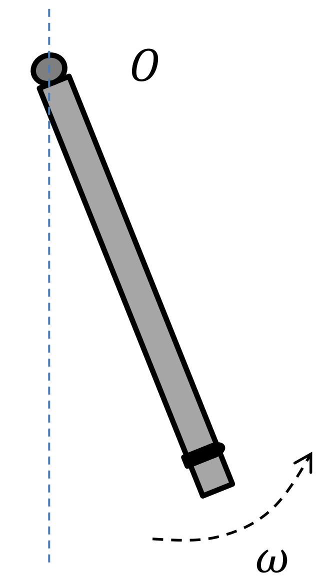
$$I_{P+B} = \frac{1}{3} m_P D^2 + m_B D^2$$

$$L_i = m_B v_B D = L_f = I_{P+B}\omega$$

$$\boxed{\frac{m_B v_B D}{I_{P+B}} = \omega}$$

- ✓ Unidades?
- ✓ Extremos?

Una bala de $m_B = 10\ g$ que viaja a $v = 400\ m/s$ golpea una puerta de$m_P = 10\ kg$ y $D = 1.0\ m$ de ancho en el borde opuesto a la bisagra. La bala se incrusta en la puerta, lo que hace que la puerta se abra. ¿Cuál es la velocidad angular de la puerta inmediatamente después del impacto?



$$I_{P+B} = \frac{1}{3}(10kg)(1{,}0m)^2 + (0{,}01kg)(1{,}0m)^2 = 3{,}343\ kg\ m^2$$

$$L_i = (0{,}01kg)(400m/s)(1{,}0m) = 4{,}0\ kg\ m^2/s$$

$$L_f = 3{,}343\ kg\ m^2\ \omega$$

$$3{,}343\ kg\ m^2\ \omega = 4{,}0\ kg\ m^2/s$$

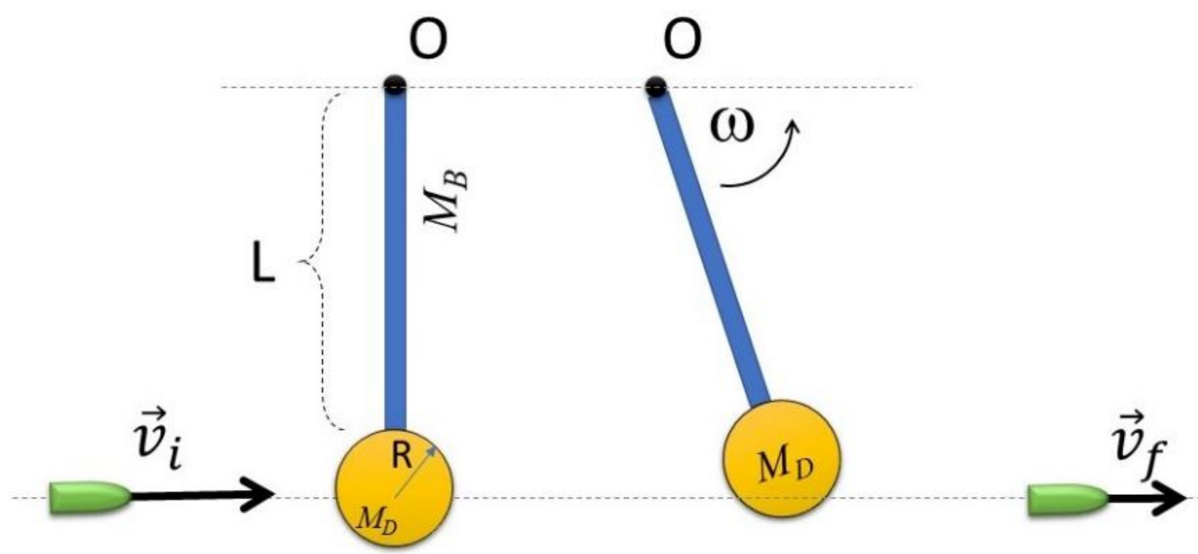
$$\omega = 1{,}20\ rad/s$$

ANEXO:
Coordenadas polares y cinemática rotacional

1. Una bala de $mb=100\ g$ que lleva una velocidad horizontal $vi=50\ m/s$ choca con el centro del cilindro de un péndulo y lo atraviesa. Después del choque la bala se mueve con una velocidad $vf=40\ m/s$. El péndulo gira alrededor del punto O y está formado por una varilla delgada de masa M_V=200 g y longitud L=20 cm, más un disco de masa M_D=500 g y radio R=5 cm. Calcular

a. el ángulo máximo con respecto a la vertical, θ_{max}, que gira el péndulo como consecuencia del choque y

b. la energía mecánica perdida en el choque.



