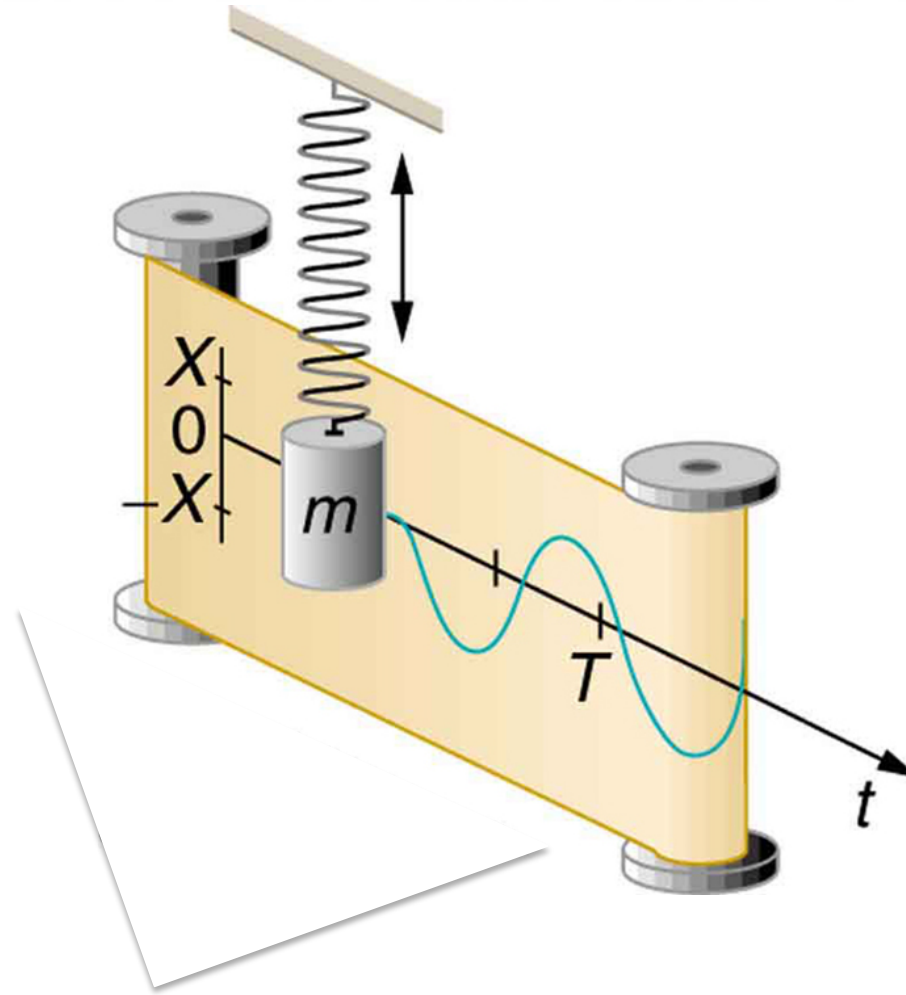


MOVIMIENTO OSCILATORIO MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



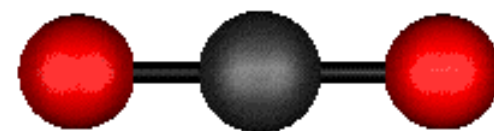
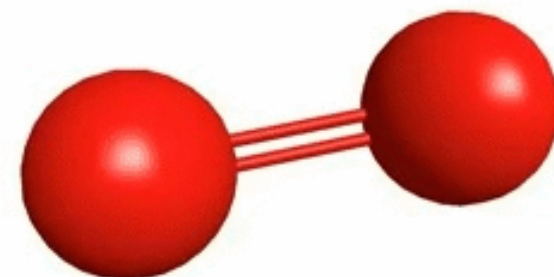
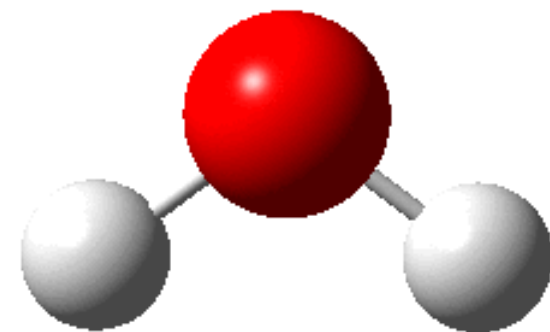
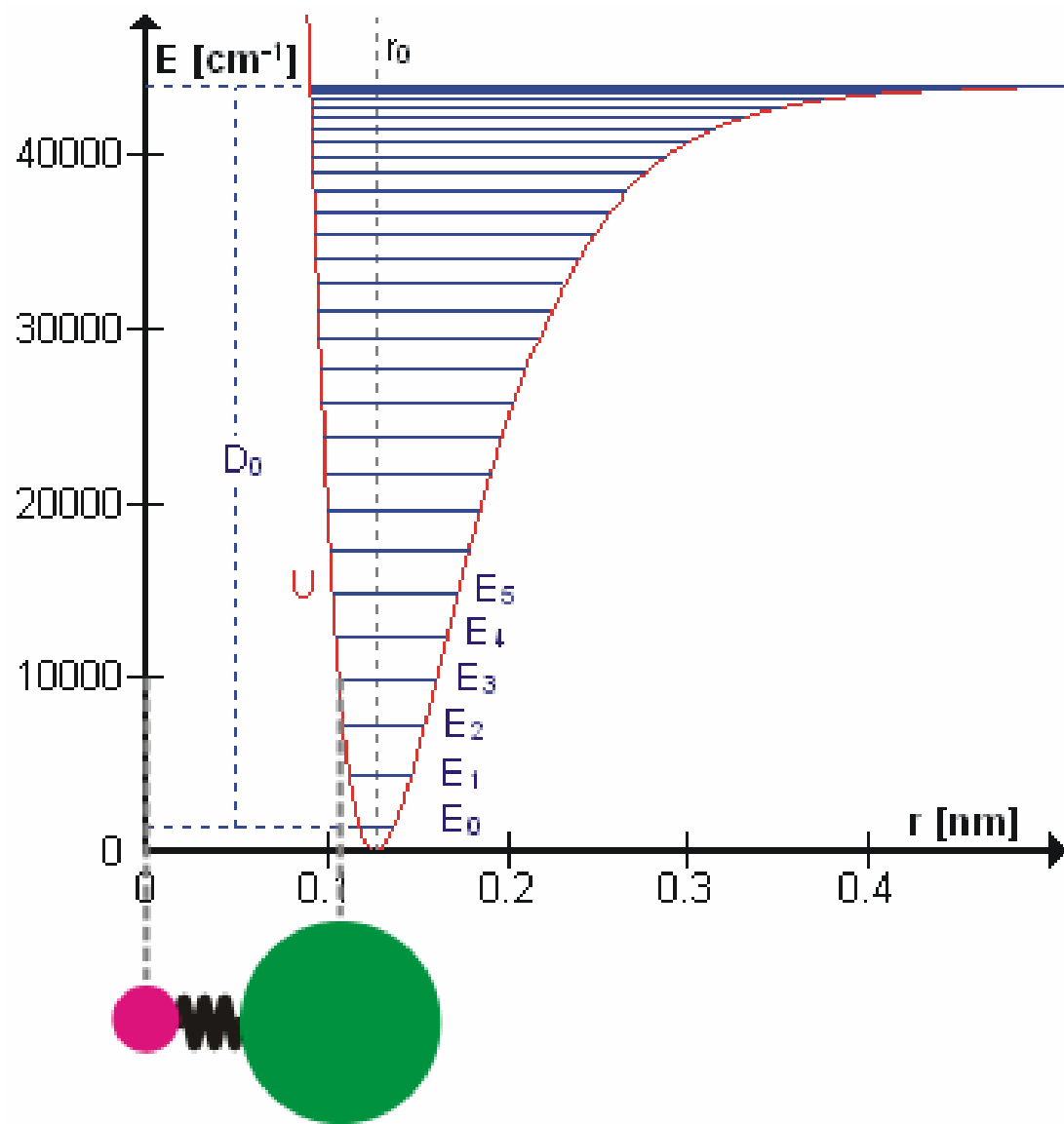
BLOQUE		UNIDAD	TEMA
Física I (1er cuatrimestre)	Nivelación	§A - Aspectos Fundamentales	<ol style="list-style-type: none"> 1. Sistemas de medida. 2. Magnitudes y Unidades. Conversión. Sistema SI 3. Análisis dimensional en problemas.
		§B – Vectores	<ol style="list-style-type: none"> 1. Vectores. Vector unitario. Suma vectorial. 2. Producto escalar y producto vectorial.
	MECÁNICA	§1 Cinemática	<ol style="list-style-type: none"> 1. El vector posición, velocidad, aceleración. 2. Movimiento en una dimensión. Mov. en 3 dimensiones. 3. Movimiento relativo
		§2 Dinámica	<ol style="list-style-type: none"> 1. Dinámica de una partícula 2. Dinámica de los sistemas de partículas 3. Dinámica del sólido rígido
		§3 Energía	<ol style="list-style-type: none"> 1. Trabajo y Energía de una partícula y en sistemas de partículas 2. Potencia.
		§4 Oscilaciones	<ol style="list-style-type: none"> 1. Movimiento armónico simple 2. Superposición de MAS 3. Movimiento oscilatorio
		§6 Fluidos	<ol style="list-style-type: none"> 1. El fluido ideal. 2. Principio de Pascal. Principio de Arquímedes. 3. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones.
		§7 Calor y Temperatura	<ol style="list-style-type: none"> 1. Temperatura: termómetros y escalas termométricas 2. Calor y capacidad calorífica. Conductividad térmica.
	TERMODINÁMICA	§8 Primer Principio de la Termodinámica.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Energía Interna. Estados de equilibrio. 2. Energía interna de un gas ideal. Termodinámica del gas ideal.
		§9 Segundo Principio de la Termodinámica.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Entropía. Segundo principio. 2. Ciclo de Carnot. Maquinas térmicas. Otros ciclos.

