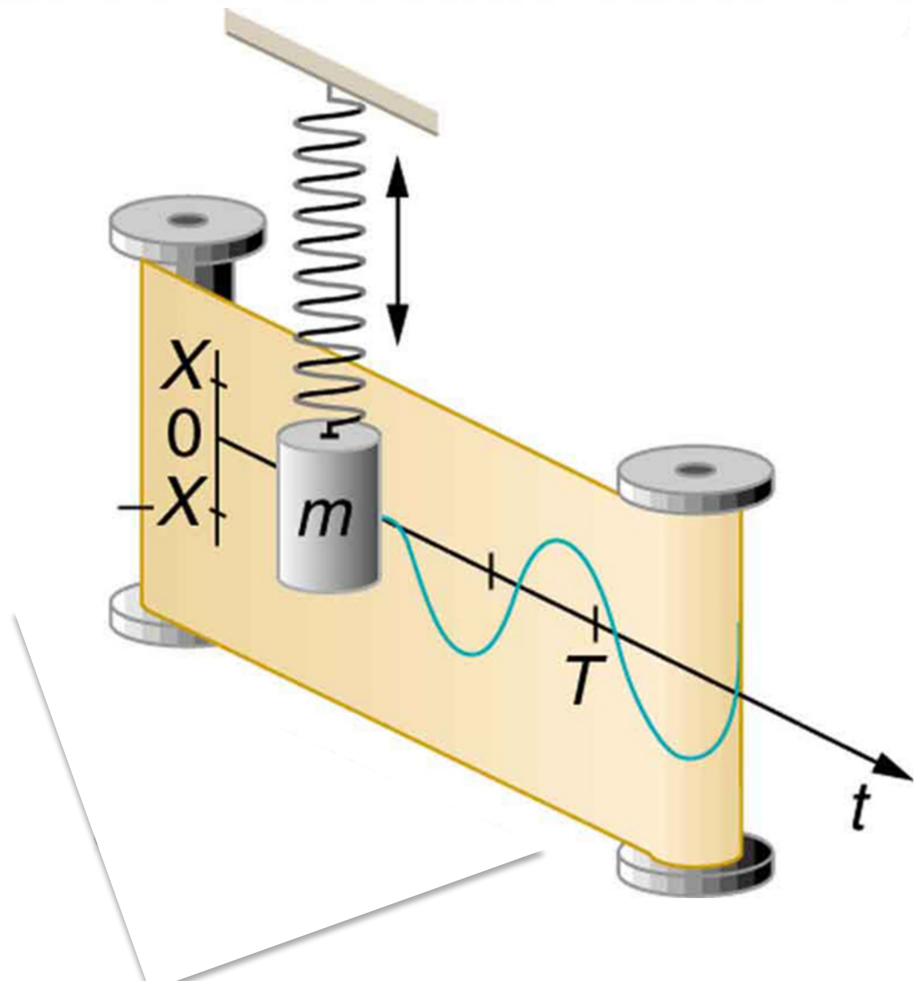
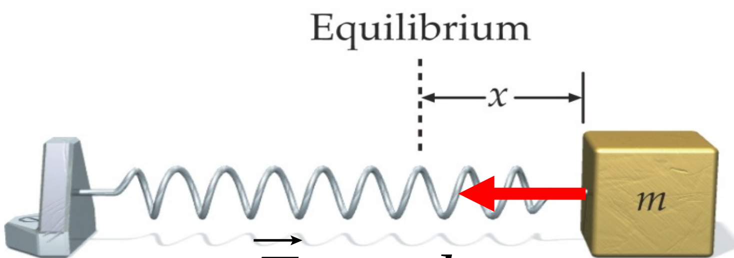
MOVIMIENTO OSCILATORIO
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

PARTE II



Un repaso



$$\vec{F} = -k\,x$$

Constante del muelle

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

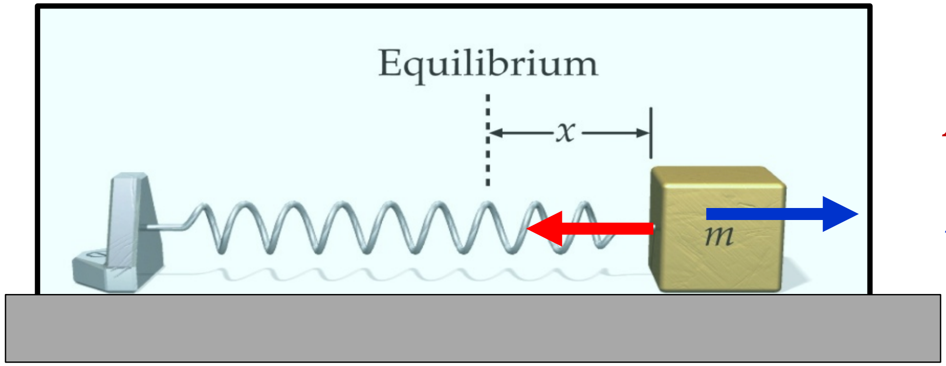
$$x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -\omega A\,sen(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A\,cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

f, frecuencia, [ciclos/s],
T período,[s]
ω, [rad/s] frecuencia angular
δ, ángulo de fase [rad]



$$F_k = -kx$$
$$F_v = -bv$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\gamma = \frac{b}{m}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = A(t)\,cos(\omega t + \phi)$$

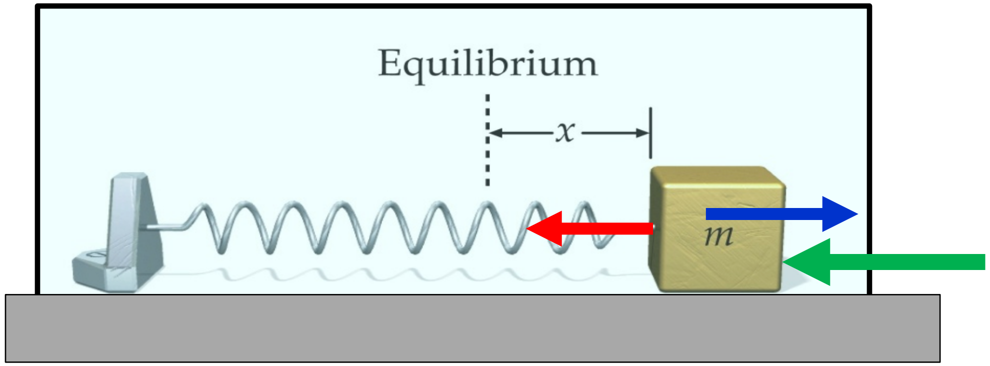
$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$v(t) = -\frac{\gamma}{2}A(t)\,cos(\omega t + \phi) - \omega A(t)\,sen(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \cdots$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$$



$$F_k = -kx$$

$$F_v = -bv$$

$$\gamma = \frac{b}{m}$$

$$F_{ext} = F_0 sen(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 sen(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\, cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 sen(\omega t)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

$$tan\phi = \frac{b\omega}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)}$$

$$v(t) = \cdots$$

$$a(t) = \cdots$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Factor de calidad Q

El *factor de calidad*, *Q*, de un oscilador mide cómo de agudo es el pico de una resonancia.
Se define, en términos de la energía como

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta E|/_{E}} \qquad\qquad Q = 2\pi \frac{\text{Energia almacenada promedio}}{\text{Energia disipada en un periodo}}$$

Ahora usamos la relación $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau}$

$$E(t) = A_0 e^{-t/\tau} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{\tau} A_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E(t)}{\tau}$$

$$\frac{dE(t)}{E(t)} = \frac{dt}{\tau} \quad \xrightarrow{aproximamos} \quad \approx \frac{\Delta E(t)}{E(t)} = \frac{\Delta t}{\tau} \quad entonces \quad \frac{\Delta E(t)}{E(t)} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0\, \tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta E|/_{E}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

21.1. Una partícula que oscila armónicamente toma 1 s para pasar por dos puntos de su trayectoria con la misma velocidad, que se encuentran separados *20 cm.* En 2 *s* más vuelve a pasar de regreso por el segundo punto. Calcular el periodo y la amplitud del movimiento.