Nuestro sistema será el péndulo (disco + barra) y la bala.

a) Momento de inercia del péndulo después del choque (disco + barra) respecto a O (usando teorema de Steiner para el Disco):

$$I_o = \left[\frac{1}{3}M_V L^2 + \frac{1}{2}M_D R^2 + M_D L^2\right] = \frac{1}{3} \times 0.2 \times 0.2^2 + \frac{1}{2} 0.5 \times 0.05^2 + 0.5 \times 0.2^2$$

$$I_o = 0.233 \text{ kg.m}^2$$

En el choque se conserva $\vec{L}$ (las fuerzas externas sobre el soporte del péndulo rompen la conservación de $\vec{P}$ pero no la de $\vec{L}$ pues no ejercen torques sobre el sistema respecto al eje de giro), entonces

$$L_i = m_b v_i (L + R)$$

$$L_f = m_b v_f (L + R) + I_o \omega$$

$$\omega = \frac{m_b (L+R)}{I_o}\left(v_i - v_f\right) = 1.07 \text{ rad/s}$$

Luego del choque el péndulo sube hasta un ángulo θ_{max} y en este proceso se conserva la energía del péndulo

$$E_{Mi} = \frac{1}{2} I_o\ \omega^2 \quad ; \qquad E_{Mf} = (M_D + M_V)g\ (x_{CM})(1 - cos\theta_{max})$$

Donde x_{CM} es el centro de masa del sistema dado por

$$x_{CM} = \frac{1}{(M_D + M_V)} \left[M_D(L + R) + \ M_V \frac{L}{2}\right] = \frac{1}{0.7}\ [0.5 \times 0.25 + \ 0.2 \times 0.1] = 0.207\ m$$

Entonces

$$\frac{1}{2} I_o\ \omega^2 = (M_D + M_V)g\ (x_{CM})(1 - cos\theta_{max})$$

$$\frac{I_o \omega^2}{2(M_D + M_V)g\ (x_{CM})} = (1 - cos\theta_{max})$$

$$\theta_{max} = arc\ cos\left(1 - \frac{I_o \omega^2}{2(M_D + M_B)g\ (x_{CM})}\right) = 24.8º$$

b) La energía del sistema perdida en el choque la calculamos a partir de las energías antes y después del choque

$$E_{Mi} = \frac{1}{2} m\, v_i^2 \quad ; \qquad E_{Mf} = \frac{1}{2} m\, v_f^2 + \frac{1}{2} I_o\, \omega^2$$

$$\Delta E_M = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2\right) + \frac{1}{2} I_o\, \omega^2 = 0.5 \times 0.1 \times (40^2 - 50^2) + 0.5 \times 0.034 \times (7.24)^2$$

$$\Delta E_M = -45 + 0.891 = -44.1\, J$$

Comparación de los movimientos lineales y movimientos rotacionales

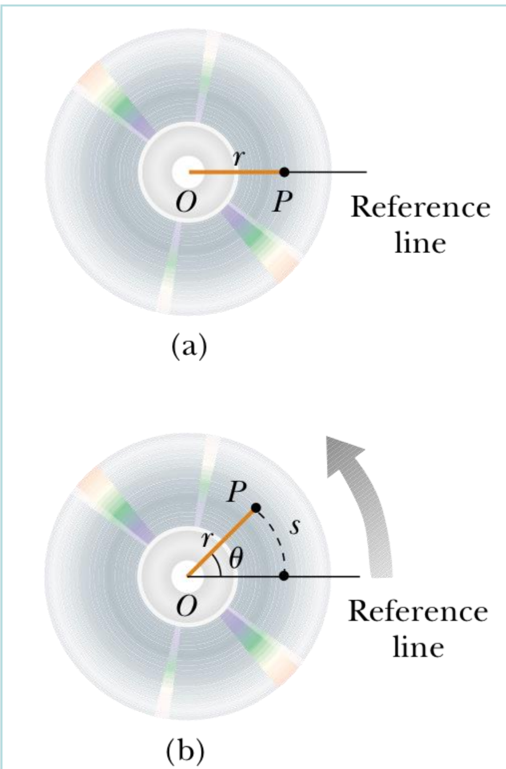
Table 8-2 Comparison of Linear Motion and Rotational Motion