Oscilaciones

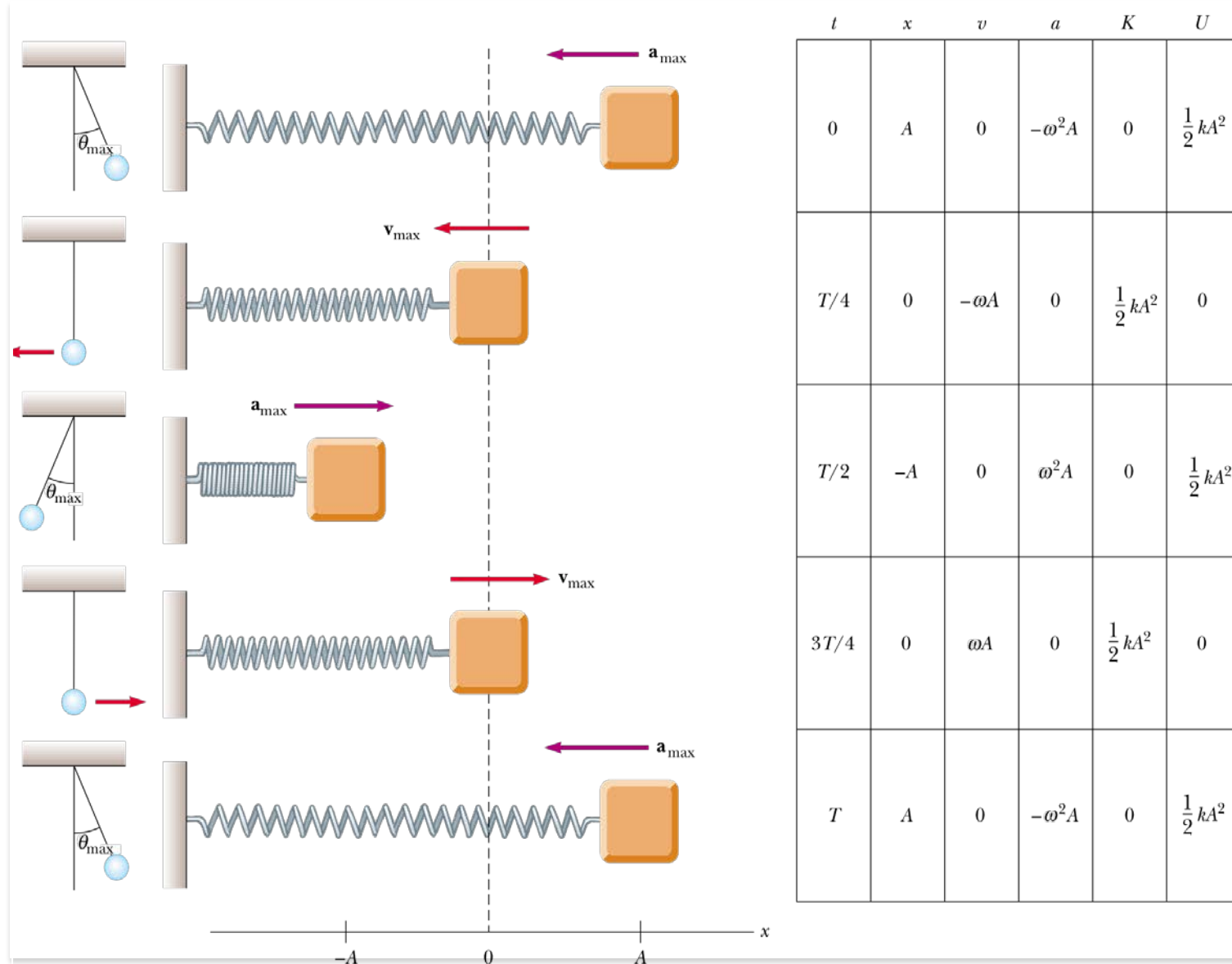
0. Las funciones trigonométricas. Las ecuaciones diferenciales.
1. Movimiento armónico simple
2. Cinemática del MAS
3. Fuerzas y energías en el MAS
4. Análisis matemático de las ecuaciones básicas.
5. Oscilaciones forzadas. Resonancia.
6. Péndulo simple y péndulo físico

Parte de estos contenidos ya se han visto, desde la perspectiva de la Dinámica de Newton, en las [clases correspondientes](#). Se sugiere repasar dicho material.

Parte de los contenidos de esta clase han sido extraídos y modificados de la presentación del [Prof. Javier Junquera](#), de la Universidad de Cantabria, cuya gentileza ha permitido su reproducción aquí.



Movimiento oscilatorio



INTRODUCCIÓN. VIBRACIONES MECÁNICAS

Una **vibración mecánica** es el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio.

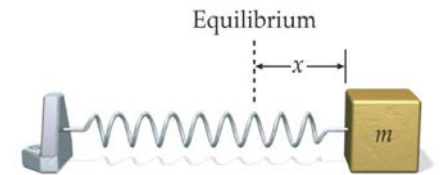
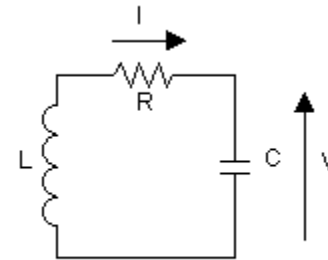
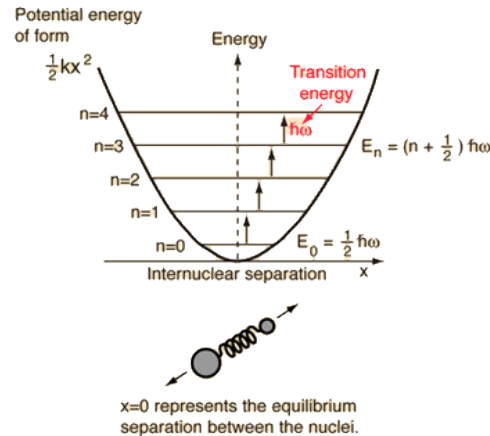
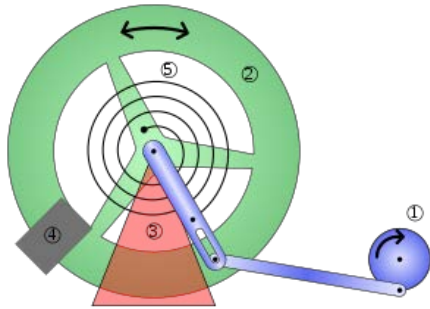
Las vibraciones mecánicas suelen ocurrir al separar al sistema de una posición de equilibrio. El sistema tiende a retornar a la posición de equilibrio bajo la acción de fuerzas restauradoras, bien fuerzas elásticas en el caso de muelles, o bien fuerzas gravitacionales como en el caso del péndulo

Periodo de vibración. El intervalo de tiempo requerido por el sistema para completar un ciclo completo del movimiento

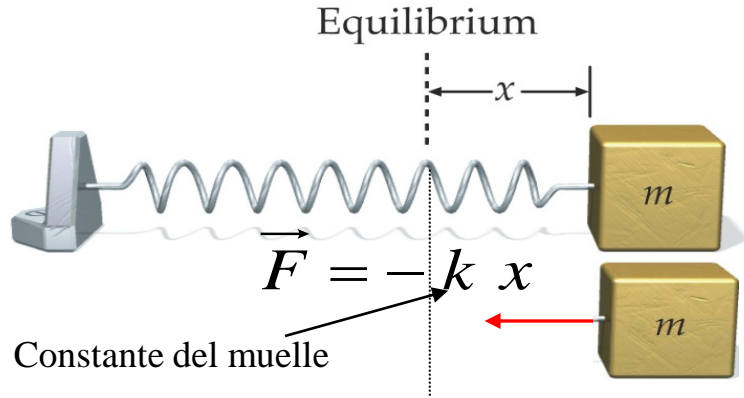
Frecuencia: El número de ciclos por unidad de tiempo

Amplitud: El desplazamiento máximo del sistema desde la posición de equilibrio

Muchas vibraciones son no deseadas: ocasionan pérdidas de energía y ruido. Otras son deseadas: SONIDO, LUZ,...



MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



Podemos visualizar el MAS analizando el movimiento del bloque bajo la acción de un resorte

Consideremos el bloque sujeto al muelle y situado encima de una mesa sin fricción

La fuerza neta sobre el bloque es la que ejerce el resorte. Esta fuerza es proporcional al desplazamiento x , medido desde la posición de equilibrio.

Aplicando la Segunda Ley de Newton, tenemos

Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes que describe el momento de un oscilador armónico

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Ejercicio: Verificar que cada una de las funciones

$$x_1 = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$x_2 = C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Satisface la ecuación diferencial indicada

En el caso de que la aceleración de un objeto sea proporcional al desplazamiento, y de signo opuesto, el objeto realizará un movimiento armónico simple

Movimiento Armónico Simple

En el caso de que la aceleración de un objeto sea proporcional al desplazamiento, y de signo opuesto, el objeto realizará un movimiento armónico simple

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

x , posición; A , amplitud, $\omega t + \delta$ fase del movimiento

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

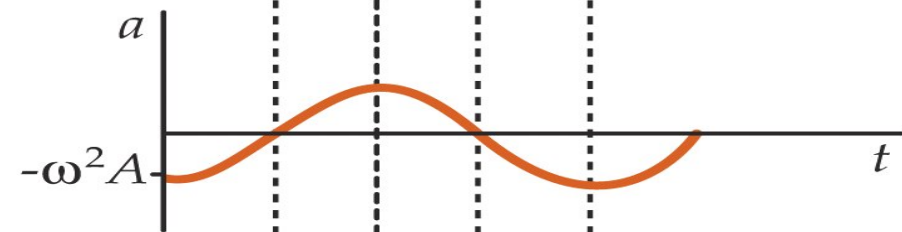
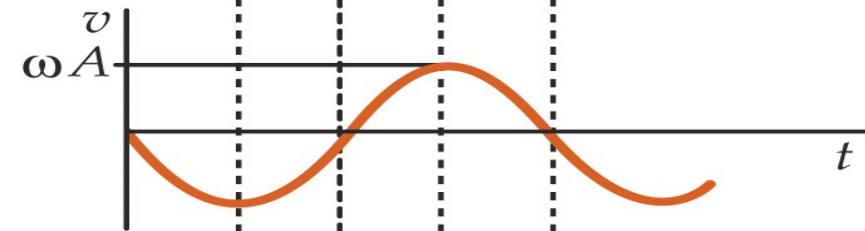
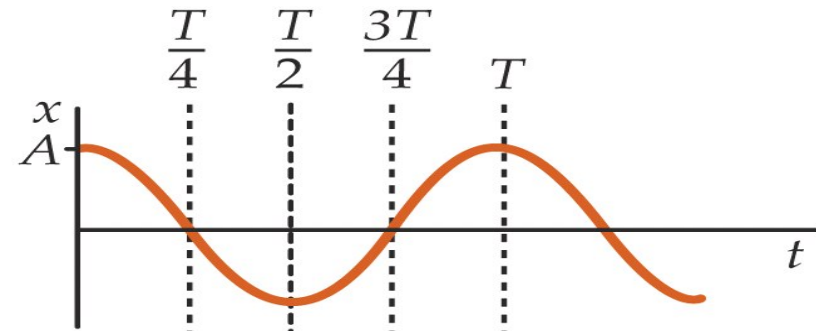
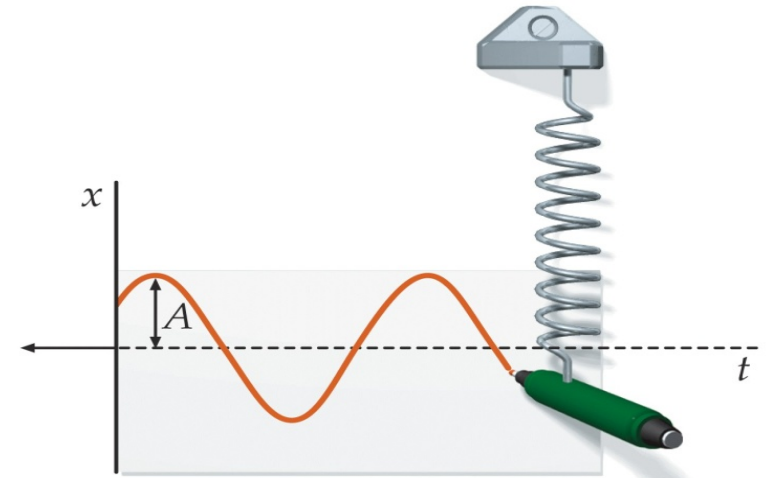
v , velocidad

$$a = -\omega^2 x$$

aceleración

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

f , frecuencia, T período, ω , frecuencia angular (frecuencia circular natural), δ , ángulo de fase o constante de fase



Caso de estudio: MAS en el caso de un resorte

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Movimiento Armónico Simple y movimiento circular

MAS puede ser entendido como el movimiento que realiza la proyección sobre el eje x de un punto que se mueve en movimiento circular a velocidad constante

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

x = Posición, [m];

A = amplitud [m];

$(\omega t + \delta)$ = fase [rad]

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

v = velocidad, [m/s]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

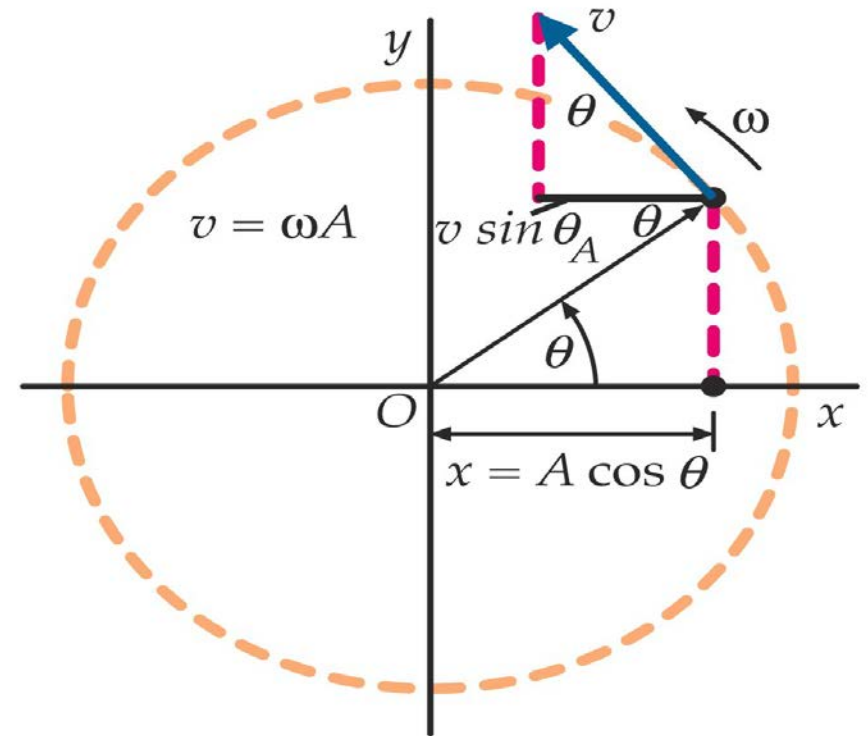
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

f , frecuencia, [ciclos/s],

T período, [s]

ω , [rad/s] frecuencia angular

δ , ángulo de fase [rad]



Movimiento Armónico Simple y movimiento circular

Problemas ultra-básicos

1.- Un objeto de 0.8 kg de masa se sujeta a un muelle de constante $k = 400 \text{ N/m}$. Se separa el bloque una distancia de 5 cm desde la posición de equilibrio y se libera en el instante $t = 0$.

