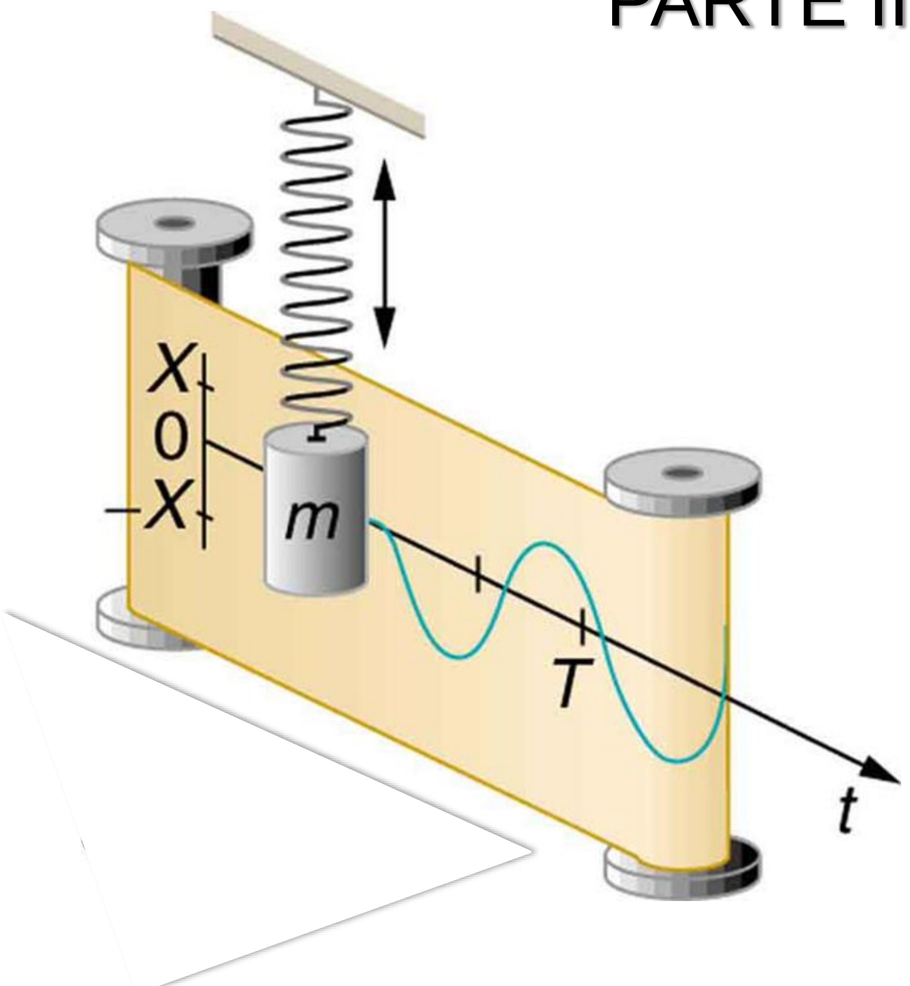
MOVIMIENTO OSCILATORIO
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

PARTE III



OSCILADOR ARMÓNICO REVISITADO

(ES LO QUE HAY)

OSCILADOR ARMÓNICO REVISITADO

Parte del material que sigue se basa en el trabajo del Ing. A. Crivillero, que se encuentra en el enlace

https://pdfslide.net/documents/serie-de-taylor-y-maclaurin-ing-antonio-crivillero.html

Supongamos que tenemos un función $f(x)$ *que puede escribirse como*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad\qquad |x-a| < R$$

Es decir, una función que sea la suma de términos con potencias de (x-a) crecientes como por ejemplo

$$f(x) = 4 + (x-3) + 5\,(x-3)^3$$

O esta otra

$$f(x) = 2 + 5\,x + 0.4\,x^2 - 12\,x^5$$

Ambos ejemplos anteriores son sumas de términos del tipo $c_n(x-a)^n$*, si buscáis con paciencia podréis encontrar los* c_n *y los* $(x-a)^n$ *para n=0, 1, 2, 3, 4 y 5 (no hay potencias mayores en los ejemplos).*

El truco es que algunos C_n *pueden ser CERO (por ej.* c_3 *y* c_4 *en el segundo ejemplo)*

Teorema: *Si* f *tiene una representación (desarrollo) en forma de serie de potencias en* a*, esto es, si*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

Podemos calcular los coeficientes por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Serie de Taylor y Maclaurin

Esto está muy bien porque nos da la 'receta' para calcular los coeficientes simplemente derivando n veces la función y dándole el valor que toma en x=a.