$$T = 6s$$

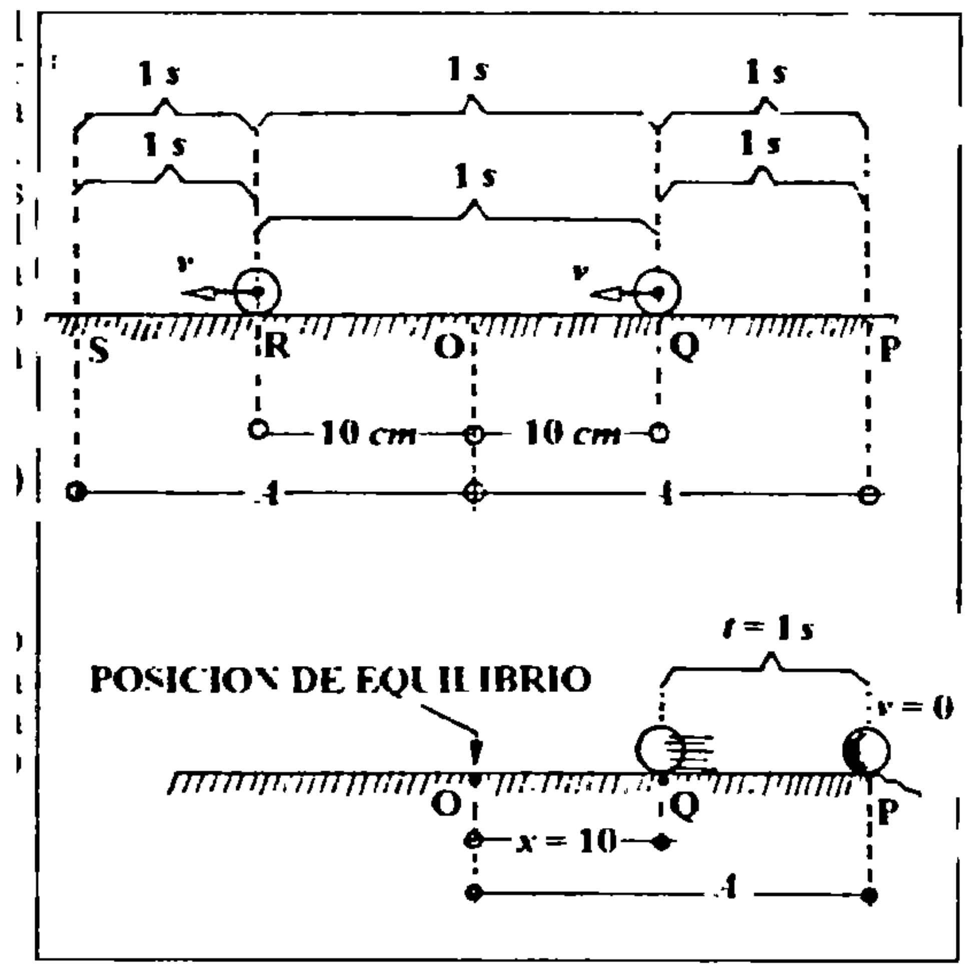
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \quad \frac{rad}{s}$$

$$x(t) = A\cos(\omega\ t)$$

$$10\ cm\ = A\cos(\pi/3\,\frac{rad}{s}.\ 1s)$$

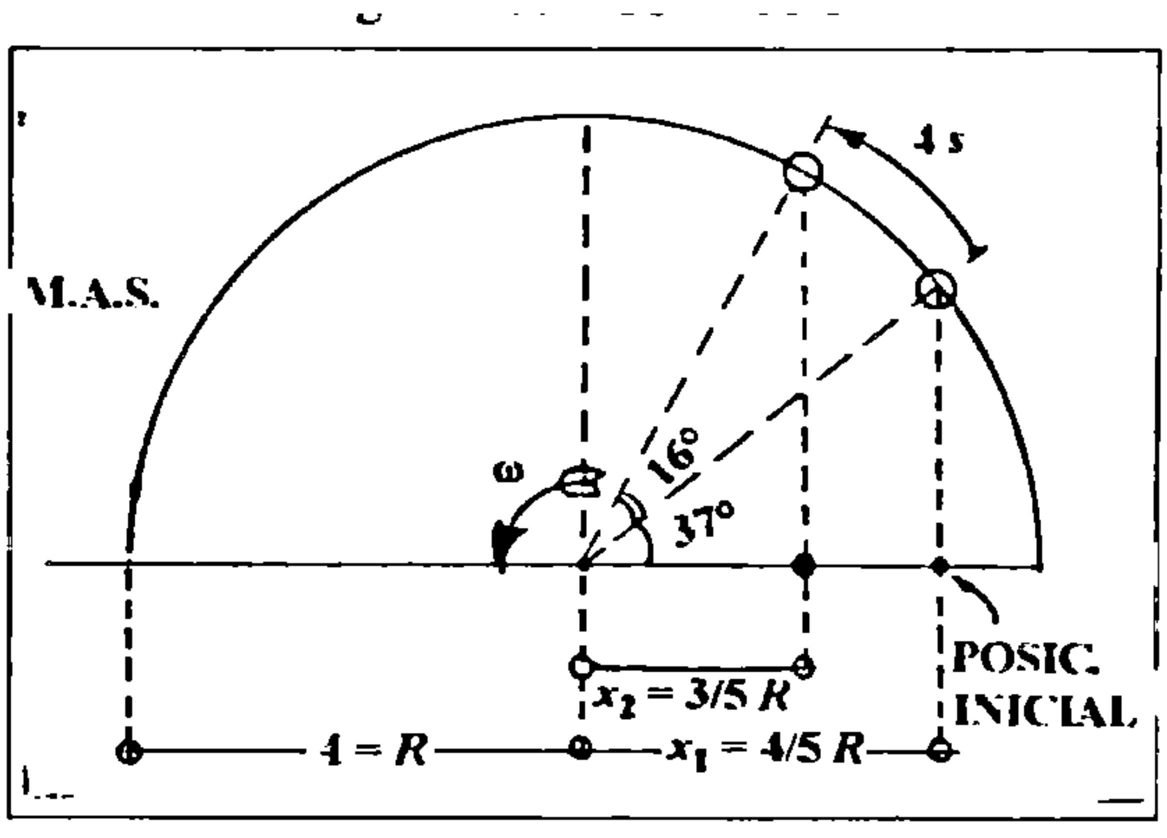
$$10\ cm\ = A\ 1/2$$

$$A = 20\ cm$$

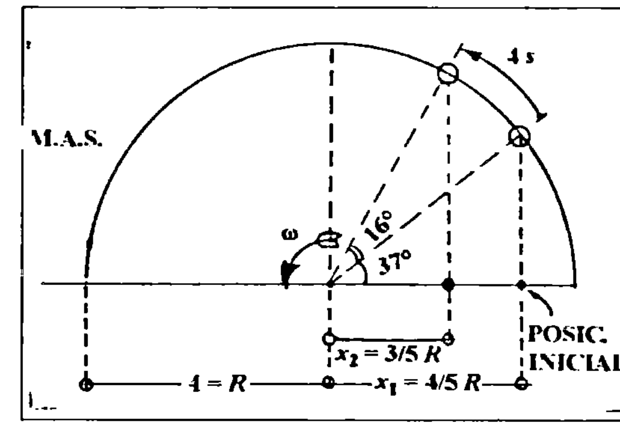


Problemas

21.2. Determinar la ecuación del movimiento de la proyección sobre un diámetro de un punto que describe una circunferencia de 35cm de radio, sabiendo que al comenzar el movimiento la proyección incide en los 4/5 del radio respecto al centro, y luego de 4s su proyección da en los 3/5 del radio. Indique también el periodo del movimiento.



21.2. Determinar la ecuación del movimiento de la proyección sobre un diámetro de un punto que describe una circunferencia de 35cm de radio, sabiendo que al comenzar el movimiento la proyección incide en los 4/5 del radio respecto al centro, y luego de 4s su proyección da en los 3/5 del radio. Indique también el periodo del movimiento.



a) t=0 s: $\boldsymbol{x1 = A\,cos\,(\omega t + \delta)}$

=> $\frac{4}{5}R = R\cos\delta \Longrightarrow \delta = 37°$ = 0.645772 rad

b) t = 4s $x2 = A\ cos\ (4.\omega + 37º)$

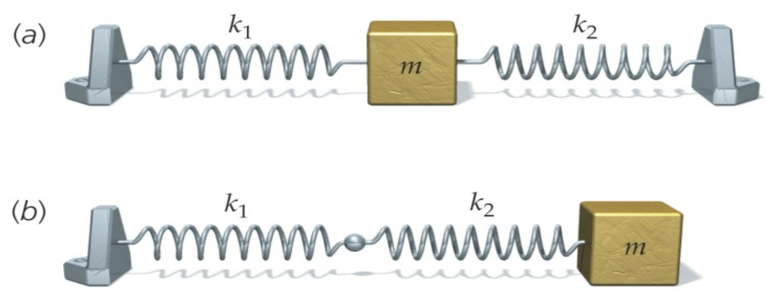
=> $\frac{3}{5}R = R\cos(4.\omega + 37º) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 4.\omega + 37º = 53º \quad \Longrightarrow \omega = 4\frac{º}{s} = \frac{\pi}{45}\ rad/s$