- a) Encontrar la frecuencia angular y el período T .
- b) Escribir la ecuación que describe la posición x y la velocidad del objeto como una función del tiempo.
- c) Calcular la máxima velocidad que el objeto puede alcanzar.
- d) La energía del sistema oscilante

2.- Un objeto oscila con una frecuencia angular de 8.0 rad/s . Para $t = 0$, el objeto se encuentra $x = 4 \text{ cm}$ con una velocidad inicial de $v = -25 \text{ cm/s}$.

- a) Encontrar la amplitud y la constante de fase;
- b) Escribir la ecuación que describe la posición x y la velocidad del objeto como una función del tiempo.
- c) Calcular la máxima velocidad que el objeto puede alcanzar.
- d) La energía del sistema oscilante

Una partícula que vibra a lo largo de un segmento de 10 cm de longitud tiene en el instante inicial su máxima velocidad que es de 20 cm/s. Determina las constantes del movimiento (amplitud, fase inicial, frecuencia y periodo) y escribe las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración. Calcula la elongación, velocidad y aceleración en el instante $t = 1.75$ s.

La amplitud es igual a la mitad del segmento recorrido: $A = 5 \cdot 10^{-2}$ m. Las expresiones generales de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0); \quad v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Como en el instante inicial la velocidad es máxima, se tiene que la fase inicial es:

$$\cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Del valor de la máxima velocidad se deducen el resto de las constantes del movimiento.

$$v_{\text{máxima}} = A \cdot \omega = 0,20 \text{ m/s} \Rightarrow \omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A} = \frac{0,20}{0,05} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{2} \text{ s}$$

Las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración y sus valores en el instante indicado, $t = 1,75 \cdot \pi$ s, son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0,05 \cdot \sin(4 \cdot t) \Rightarrow x_t = 0,05 \cdot \sin(4 \cdot 1,75 \cdot \pi) = 0 \text{ m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,2 \cdot \cos(4 \cdot t) \Rightarrow v_t = 0,2 \cdot \cos(4 \cdot 1,75 \cdot \pi) = -0,2 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0,8 \cdot \sin(4 \cdot t) \Rightarrow a_t = -0,8 \cdot \sin(4 \cdot 1,75 \cdot \pi) = 0 \text{ m/s}^2$$

Consideraciones energéticas del MAS

(Véanse las clases de 2a Ley de Newton)

Como la superficie no tiene rozamiento, la energía mecánica total del sistema permanece constante

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

La energía total vendrá dada por:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Como $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Movimiento Armónico Simple. Energía

Energía potencial

$$U = - \int_{x=0}^x (-k x) dx = \frac{1}{2} k x^2$$

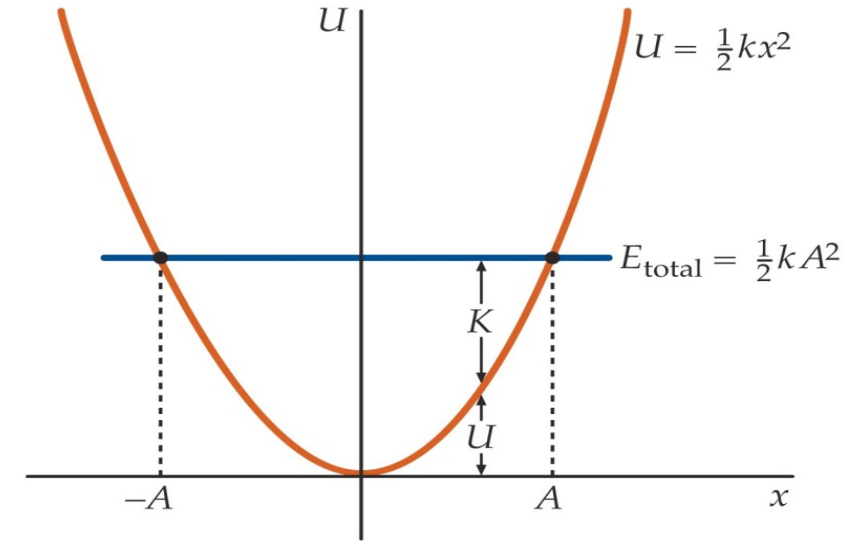
Energía cinética

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A \omega \sin(\omega t + \delta))^2$$

Energía mecánica total

$$E_{total} = U + K = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

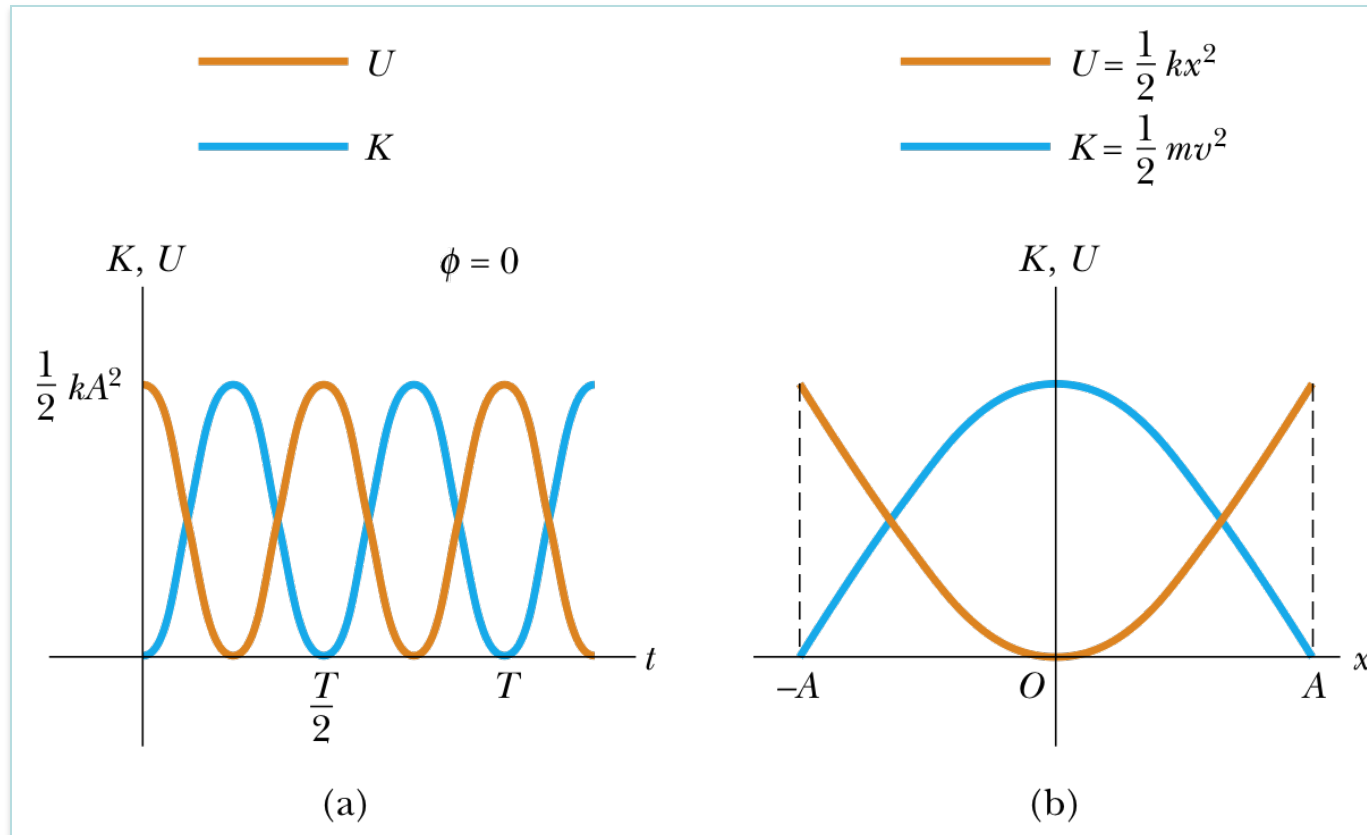
La energía mecánica total en un MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud



(Véanse las clases de 2a Ley de Newton!!!)