Y una vez hecho esto, RE-ARMAMOS la función f(x):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \quad f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

EJEMPLO 1 *– Escribe la serie de Maclaurin de la función* ***f(x) = e^x^***

SOLUCIÓN *– Si f(x) = e^x , de modo que* $f^{n}(0) = e^{0} = 1$ *para toda n.*

En consecuencia, la serie de Taylor de f en 0 (esto es, la serie de Maclaurin) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^1(x) = \frac{df(x)}{dx} = e^x$$

$$f^2(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = e^x$$

$$f^3(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = e^x$$

Etc…

$$f(x = 0) = e^0 = 1$$

$$f^1(x = 0) = e^0 = 1$$

$$f^2(x = 0) = e^0 = 1$$

$$f^3(x = 0) = e^0 = 1$$

Etc…

La conclusión a la que llegamos es que e^x tiene desarrollo en serie de potencias en el punto x=0, entonces

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Observación importante!!

No hemos dicho nada sobre los requisitos de convergencia de estas series. Estos requisitos pueden ser muy relevantes en algunos casos. En nuestras clases asumiremos que la convergencia de las series está garantizada.

Hooke's Law

$$F_x(x) = -kx$$

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \tfrac{1}{2}U''(0)x^2 + \quad .$$

$$U(\theta) = ½\, k\theta^2$$

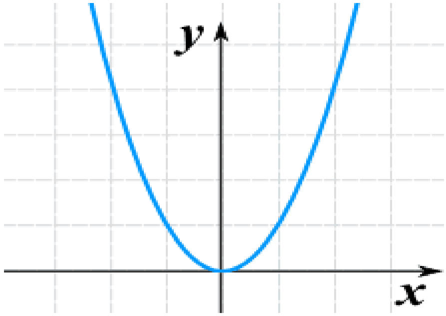
$$U(\theta) = mg[(r+b)\cos\theta + r\theta\sin\theta].$$

$$U(\theta) \approx mg[(r+b)(1-\tfrac{1}{2}\theta^2) + r\theta^2] = mg(r+b) + \tfrac{1}{2}mg(r-b)\theta^2.$$

Diagrama de Energia

Si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio, la energia potencial de un oscilador armónico simple tiene la forma

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}k\,x^2$$



Como ya vimos en Conservación de la Energía, la energía mecánica del oscilador tiene energía mecánica constante (porque la única fuerza externa F= -kx es conservativa) y vale:

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

Y cualquiera que sea la energía mecánica E de la partícula, el movimiento en x es acotado, entre –A y +A.

Diagrama de Energia

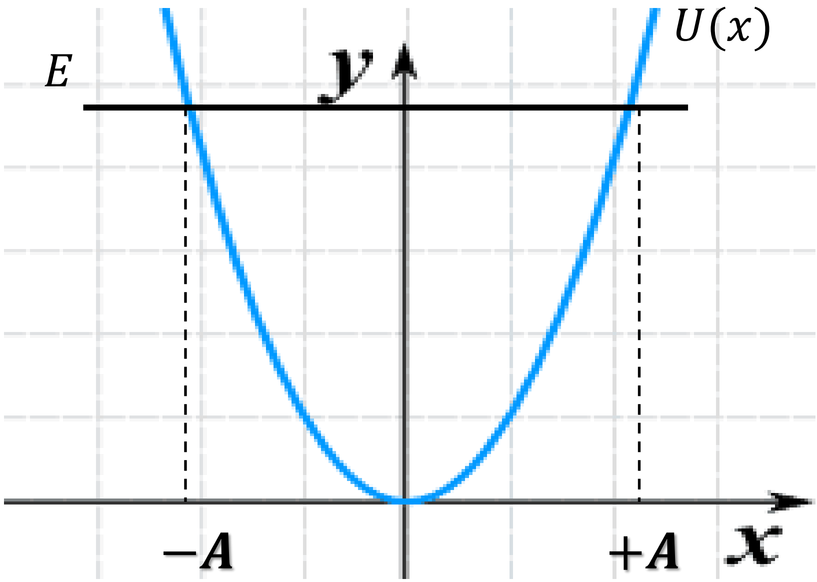
Los puntos $x = \pm A$ son puntos de retroceso, es decir.