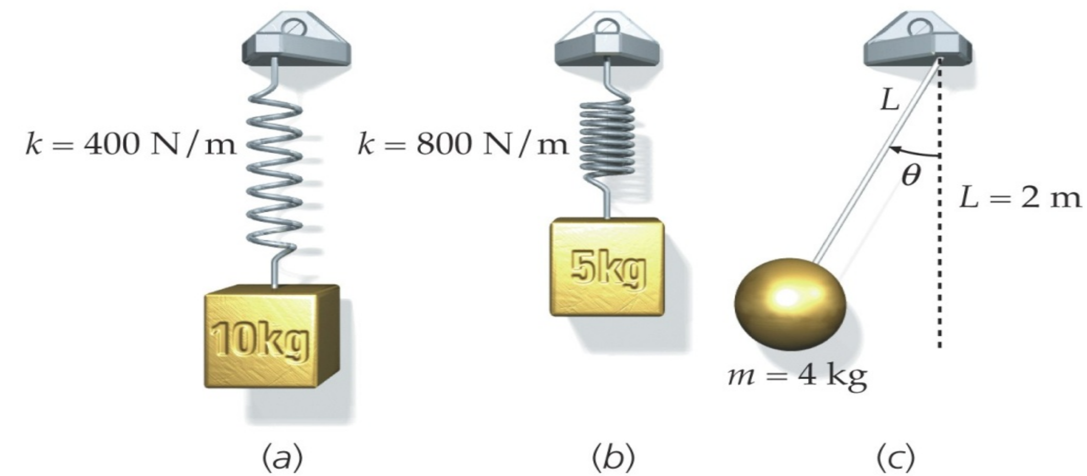
periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/45} \quad \Longrightarrow \quad T = 90\ s$

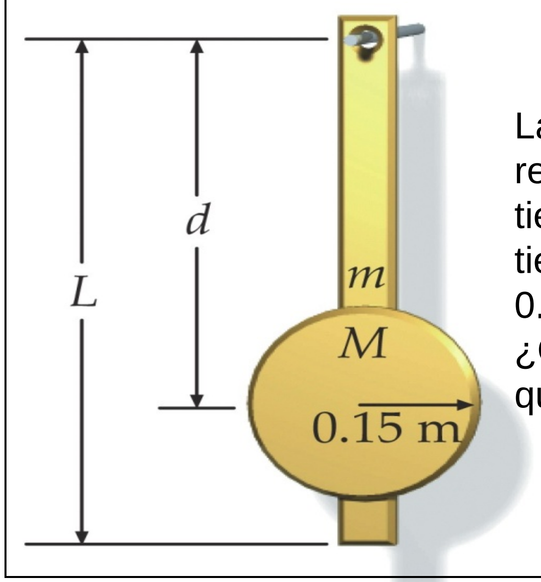
$$x_1(t) = 35\ cos\ (\frac{\pi}{45}t + 0.645772)$$

Mostrar que para las situaciones representadas, el objeto oscila (a) como si estuviera sujeto a un muelle con constante de resorte k_1+k_2, y, en el caso (b) $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$



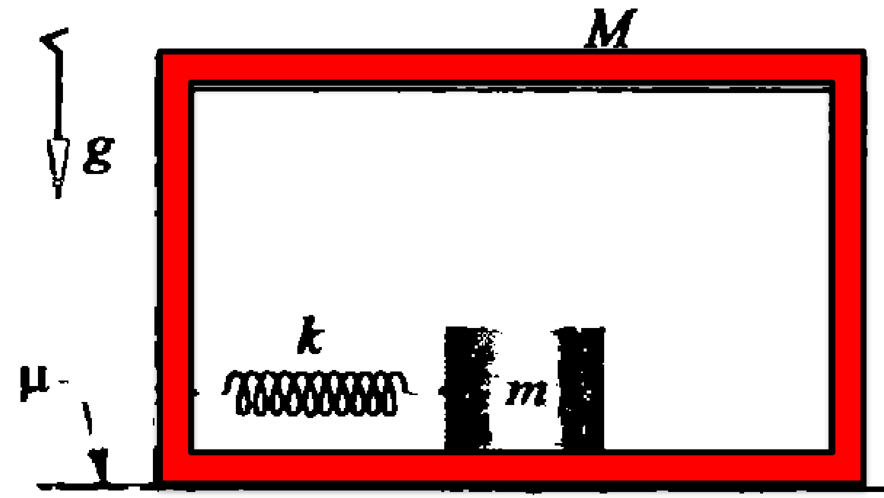
Encontrar la frecuencia de resonancia para cada uno de los sistemas





La figura muestra el péndulo de un reloj. La barra de longitud L=2.0 m tiene una masa m = 0.8 kg. El disco tiene una masa M= 1.2 kg, y radio 0.15 m. El período del reloj es 3.50 s. ¿Cuál debería ser la distancia d para que el período del péndulo fuera 2.5 s

21.9. Un bloque de masa ***m*** unido por un resorte de constante elástica **K** a unacaja de masa **M** oscila armónicamente sin fricción ¿Con qué amplitud de las oscilaciones del bloque comenzará la caja a moverse por la mesa?.

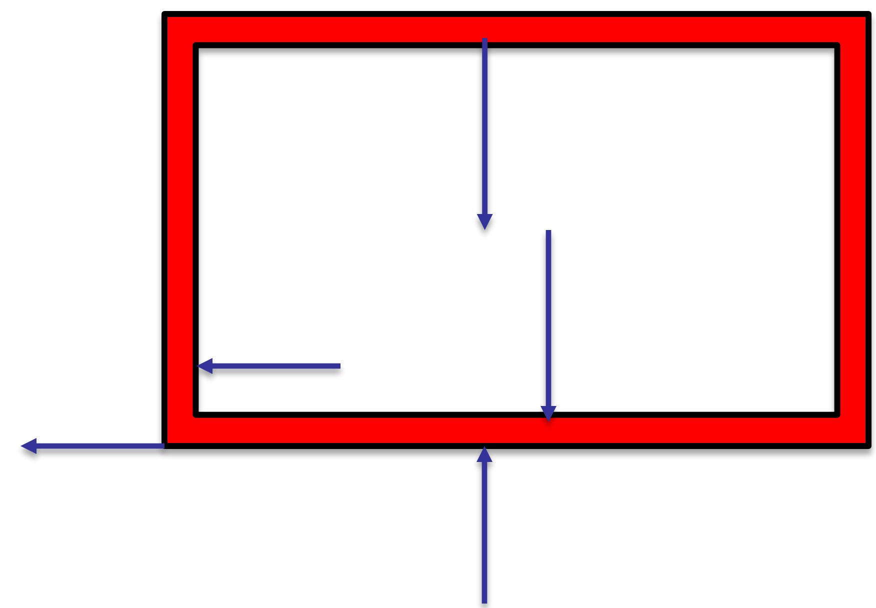


$$\sum F_x = 0 \qquad F - fr_{max} = F \; - \mu \, N = 0$$

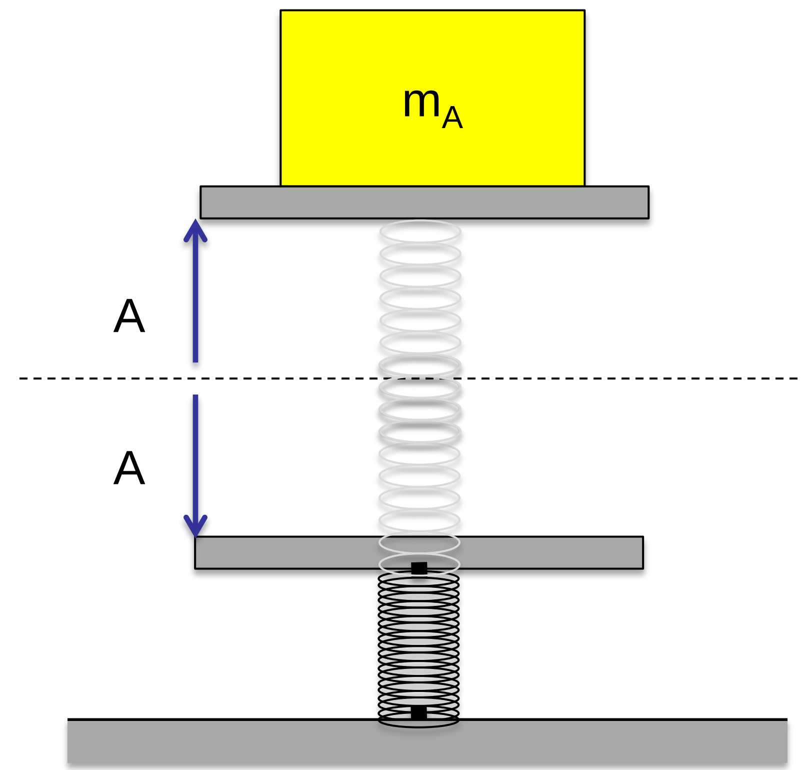
$$\sum F_y = 0 \qquad N - (M + m)g = 0$$