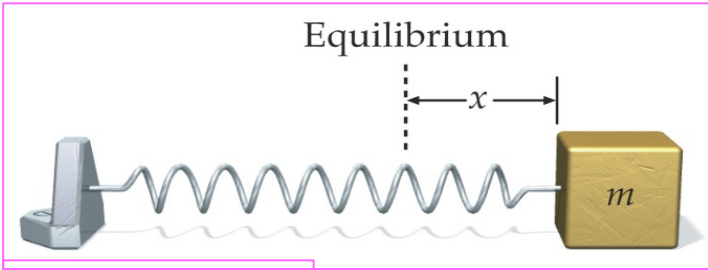
MAS: Representación gráfica de la energía

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$



Algunos sistemas oscilantes

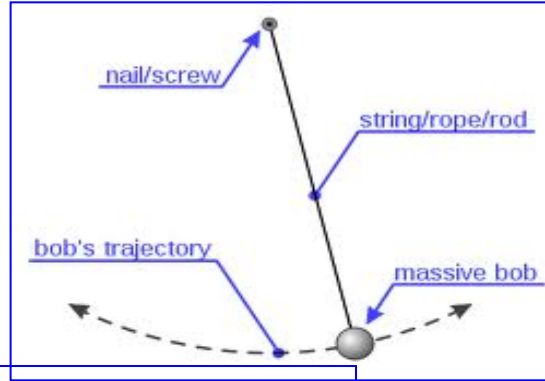
Muelle



$$\omega = \sqrt{k/m};$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Péndulo simple



Péndulo físico

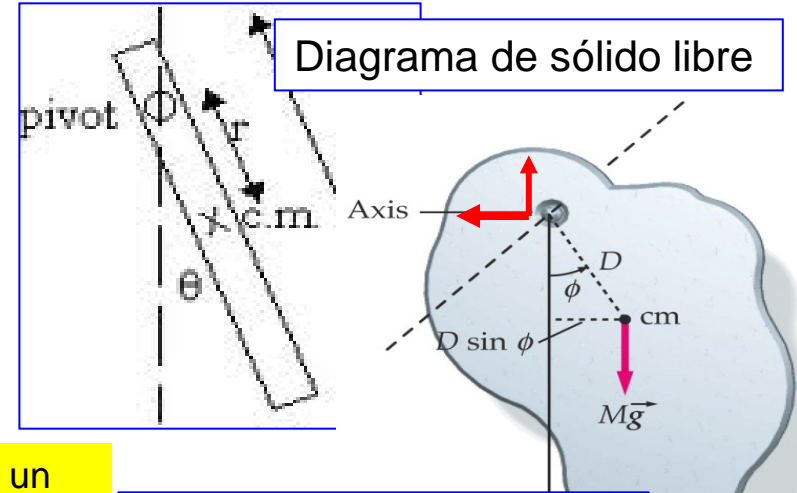
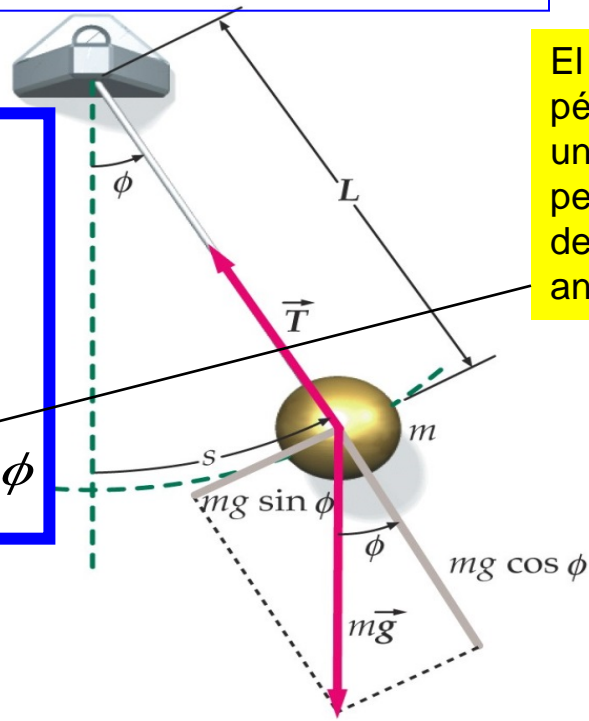


Diagrama de sólido libre



El movimiento de un péndulo se aproxima a un MAS para pequeños desplazamientos angulares

$$\sum F_T = m a_T$$

$$mg \sin \phi = m \alpha L$$

$$mg \sin \phi = mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi \approx -\frac{g}{L} \phi$$

$$\tau = I \alpha$$

$$MgD \sin \phi = I \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \sin \phi$$

$$\approx -\frac{MgD}{I} \phi$$

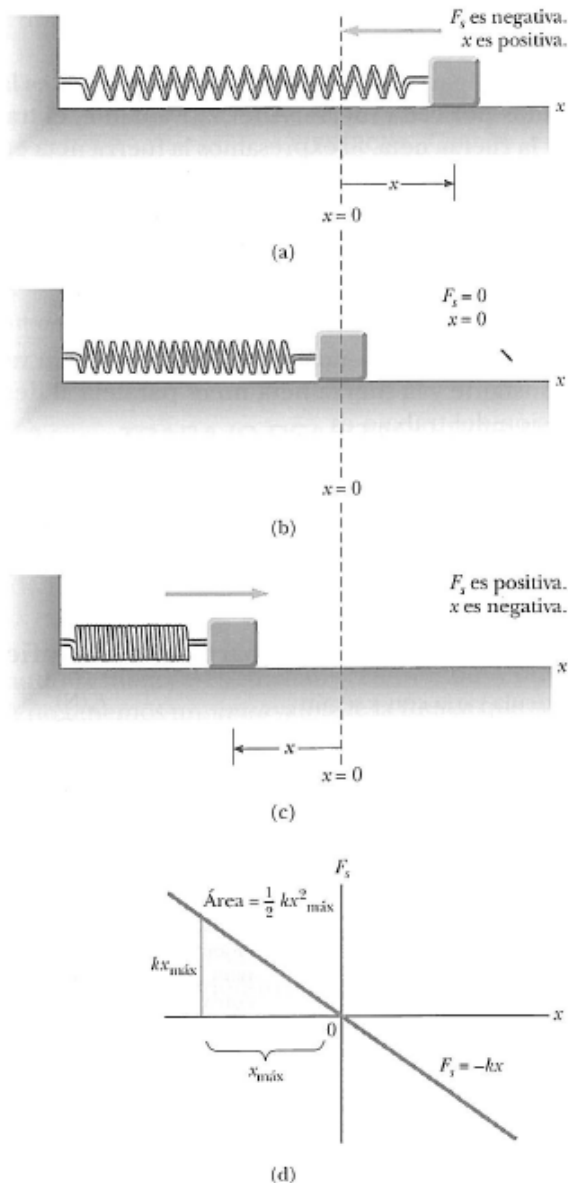
$$\omega = \sqrt{g/L}$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

Movimiento de una partícula unida a un muelle sin masa: movimiento armónico simple.



$$F_s = -kx$$

Cuando una partícula está bajo el efecto de una fuerza de recuperación lineal, el movimiento de la partícula se corresponde con un tipo especial de movimiento oscilatorio denominado movimiento oscilatorio armónico.

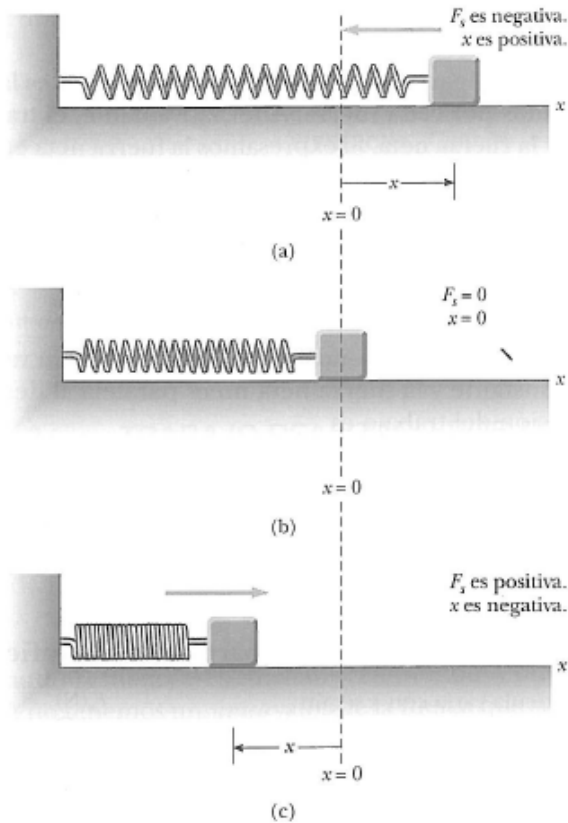
Aplicando a la partícula la segunda ley de Newton en la dirección x

$$\sum F = F_s = ma \rightarrow -kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento de la partícula con respecto a la posición de equilibrio y va dirigida en sentido opuesto.

Movimiento de una partícula unida a un muelle sin masa: movimiento armónico simple.



$$F_s = -kx$$

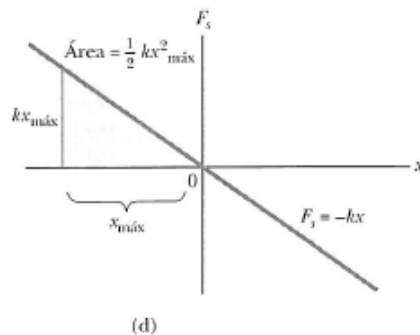
$$a = -\frac{k}{m}x$$

Por definición de aceleración

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Definiendo una nueva constante

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

Movimiento armónico simple: solución para la posición como función del tiempo.