$v = \dot{x} = 0$

entonces

$$E = \frac{1}{2} k\, x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}} = \pm\omega\sqrt{\frac{2E}{m}}$$



Es decir podemos calcular la amplitud del movimiento de un oscilador de masa m y constante k, si conocemos la energia mecánica total del sistema.

Si una masa m está sujeta a un muelle de constante k, entonces

$$F = -k(x - x_0) = -k\,\Delta x$$

Donde x_0 es la posición de equilibrio, es decir la posición donde la fuerza es F = 0. Tomemos, para simplificar las cosas, x_0=0.

El trabajo que hace dicha fuerza durante la oscilación lo podemos poner como una energía potencia. Puesto que la fuerza es conservativa:

$$W = -\Delta U$$

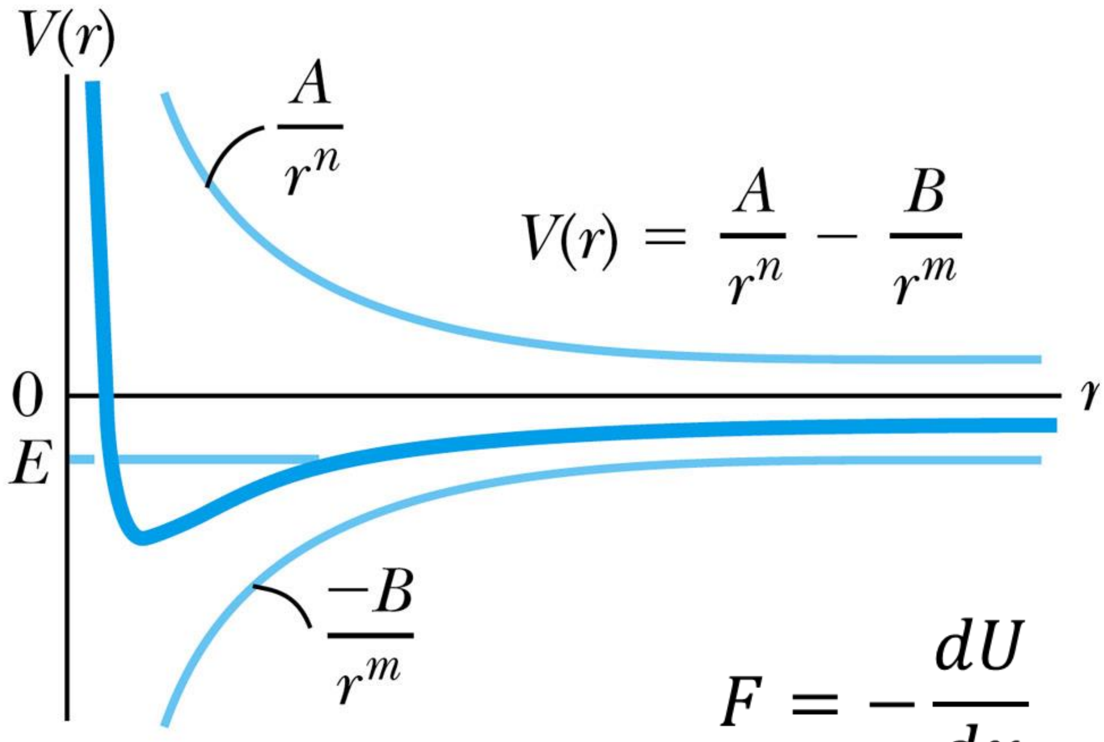
Donde la $U(x)$ es $U(x) = \frac{1}{2}k\Delta x^2$. Entonces si derivamos U(x) $\frac{dU}{dx} = k\Delta x$

$$\left.\begin{aligned} F &= -k\,\Delta x \\ \frac{dU}{dx} &= k\,\Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$$

Ejemplo: Energia potencial entre dos átomos en una molécula. La variable r es la distancia entre ambos átomos. (en una dimension, seria r = x).

$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^{6}}$$

A y *B* son positivas



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Vimos que si f(x) se puede desarrollar en serie de potencias en torno al punto x=a, esto es, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

Entonces los coeficientes están expresados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Ejercicio: Encontrar el desarrollo de Maclaurin del Potencial Lennard-Jones hasta el primer término no-nulo, alrededor de la posición del mínimo $x = a$. Analice si ese desarrollo corresponde a un oscilador armónico simple.

$$U(x) = U_0\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right]$$