$$F = fr_{max} = \mu \, (M + m)g = kA$$

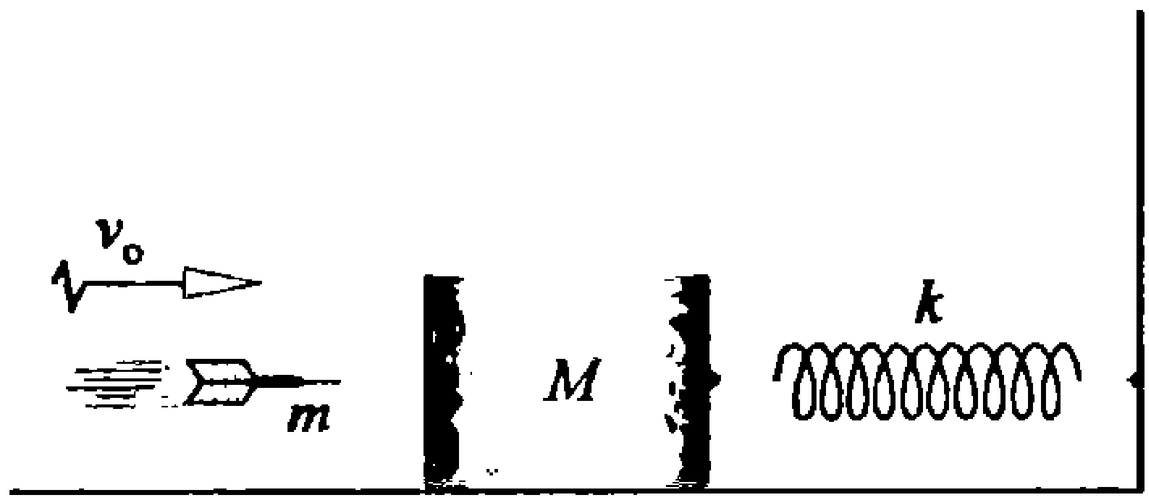
$$A = \mu \frac{(M + m)g}{k}$$



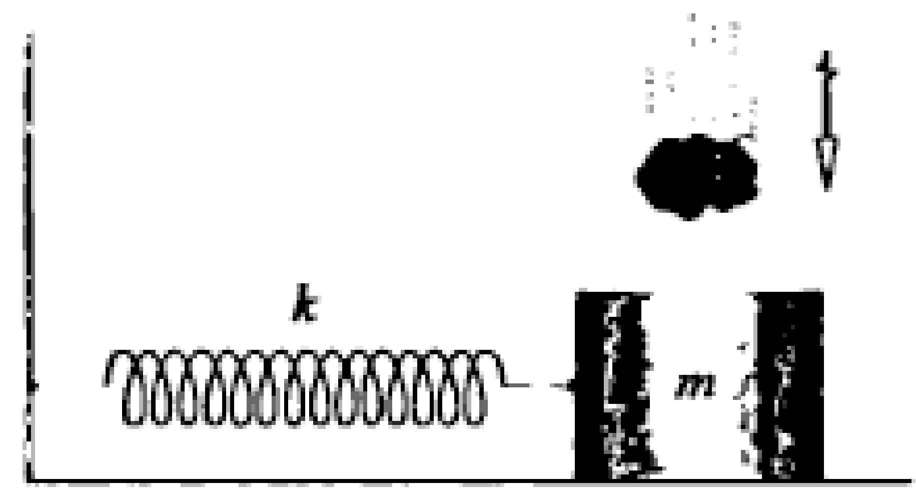
21.15. El bloque A de masa m_A = 4 *kg* se apoya sin unirse sobre una plataforma B de masa despreciable unida al muelle que se encuentra animado de un MAS. Si el coeficiente de elasticidad del muelle es k = 80 N/m, calcular el máximo valor que debe tener la amplitud de las oscilaciones, de modo que A no se desprenda de B *(g* = 10 *m/s*^{2}).



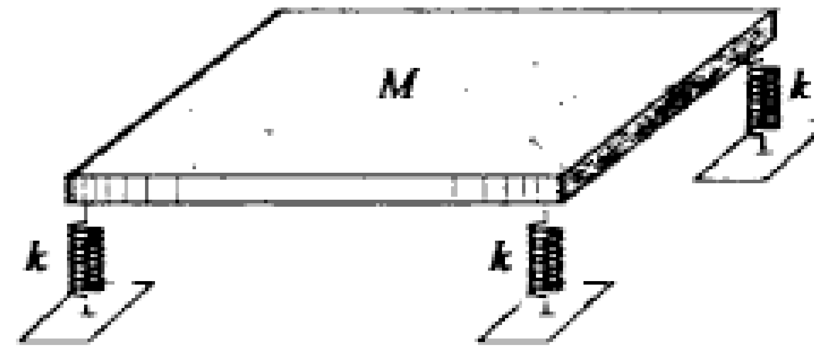
21.18. Un dardo es impulsado con una velocidad v_0 = 200*m/s, y* se incrusta en un bloque de masa M = 95 g. Si el dardo tiene una masa m = 5 *g.* ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento oscilatorio?. Ademas, k = 10*N/m,* y no existe rozamiento.



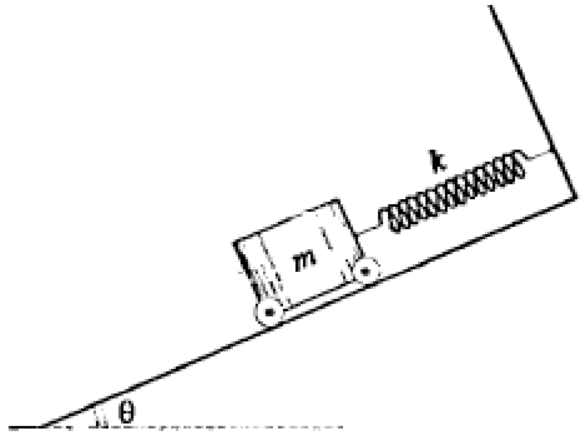
21.19. El bloque de la figura oscila con movimiento armónico simple de amplitud A = *6 cm.* En el instante que pasa por suposición de equilibrio se deja caer verticalmente sobre el bloque una masa de barro de m_2=100 g, quedando adherida a él.
Determinar los nuevos valores del periodo y de la amplitud, m_1 = 200 g, $k = 4\ N/m$.



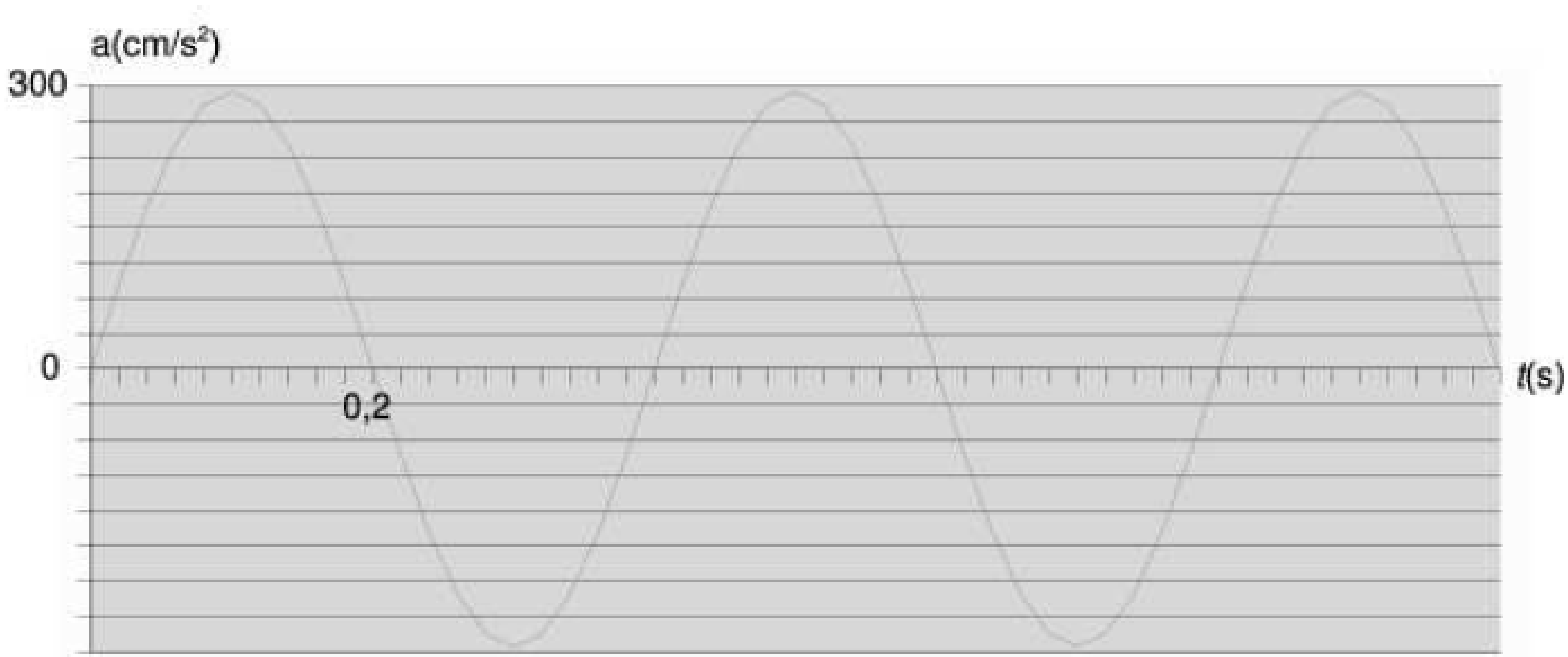
21.21. Una plancha metálica de forma rectangular de masa $M = 4$ *kg* descansa sobre cuatro muelles colocados en sus vértices, siendo todos iguales y de constante elástica $k = 100$ *N/m.* ¿Cuál será el periodo de las oscilaciones que podría experimentar el sistema?.