$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

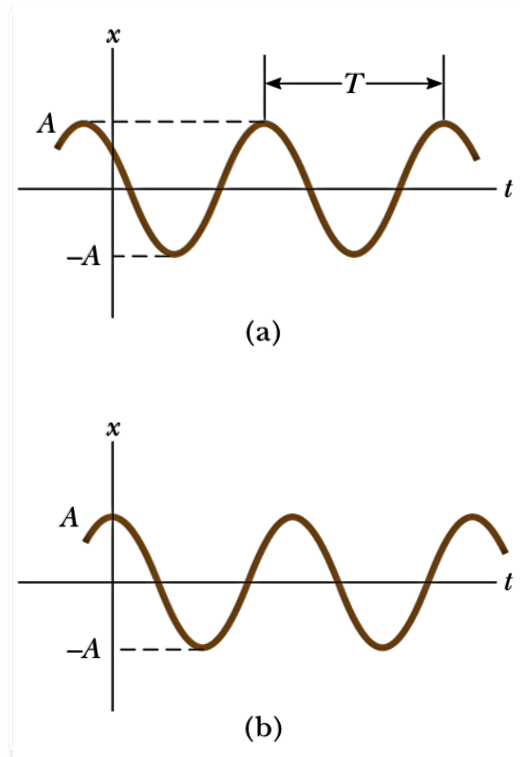
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

La siguiente función coseno es una solución

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

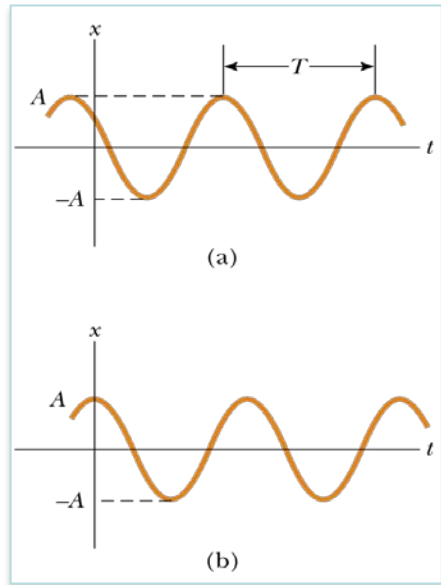
A Amplitud del movimiento: el valor máximo de la posición de la partícula, tanto en la dirección positiva como en la negativa

ϕ Constante de fase (o ángulo de fase)



Las dos quedan determinadas únicamente por la posición y velocidad de la partícula en el instante $t = 0$.

Movimiento armónico simple: definición de frecuencia angular y fase.



$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

La siguiente función coseno es una solución

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

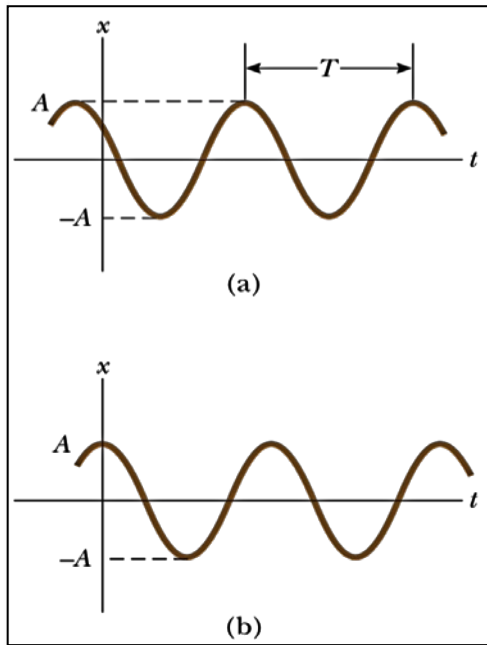
Frecuencia angular (en el sistema internacional se mide en rad/s).

$$\boxed{\omega t + \phi}$$

Fase del movimiento

La solución es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt se incrementa en 2π radianes

Movimiento armónico simple: definición de periodo.



$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

La siguiente función coseno es una solución

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

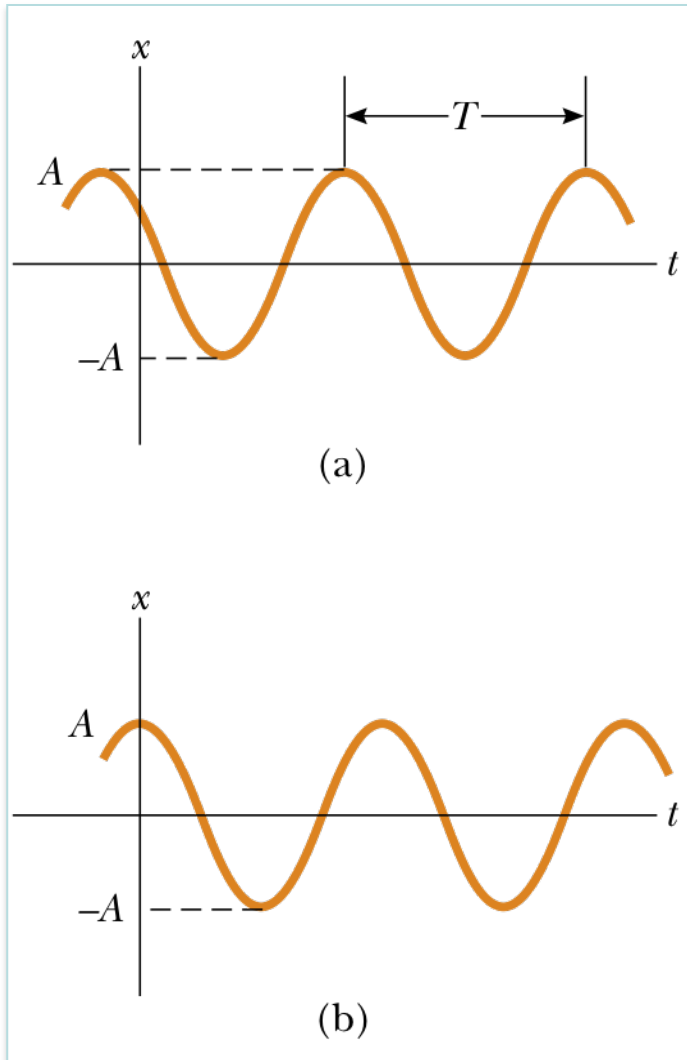
El periodo T del movimiento es el tiempo que necesita la partícula en cubrir un ciclo completo de su movimiento

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Se mide en segundos

Movimiento armónico simple: definición de frecuencia.



$$F_s = -kx$$

**Ecuación de movimiento:
ecuación diferencial de segundo orden**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La siguiente función coseno es una solución

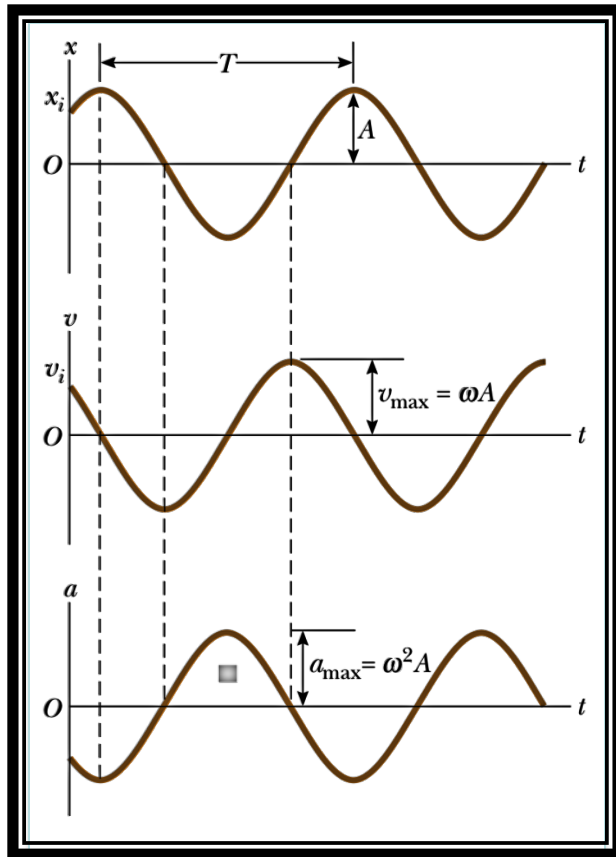
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

La frecuencia f es el inverso del periodo, y representa el número de oscilaciones que la partícula lleva a cabo la partícula por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se mide en ciclos por segundo o Herzios (Hz)

Movimiento armónico simple: velocidad y aceleración.



Velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

Valores límites: $\pm \omega A$

Aceleración

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

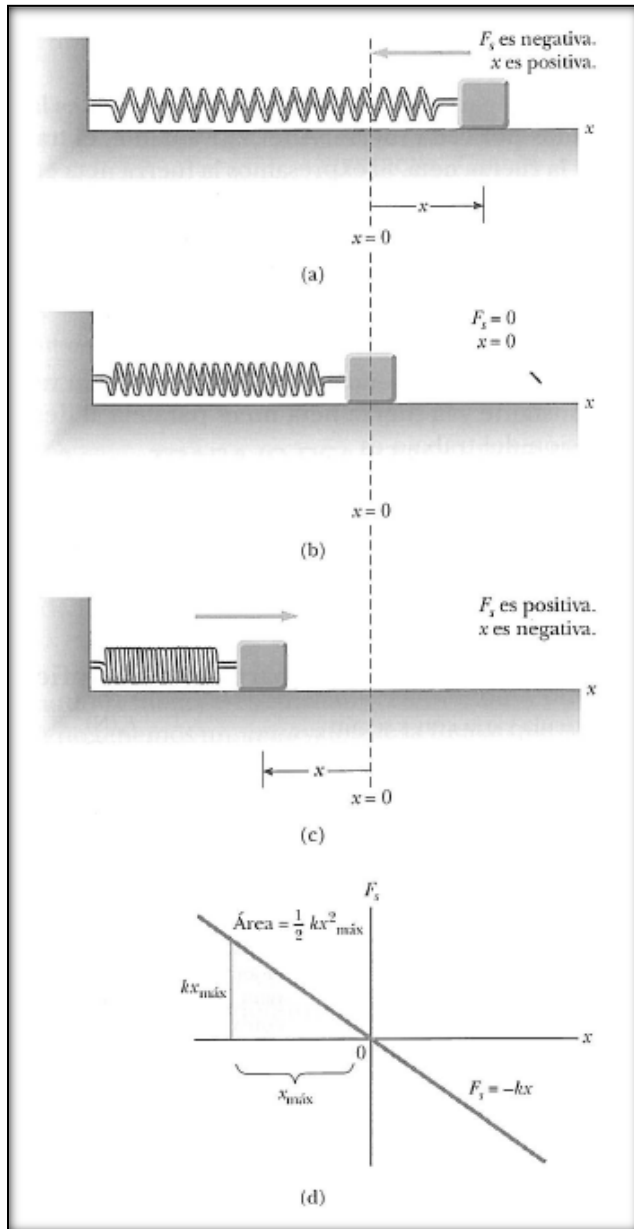
Valores límites: $\pm \omega^2 A$

Valores máximos del módulo de la aceleración y la velocidad

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Movimiento armónico simple: consideraciones energéticas.



Supongamos que el movimiento se realiza sobre una superficie horizontal (unidimensional, a lo largo de la dirección x) y sin rozamiento.

Podemos considerar a la combinación del muelle y del objeto unido a él como un sistema aislado.

Como la superficie no tiene rozamiento, la energía mecánica total del sistema permanece constante

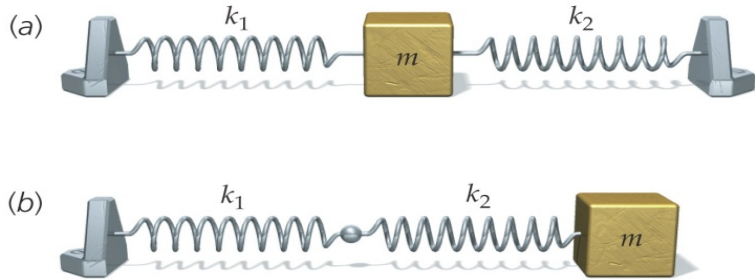
Suponiendo que el muelle carece de masa, la energía cinética se debe al movimiento de la partícula

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

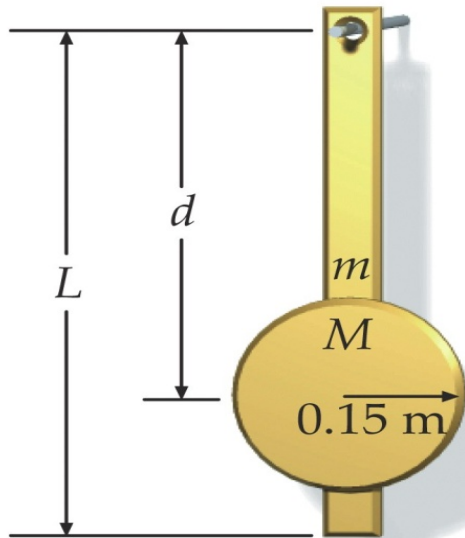
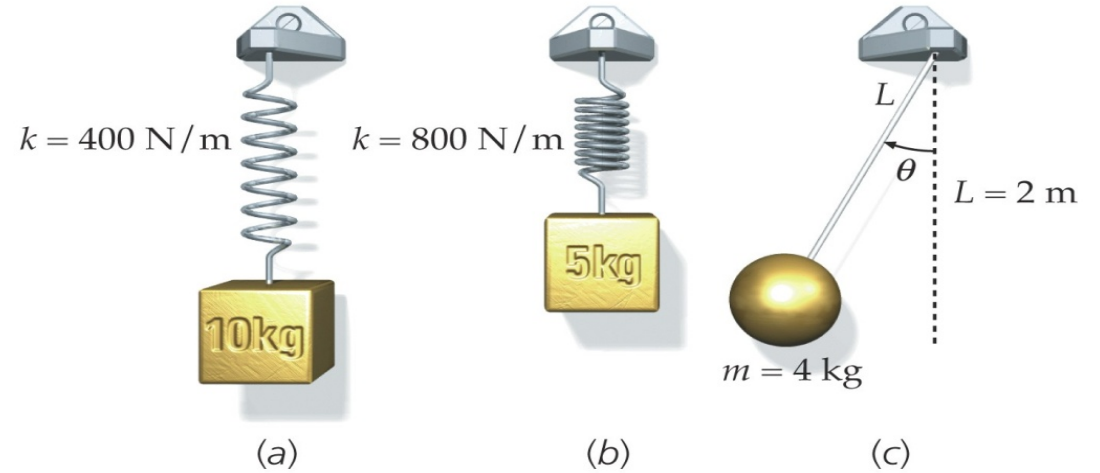
La energía potencial elástica del sistema se debe al muelle

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Mostrar que para las situaciones representadas, el objeto oscila (a) como si estuviera sujeto a un muelle con constante de resorte k_1+k_2 , y, en el caso (b) $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$

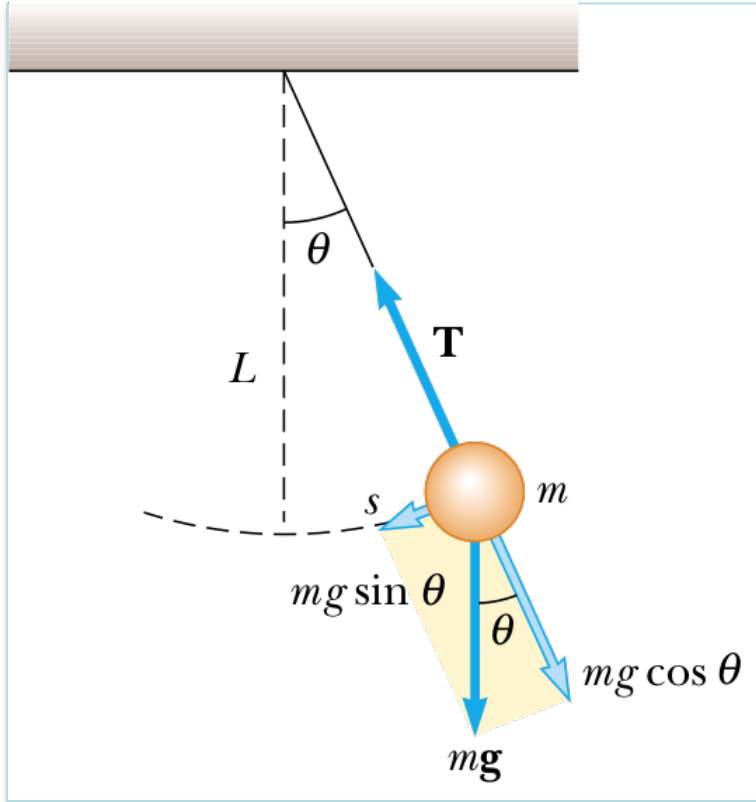


Encontrar la frecuencia de resonancia para cada uno de los sistemas



La figura muestra el péndulo de un reloj. La barra de longitud $L=2.0 \text{ m}$ tiene una masa $m = 0.8 \text{ kg}$. El disco tiene una masa $M= 1.2 \text{ kg}$, y radio 0.15 m . El período del reloj es 3.50 s . ¿Cuál debería ser la la distancia d para que el período del péndulo fuera 2.5 s

El péndulo simple: definición



Consiste en un objeto puntual de masa m , suspendido de una cuerda o barra de longitud L , cuyo extremo superior está fijo.