Linear motion		Rotational motion	
Displacement	Δx	Angular displacement	$\Delta\theta$
Velocity	$v = \dfrac{dx}{dt}$	Angular velocity	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
Acceleration	$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$	Angular acceleration	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
Constant-acceleration equations	$v = v_0 + at$ $\Delta x = v_{av}\,\Delta t$ $v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$	Constant-angular-acceleration equations	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = \omega_{av}\,\Delta t$ $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$
Mass	m	Moment of inertia	I
Momentum	$p = mv$	Angular momentum	$L = I\omega$
Force	F	Torque	τ
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power	$P = Fv$	Power	$P = \tau\omega$
Newton's second law	$F_{net} = \dfrac{dp}{dt} = ma$	Newton's second law	$\tau_{net} = \dfrac{dL}{dt} = I\alpha$

Partícula en un movimiento de rotación.

Coordenadas polares.

Resulta conveniente representar la posición de una partícula mediantes sus coordenadas polares



Se elige como centro del sistema de coordenadas polares un punto que coinida con el centro de las trayectorias circulares de las partículas

En este sistema de referencia, la única coordenada de una determinada partícula que cambia con el tiempo es θ, permaneciendo *r* constante

A medida que un partícula del objeto se mueve a lo largo del círculo de radio r desde el eje *x* positivo (θ = 0) hasta el punto *P*, se está moviendo a lo largo de un arco de longitud s, que está relacionado con el ángulo θ por la expresión

$$s = r\theta$$

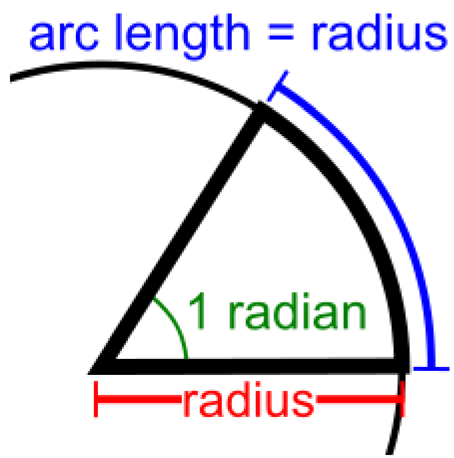
$$\theta = \frac{s}{r}$$

Partícula con movimiento circular: definición de radián

Un radián representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio.

Su símbolo es rad.

Equivalencia entre grados y radianes



Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π

Partícula con movimiento circular: definición de velocidades angulares

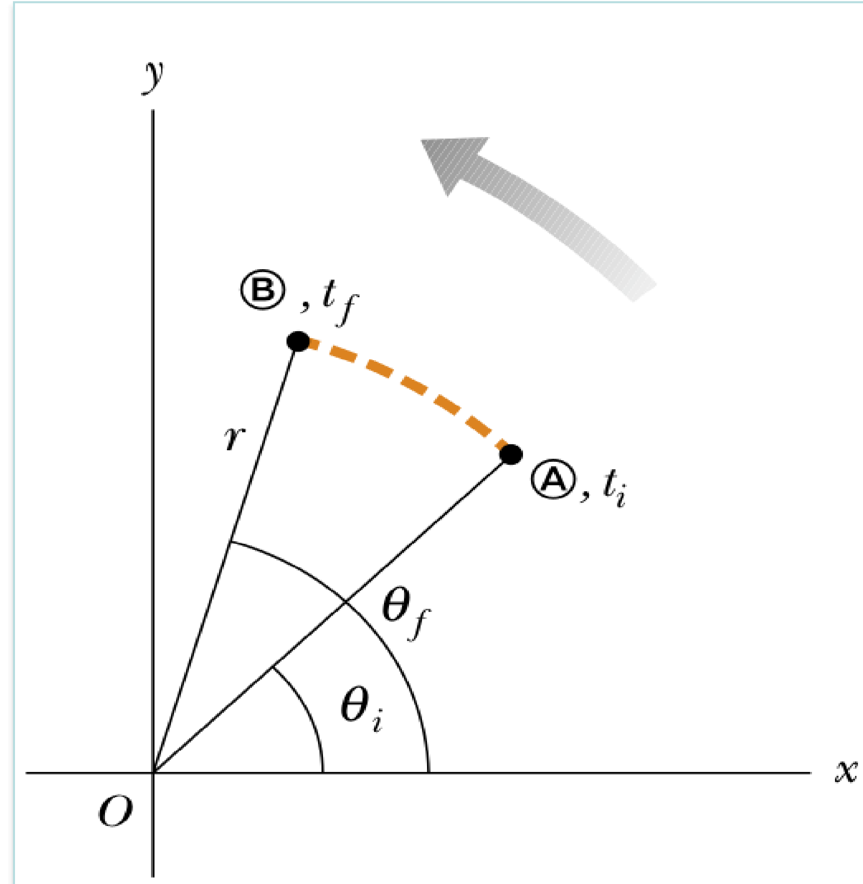
Mientras la partícula se mueve desde A hasta B en un tiempo