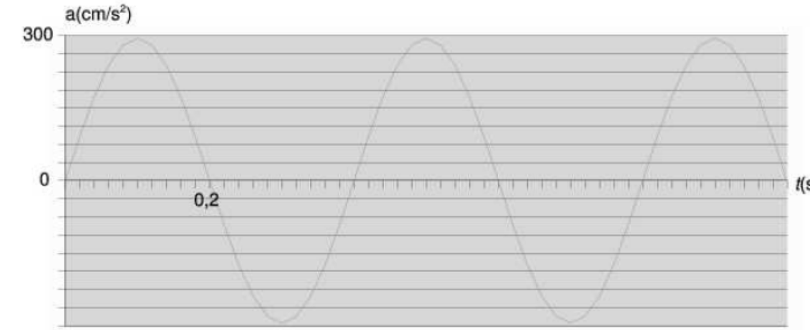
21.24. Un oscilador mecánico compuesto de un muelle de constante elástica k = 200 N/m y un coche de masa m = 2 kg oscila en un plano inclinado con $\Theta = 30º$ sin rozamiento. Determinar el periodo de las oscilaciones y la ecuación que define al movimiento (g = 10 m/s2).



La figura adjunta representa la grafica de la aceleración frente al tiempo para un movimiento vibratorio armónico simple. Deduce la expresión general de la posición.



Solución:



Al utilizar como expresión de la posición:

$$x = A\,\sin(\omega\,t + \varphi_0)$$

La ecuación de la aceleración es:

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} = -A\,\omega^2\,\sin(\omega\,t + \varphi_0)$$

De la gráfica se deduce que $T/2 = 0{,}2$ s, por lo que el periodo y la pulsación son:

$$T = 0{,}4\ \mathrm{s}\,; \quad \omega = 2\,\pi\,/T = 5\,\pi\ \mathrm{rad/s}$$

Del valor de la aceleración máxima: $a_{máxima} = 300\ \mathrm{cm/s^2}$, se deduce que el valor de la amplitud es:

$$a_{máx} = A\,\omega^2 = 300 \Rightarrow A = 1{,}216\ \mathrm{cm}$$

En el instante inicial la partícula está en el centro de la vibración dirigiéndose hacia valores positivos de la aceleración, es decir, se dirige hacia posiciones negativas, por lo que la fase inicial es: $\varphi_0 = \pi$ rad

La ecuación de la posición es:

$$x = A\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) = 1{,}216\,\sin(5\,\pi\,t + \pi)\ \mathrm{cm}$$

Deduce la expresión que relaciona la velocidad y la elongación (es decir la relación entre x(t) y v(t) de una partícula animada con el movimiento armónico simple que sigue la ecuación:

$$x(t) = 10\ sen\ (\ 25t + \frac{\pi}{8})$$

Solución

Las expresiones generales de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Multiplicando la primera expresión por ω y elevando al cuadrado ambas expresiones se tiene:

$$x^2\omega^2 = A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$v^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Sumando y operando:

$$x^2\omega^2 + v^2 = A^2\omega^2$$

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$v^2 = \pm 25\sqrt{100 - x^2}$$

El signo doble se debe a que la trayectoria se puede recorrer en ambos sentidos en una misma posición.

Una partícula describe un movimiento armónico simple con una frecuencia de 10 Hz y 5 cm de amplitud. Determina la velocidad cuando la elongación es x = 2,5 cm.

Solución

La pulsación de la vibración es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 20\,\pi$ rad/s y la amplitud es: $A = 5{\cdot}10^{-2}$ m. En ausencia de rozamiento la energía mecánica del oscilador se conserva:

$$E = E_c + E_p\,; \quad \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Operando y como $k = m\,\omega^2$, se tiene:

$$m\,\omega^2\,A^2 = m\,v^2 + m\,\omega^2\,x^2\,; \quad \omega^2\,A^2 = v^2 + \omega^2\,x^2 \Rightarrow v = \pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

Sustituyendo, se tiene que la velocidad en la posición $x = 2{,}5$ cm $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m es:

$$v_{2,5} = \pm\,20\,\pi\,\sqrt{(5 \cdot 10^{-2})^2 - (2{,}5 \cdot 10^{-2})^2} = \pm\,2{,}72 \text{ m/s}$$

Cuando la partícula se aleja del origen su velocidad es positiva y cuando se dirige al origen su velocidad tiene el signo negativo.

Un péndulo esta calibrado para realizar una oscilación completa en 1 s en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es g = 9.8 m/s^2. ¿Cuánto retrasará o adelantará al cabo de un día cuando se traslade a un lugar en el que la aceleración de la gravedad es g = 9.7 m/s^2?

Solución

$$g_A = 9.8 \qquad T_A = 1\ s$$

$$g_B = 9.7 \qquad T_B = ?$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = \sqrt{g/L} \\ T = 2\pi\sqrt{L/g} \end{array}}$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9.7}{9.8}} = 0.9949 \quad \Longrightarrow \quad T_B = 1.0051\ s$$

El péndulo colocado en el lugar B indica que ha transcurrido 1 s cuando en realidad han transcurrido 1.0051 s, por lo que se retrasa 0.0051 s en cada segundo.

El retraso al cabo de un dia es:

$$retraso = 0.0051 \times 24 \times 3600 = 7\ \text{min}\ 21\ s$$

Una partícula de 10^{-3} kg de masa recorre un segmento de 5 cm de longitud en 1 s, con movimiento vibratorio armónico simple. La partícula en el instante inicial esta situada en la posición central del recorrido y se dirige hacia elongaciones positivas.

a) Calcula su energía cinética en el instante 2.75 s.

b) ¿Cuál es el primer instante en que coinciden los valores de la energía cinética y de la energía potencial?

c) Representa gráficamente la velocidad de la partícula frente al tiempo transcurrido.

Solución

a) La amplitud del movimiento es igual a la mitad de la distancia entre los extremos.

$$A = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm } = 0{,}025 \text{ m}$$

Como la partícula tarda en recorrer el segmento 1 s, para poder volver a la posición inicial tarda el doble. Por tanto, el periodo y la pulsación del movimiento son:

$$T = 2 \cdot 1 = 2 \text{ s } \Rightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

La partícula está en el instante inicial en el centro de la oscilación y se dirige hacia elongaciones positivas, por lo que la fase inicial es $\varphi_0 = 0$ rad, cuando se utiliza para la descripción de la posición la función seno.

Las expresiones de la elongación y de la velocidad son:

$$y = A \sin(\omega\, t + \varphi_0) = 0{,}025 \cdot \sin(\pi\, t) \Rightarrow v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\, t) \text{ m/s}$$

La expresión de la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot [0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\, t)]^2 = 3{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot \cos^2(\pi\, t) \text{ J}$$

Solución (cont.)

Y en el instante pedido:

$$E_c = 3{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot \cos^2(\pi \cdot 2{,}75) = 1{,}54 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

b) Las expresiones generales de las energías potencial y cinética son:

$$y = A \sin(\omega\, t) \;\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\, k\, y^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2 \sin^2(\omega\, t)$$

$$v = A\,\omega \cos(\omega\, t) \;\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2\, cos^2(\omega\, t)$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{2}\, k\, A^2 \sin^2(\omega\, t) = \frac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2 \cos^2(\omega\, t)$$

Simplificando y como $k = m\,\omega^2$, se tiene:

$$\sin^2(\omega\, t) = \cos^2(\omega\, t)$$

Por tanto:

$$\sin(\omega\, t) = \cos(\omega\, t) \;\Rightarrow \omega\, t = \frac{\pi}{4}$$

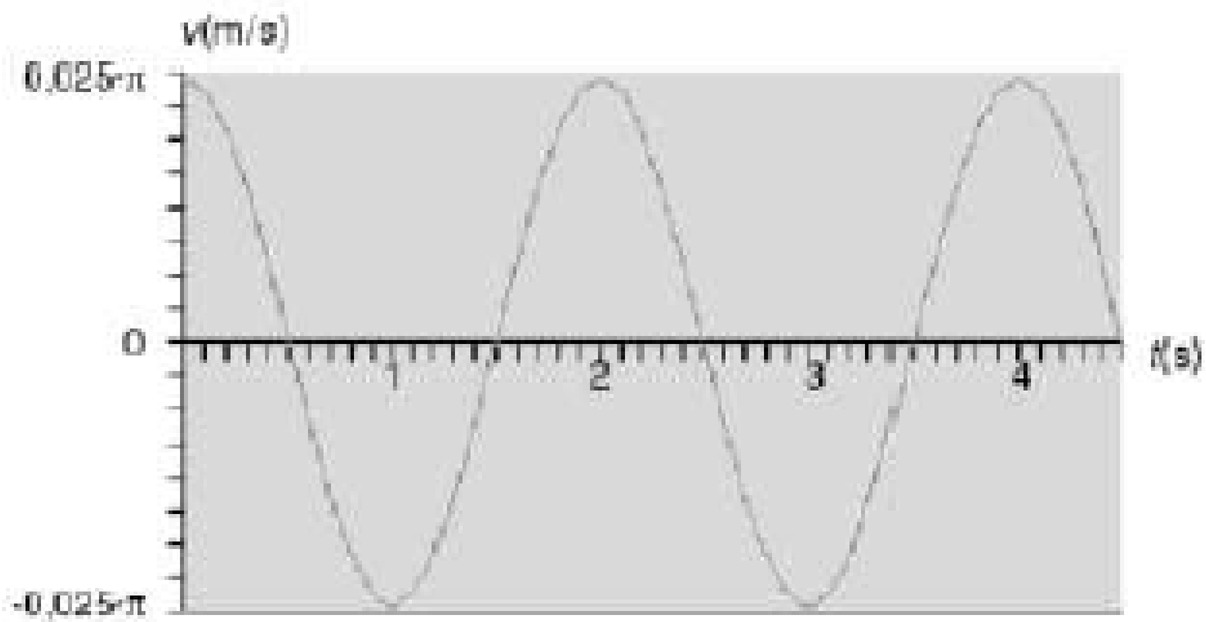
Despejando se tiene el instante pedido:

$$t = \frac{\pi/4}{\omega} = \frac{\pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}25 \text{ s}$$

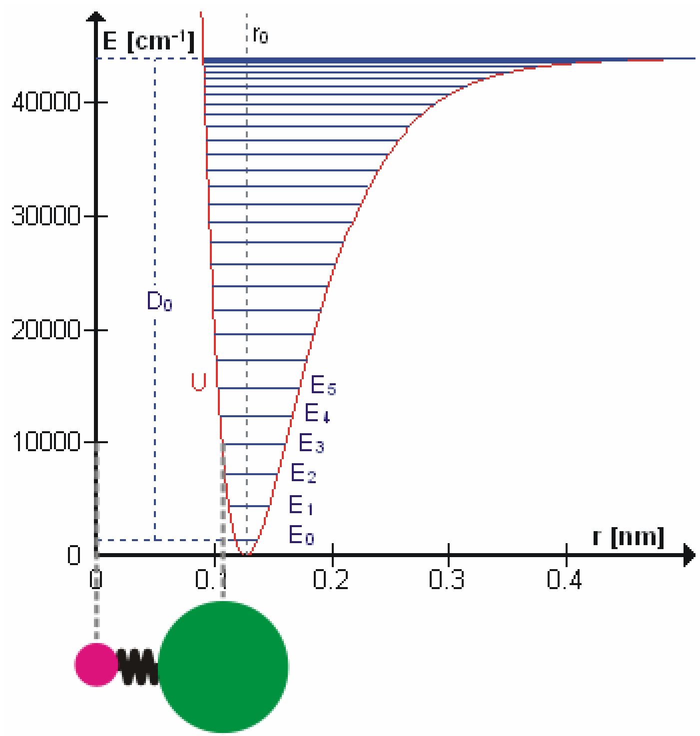
Solución (cont.)

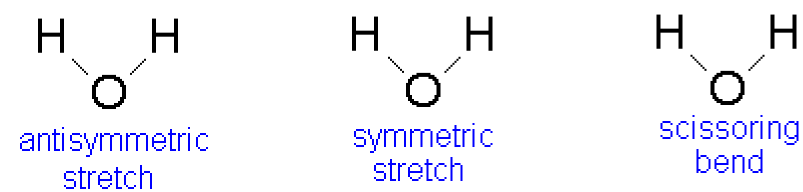
c) Hay que representar gráficamente la función $v = 0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\, t)$ m/s. Esta función está comprendida entre los valores máximos $v_{máx} = \pm\, 0{,}025 \cdot \pi$ m/s.

Inicialmente la partícula tiene el valor máximo de la velocidad y los sucesivos valores de esta se repiten con un periodo de 2 s.



http://universe-review.ca/R15-33-harmonics.htm

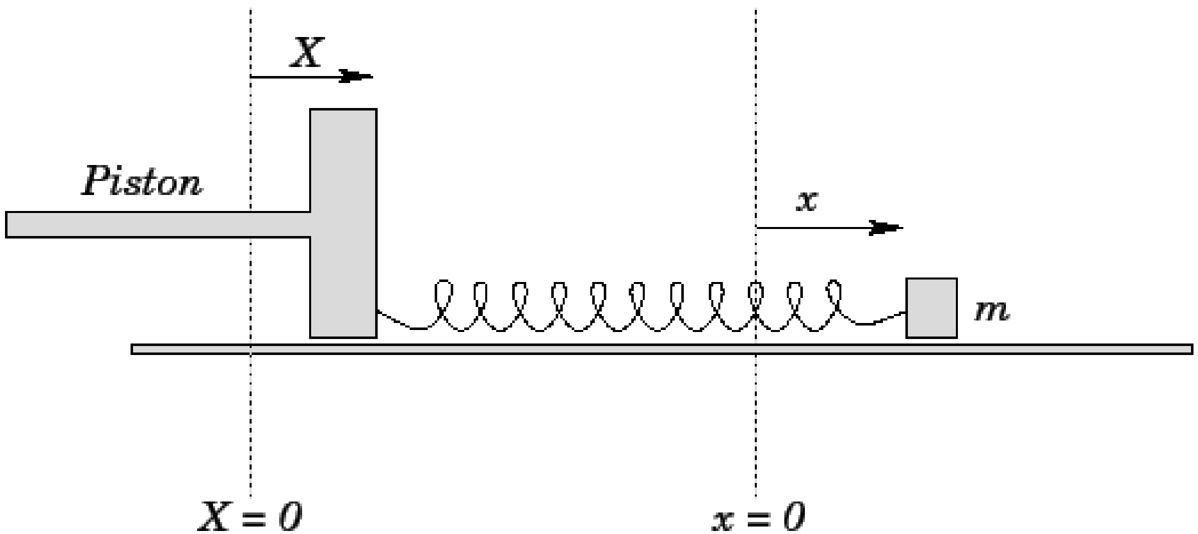




Ejemplo: Oscilador armónico amortiguado forzado

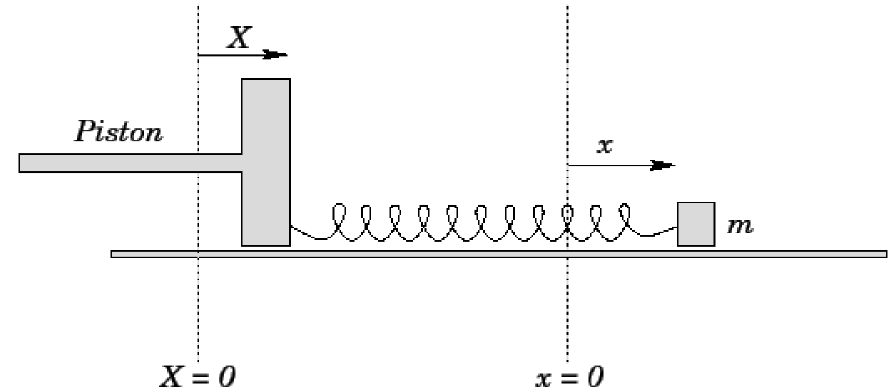
Si un oscilador mecánico amortiguado se pone en movimiento, las oscilaciones finalmente desaparecen debido a las pérdidas de energía por fricción. De hecho, la única forma de mantener la amplitud de un oscilador amortiguado es alimentar continuamente la energía al sistema de tal manera que compense las pérdidas por fricción. Una oscilación constante (es decir, de amplitud constante) de este tipo se denomina oscilación armónica amortiguada forzada.
Considere una versión modificada del sistema de resorte de masa en el que un extremo del muelle está unido a la masa y el otro a un pistón en movimiento. (Ver Figura) Sea $x(t)$ el desplazamiento horizontal de la masa y $X(t)$ el desplazamiento horizontal del pistón. La extensión del resorte es, por lo tanto, $x(t) - X(t)$, suponiendo que el muelle no se estira cuando $x = X = 0$. Por lo tanto, la fuerza horizontal que actúa sobre la masa se puede escribir