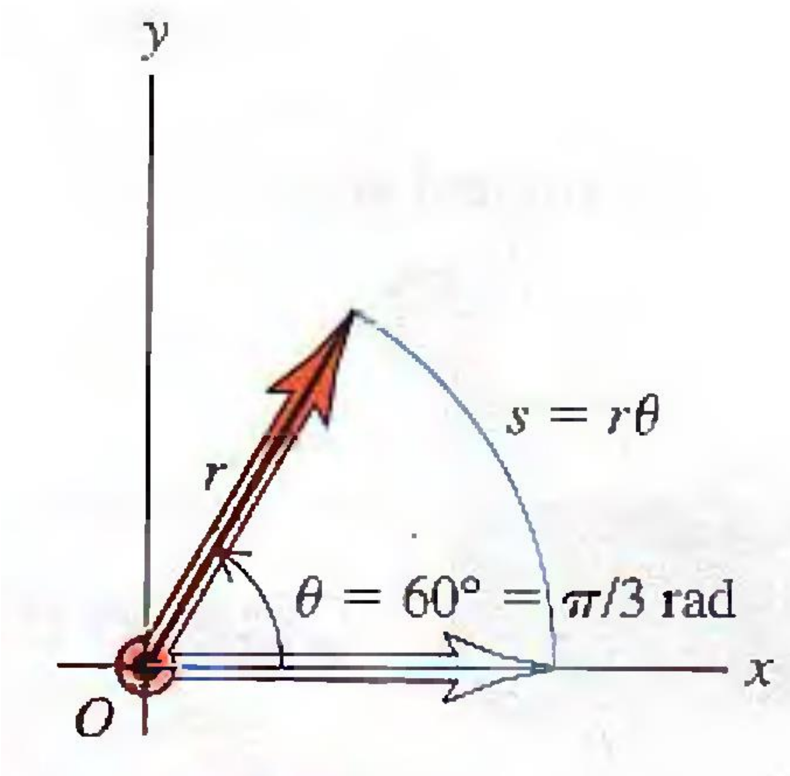
$$\Delta t = t_f - t_i,$$

el vector correspondiente al radio barre el ángulo

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

que equivale al desplazamiento angular durante ese intervalo de tiempo





$$s = r\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$s \cancel{= r}\, 60^{\circ}$$

Nah to the ah to the, no, no, no

My name is no
My sign is no
My number is no
You need to let it go
You need to let it go

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

En el caso de movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, el movimiento acelerado más simple es el movimiento bajo aceleración angular constante

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt}$$

Y además $\boxed{\omega = \omega_i \text{ en el instante } t_i = 0}$

Podemos integrar esta expresión directamente para calcular la velocidad angular final

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha dt \rightarrow \omega_f = \omega_i + \alpha\, t$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

Integrando una vez más obtenemos el ángulo en función del tiempo

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\, dt}$$

$$\boxed{\text{con } \theta = \theta_i \text{ en el instante } t_i = 0}$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_i + \alpha\, t) dt \rightarrow \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\, t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Si eliminamos el tiempo de

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Y eliminando la aceleración angular

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

PARTE II

MECÁNICA: APLICACIONES

§ 5. Oscilaciones mecánicas simples.

- Oscilaciones armónicas.
- Oscilaciones libres, amortiguadas, forzadas.
- Resonancia.

§ 6. Elasticidad.

- Tensiones y deformaciones. Ley de Hooke.
- Módulos elásticos.

§ 7. Mecánica de Fluidos.

- Introducción: fluidos ideales, conceptos básicos.
- Estática: principios de Pascal y Arquímedes.
- Dinámica: ecuación de Bernouilli y aplicaciones.