$$f = -k\,(x - X) - m\,\nu\,\dot{x}.$$



http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node13.html

Oscilador armónico amortiguado forzado



$$f = -k\,(x - X) - m\,\nu\,\dot{x}.$$

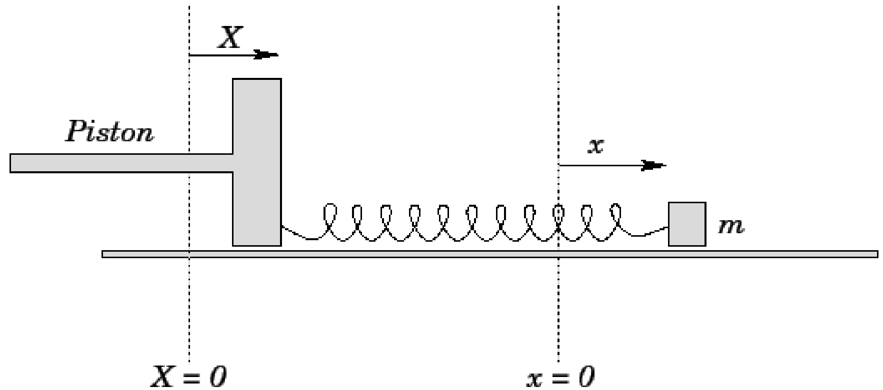
$$\ddot{x} + \nu\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X,$$

Supdonde ν es la constante de amortiguamiento y $\omega_0$la frecuencia de oscilación no amortiguada. ongamos, finalmente, que el pistón ejecuta una oscilación armónica simple de frecuencia angular $\omega > 0$ y amplitud $X_0 > 0$, de modo que la ecuación de evolución temporal del sistema toma la forma

$$\ddot{x} + \nu\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\,\cos(\omega\,t).$$

http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node13.html

Oscilador armónico amortiguado forzado



$$f = -k\,(x - X) - m\,\nu\,\dot{x}.$$

$$\ddot{x} + \nu\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X,$$

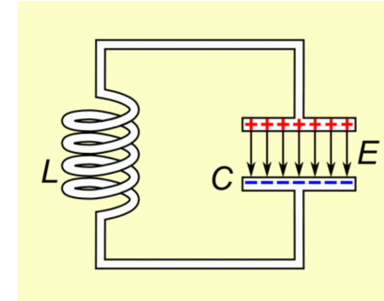
$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega\,x_0\,\sin(\omega\,t - \varphi),$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2\,x_0\,\cos(\omega\,t - \varphi),$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\,x_0\,\cos(\omega\,t - \varphi) - \nu\,\omega\,x_0\,\sin(\omega\,t - \varphi) = \omega_0^2\,X_0\,\cos(\omega\,t).$$

http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node13.html

Oscillations in Electrical Circuits



Differential Equations of RLC-Circuits

Electric oscillations can be excited in a circuit containing resistance R, inductance L and capacitance C. In terms of topology, two types of circuits are often considered: series RLC-circuit (Figure 1) and parallel RLC-circuit (Figure 2).

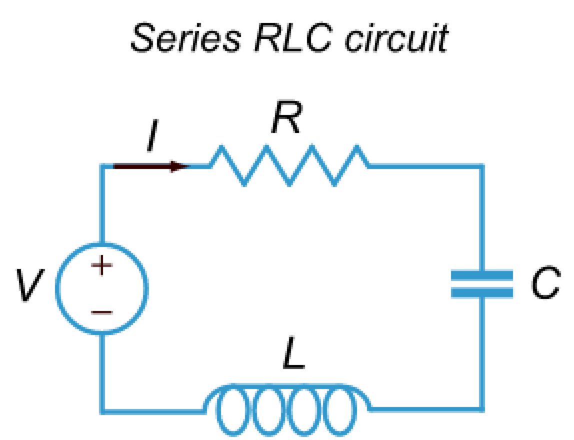


Figure 1.

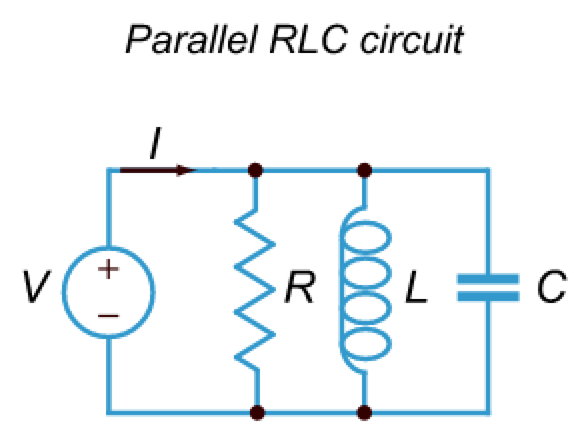


Figure 2.

https://www.math24.net/oscillations-electrical-circuits/

We derive the differential equation describing the current change in a series RLC circuit.

The voltages V_R, V_C, V_L, respectively, on the resistor R, capacitor C and inductor L are given by

$$V_R(t) = RI(t), \quad V_C(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(\tau)\, d\tau, \quad V_L(t) = L\frac{dI}{dt}.$$

It follows from the Kirchhoff's voltage law (KVL) that

$$V_R(t) + V_C(t) + V_L(t) = E(t),$$

where $E(t)$ is the electromotive force (emf) of the power supply.

In the case of constant emf E, we obtain the following differential equation after substituting the expressions for V_R, V_C,V_L and differentiation:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0.$$

If we denote $2\beta = \frac{R}{L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, the equation can be written as

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\beta\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0.$$

This differential equation coincides with the equation describing the damped oscillations of a mass on a spring. Hence, damped oscillations can also occur in series RLC-circuits with certain values of the parameters.

Now we consider the parallel RLC-circuit and derive a similar differential equation for it.

By the Kirchhoff's current law (KCL), the total current is equal to the sum of currents through a resistor R, inductor L and capacitor C (Figure 2):

$$I_R\left(t\right) + I_L\left(t\right) + I_C\left(t\right) = I\left(t\right).$$

Given that

$$I_R = \frac{V}{R},\;\; I_L = \frac{1}{L}\int\limits_0^t V\,d\tau,\;\; I_C = C\frac{dV}{dt},$$

for the case of constant total current $I\left(t\right) = I_0$, we obtain the following differential equation of the second order with respect to the variable V :

$$\frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int\limits_0^t V\,d\tau + C\frac{dV}{dt} = I_0,\;\; \Rightarrow C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}V = 0.$$

As one can see, we again have the equation describing the damped oscillations. Thus, the oscillatory mode can also occur in parallel RLC-circuits.

Resonant Circuit. Thomson Formula

In the simplest case, when the ohmic resistance is zero ($R = 0$) and the source of emf is removed ($E = 0$), the resonant circuit consists only of a capacitor C and inductor L, and is described by the differential equation

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0, \text{ where } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

In this circuit there will be undamped electrical oscillations with a period

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

This formula is called the Thomson formula in honor of British physicist William Thomson $(1824 - 1907)$, who derived it theoretically in 1853.

Damped Oscillations in Series RLC-Circuit

The second order differential equation describing the damped oscillations in a series RLC -circuit we got above can be written as

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

https://www.math24.net/oscillations-electrical-circuits/

The corresponding characteristic equation has the form

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0.$$

Its roots are calculated by the formulas:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

where the value of $\beta = \frac{R}{2L}$ is called the damping coefficient, and ω_0 is the resonant frequency of the circuit.

Depending on the values of R, L, C there may be three options.

Case 3. Underdamping: $R^2 < \frac{4L}{C}$

In this case, the roots of the characteristic equation are complex conjugate, which leads to damped oscillations in the circuit. The change of current is given by

$$I\left(t\right) = e^{-\beta t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right),$$

where the value of $\beta = \frac{R}{2L}$ is as above the damping factor, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ is the frequency of oscillation, A, B are constants of integration, depending on initial conditions. Note that the frequency ω of damped oscillations is less than the resonant frequency ω_0 of the circuit. The typical shape of the curve $I\left(t\right)$ in this mode is also shown in Figure 3 above.

https://www.math24.net/oscillations-electrical-circuits/

https://www.math24.net/oscillations-electrical-circuits/

Forced Oscillations and Resonance

If the resonant circuit includes a generator with periodically varying emf, the forced oscillations arise in the system. If the emf E of the source varies according to the law

$$E(t) = E_0 \cos \omega t,$$

then the differential equation of forced oscillations in series RLC-circuit can be written as

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{1}{L}E_0 \cos \omega t \quad \text{or} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L}\cos \omega t,$$

where q the charge of the capacitor, $2\beta = \frac{R}{L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

This equation is analogous to the equation of forced oscillations of a spring pendulum, discussed on the page Mechanical Oscillations. Its general solution is the sum of two components: the general solution of the associated homogeneous equation and a particular solution of the nonhomogeneous equation. The first component describes the decaying transient process, after which the behavior of the system depends only on the external driving force. The forced oscillations will occur according to the law

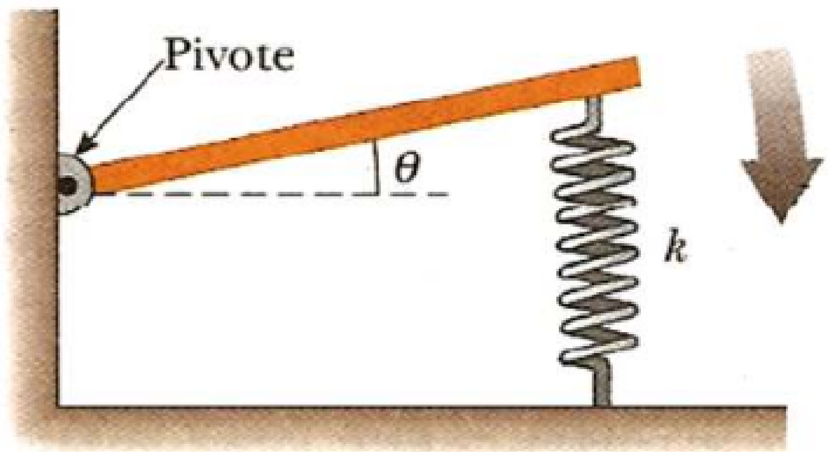
$$q(t) = \frac{E_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

1._ Un tablón horizontal de masa *m* y longitud *L* esta articulado en un extremo, y en el otro está unido a un resorte de constante de fuerza *k*. El momento de inercia del tablón alrededor del pivote es de ⅓ML^2 .

a) Cuando el tablón se desplaza un ángulo pequeño θ a partir de la posición de equilibrio horizontal y se suelta, demuestre que se desplaza con un M.A.S.

b) Encuentre la frecuencia angular en términos de *m* y *L*.

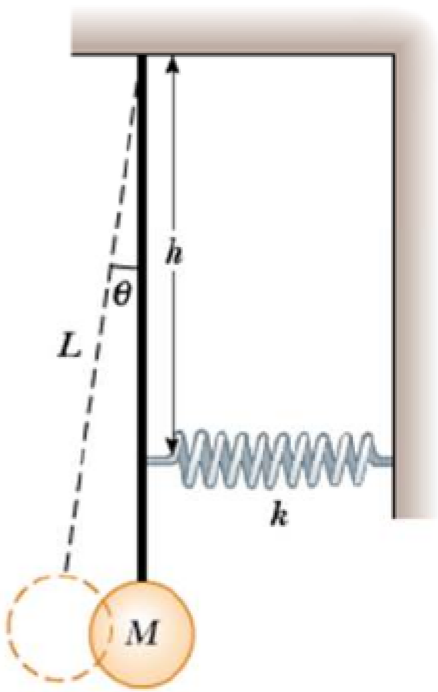
c) El periodo de oscilación, si m = 5 Kg y k = 100 N/m



b) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ *c)* $T = 0.813\ s$

θ Deg	θ Rad	sen(θ)	cos(θ)	θ -sen(θ)	1-cos(θ)
0	0	0	1	0	0
0,57296	0,01	0,01	0,99995	1,66666E-7	4,99996E-5
1,14592	0,02	0,02	0,9998	1,33331E-6	1,99993E-4
1,71887	0,03	0,03	0,99955	4,4998E-6	4,49966E-4
2,29183	0,04	0,03999	0,9992	1,06658E-5	7,99893E-4
2,86479	0,05	0,04998	0,99875	2,08307E-5	0,00125
3,43775	0,06	0,05996	0,9982	3,59935E-5	0,0018
4,0107	0,07	0,06994	0,99755	5,71527E-5	0,00245
4,58366	0,08	0,07991	0,9968	8,5306E-5	0,0032
5,15662	0,09	0,08988	0,99595	1,21451E-4	0,00405
5,72958	0,1	0,09983	0,995	1,66583E-4	0,005
6,30254	0,11	0,10978	0,99396	2,21699E-4	0,00604
6,87549	0,12	0,11971	0,99281	2,87793E-4	0,00719
7,44845	0,13	0,12963	0,99156	3,65857E-4	0,00844
8,02141	0,14	0,13954	0,99022	4,56885E-4	0,00978
8,59437	0,15	0,14944	0,98877	5,61868E-4	0,01123
9,16732	0,16	0,15932	0,98723	6,81793E-4	0,01277
9,74028	0,17	0,16918	0,98558	8,17651E-4	0,01442
10,31324	0,18	0,17903	0,98384	9,70427E-4	0,01616
10,8862	0,19	0,18886	0,982	0,00114	0,018
11,45916	0,2	0,19867	0,98007	0,00133	0,01993
12,03211	0,21	0,20846	0,97803	0,00154	0,02197
12,60507	0,22	0,21823	0,9759	0,00177	0,0241
13,17803	0,23	0,22798	0,97367	0,00202	0,02633
13,75099	0,24	0,2377	0,97134	0,0023	0,02866
14,32394	0,25	0,2474	0,96891	0,0026	0,03109
14,8969	0,26	0,25708	0,96639	0,00292	0,03361
15,46986	0,27	0,26673	0,96377	0,00327	0,03623
16,04282	0,28	0,27636	0,96106	0,00364	0,03894
16,61578	0,29	0,28595	0,95824	0,00405	0,04176
17,18873	0,3	0,29552	0,95534	0,00448	0,04466

2. Un péndulo de longitud ***L*** y masa ***M*** tiene un resorte de constante de fuerza ***k*** conectado a él a una distancia ***h*** debajo de su punto de suspensión. Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud. (Suponga que la suspensión vertical de longitud ***L*** es rígida, pero ignore su masa)



Rta: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{MgL + kh^2}{ML^2}}$

1. Para medir la masa de un astronauta en ausencia de gravedad se emplea un aparato medidor de masa corporal. Este aparato consiste, básicamente, en una silla que oscila en contacto con un resorte. El astronauta ha de medir su periodo de oscilación en la silla. En la segunda misión Skylab el resorte empleado tenía una constante k = 605.6 N/m y el periodo de oscilación de la silla vacía era de T_0=0.90149 s. Calcule la masa de la silla. Con un astronauta en la silla el periodo medido fue T_1=2.08832 s. Calcule la masa del astronauta.

Halle el error relativo cometido al calcular la velocidad para un péndulo en su punto más bajo empleando la aproximación de oscilador armónico, si se suelta en reposo desde un ángulo respecto a la vertical de (a) 1° (b) 10° (c) 30° (d) 60° (e) 90° .

Una partícula de masa m se desliza sin rozamiento dentro de un recipiente de forma hemisférica de radio R. Demuestre que el movimiento de la partícula sobre el cuenco es equivalente a un péndulo de longitud R.

Un circuito formado por una resistencia R, un condensador C y una autoinducción L, asociadas en serie cumple las siguientes ecuaciones para la carga en el condensador y la corriente en el circuito:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

Suponga en primer lugar que la resistencia es nula (R = 0). Pruebe que la carga del condensador oscila armónicamente.

¿Cuál es la frecuencia de oscilación?

¿Qué energía se conserva, análogamente a la energía mecánica de un oscilador armónico?

Si la resistencia no es nula, pruebe que el sistema se comporta como un oscilador amortiguado. ¿Cuál es la resistencia máxima para que haya oscilaciones en el sistema?

Se tiene el sistema de la figura, formado por dos muelles de longitud natural nula y constantes elásticas k_1 y k_2 . Los puntos de anclaje de los muelles están separados por una distancia *L*. Una partícula de masa *m* está conectada a los dos muelles y se mueve bajo la acción de éstos. El rozamiento con la superficie es despreciable.

1.Calcula la posición de equilibrio de la partícula.

2.Calcula la energía potencial elástica de la partícula cuando está en su posición de equilibrio.

3.Estando la partícula en la posición de equilibrio, se le da un empujón hacia la derecha de modo que su velocidad inicial es v_0. ¿Cuál es el período de las oscilaciones de la partícula?

4.Si el valor numérico de la velocidad inicial es $v_0 = 100\,\mathrm{cm/s}$ ¿cuál es la amplitud de las oscilaciones de la partícula?

Los valores numéricos de los parámetros del problema son

$k_1 = 100\,\mathrm{N/m}$ $\qquad m = 100\,\mathrm{g}$

$k_2 = 200\,\mathrm{N/m}$ $\qquad L = 10.0\,\mathrm{cm}$