En el caso de un objeto real, siempre que el tamaño del objeto sea pequeño comparado con la longitud de la cuerda, el péndulo puede modelarse como un péndulo simple.

Cuando el objeto se desplaza hacia un lado y luego se suelta, oscila alrededor del punto más bajo (que es la posición de equilibrio).

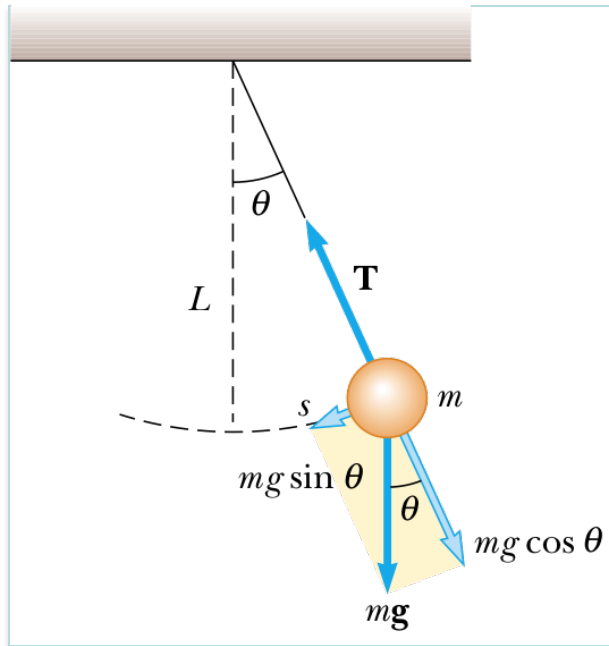
El movimiento se produce en un plano vertical.

El péndulo está impulsado por la fuerza de la gravedad.

El péndulo simple: ecuación de movimiento

Fuerzas que actúan sobre el objeto:

- La fuerza ejercida por la cuerda, \vec{T}
- Gravedad, $m\vec{g}$



La componente tangencial de la fuerza de la gravedad, $mg \sin(\theta)$ siempre actúa hacia la posición de equilibrio, en sentido opuesto al desplazamiento.

La componente tangencial de la fuerza de la gravedad es una fuerza de recuperación.

Ley de Newton para escribir la ecuación del movimiento en la dirección tangencial

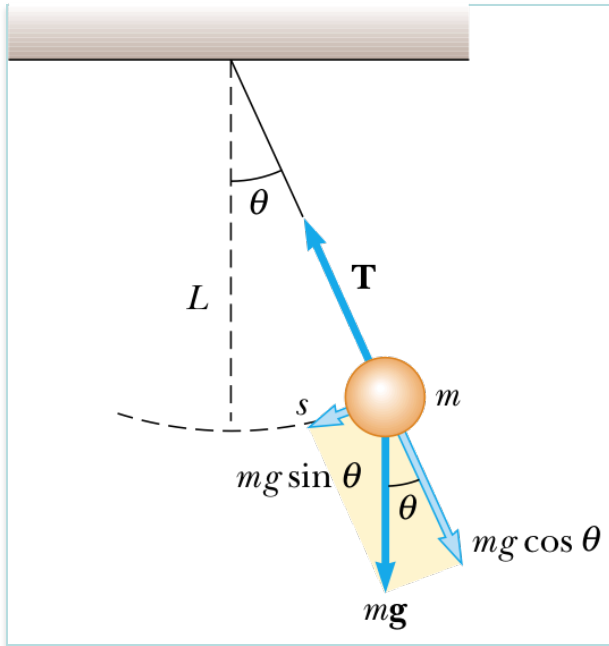
$$F_t = ma_t \rightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

s es la posición medida a lo largo del arco circular.

El signo menos indica que la fuerza tangencial apunta hacia la posición de equilibrio.

El péndulo simple: ecuación de movimiento

Ley de Newton para escribir la ecuación del movimiento en la dirección tangencial.



$$F_t = ma_t \rightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Si medimos el ángulo en radianes

$$s = L\theta$$

Como la longitud del hilo es constante

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Finalmente, la ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \quad \text{En general no se trata de un auténtico movimiento armónico simple}$$

El péndulo simple: ecuación de movimiento para ángulos pequeños

Aproximación para ángulos pequeños, si están expresados en radianes

TABLA 12.1

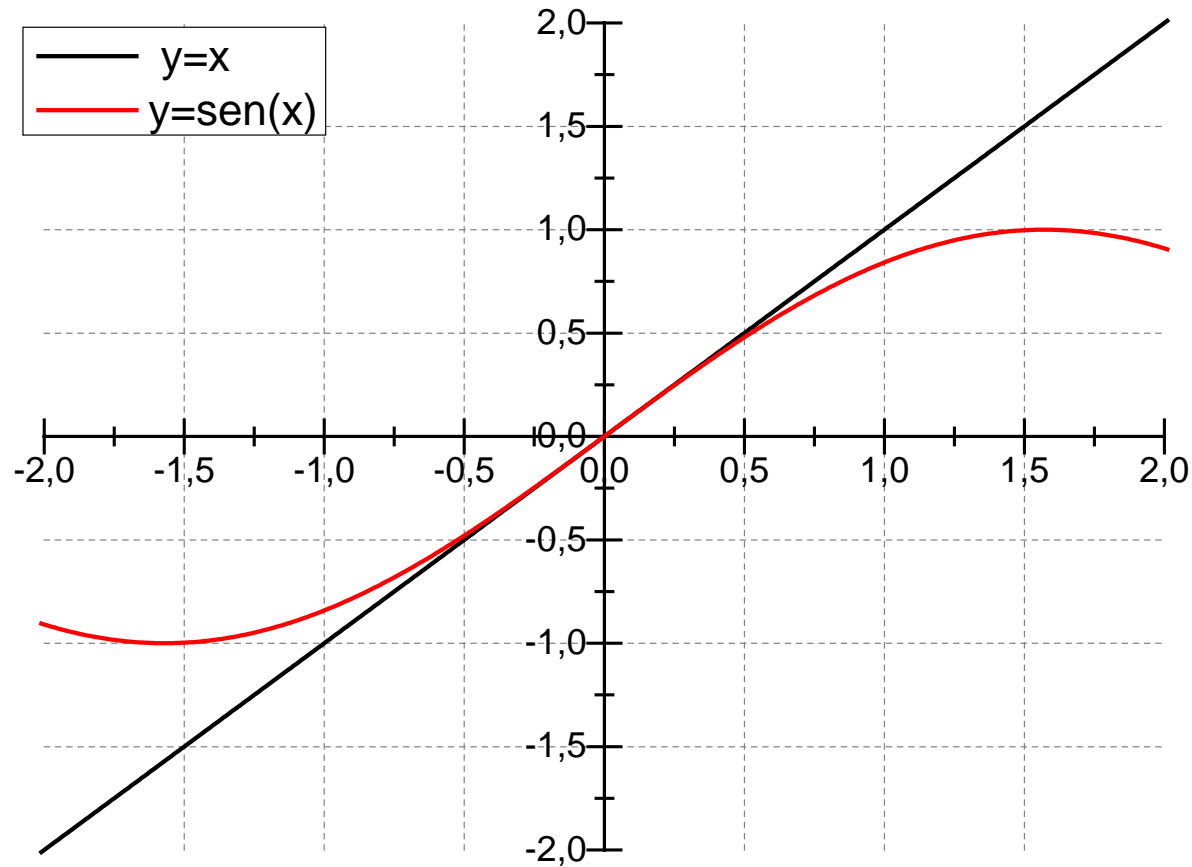
Ángulos y senos de ángulos

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

Ángulo (grados)	Ángulo (radianes)	Senos del ángulo	Porcentaje de diferencia (%)
0	0,0000	0,0000	0,0
1	0,0175	0,0175	0,0
2	0,0349	0,0349	0,0
3	0,0524	0,0523	0,0
5	0,0873	0,0872	0,1
10	0,1745	0,1736	0,5
15	0,2618	0,2588	1,2
20	0,3491	0,3420	2,1
30	0,5236	0,5000	4,7

El péndulo simple: ecuación de movimiento para ángulos pequeños

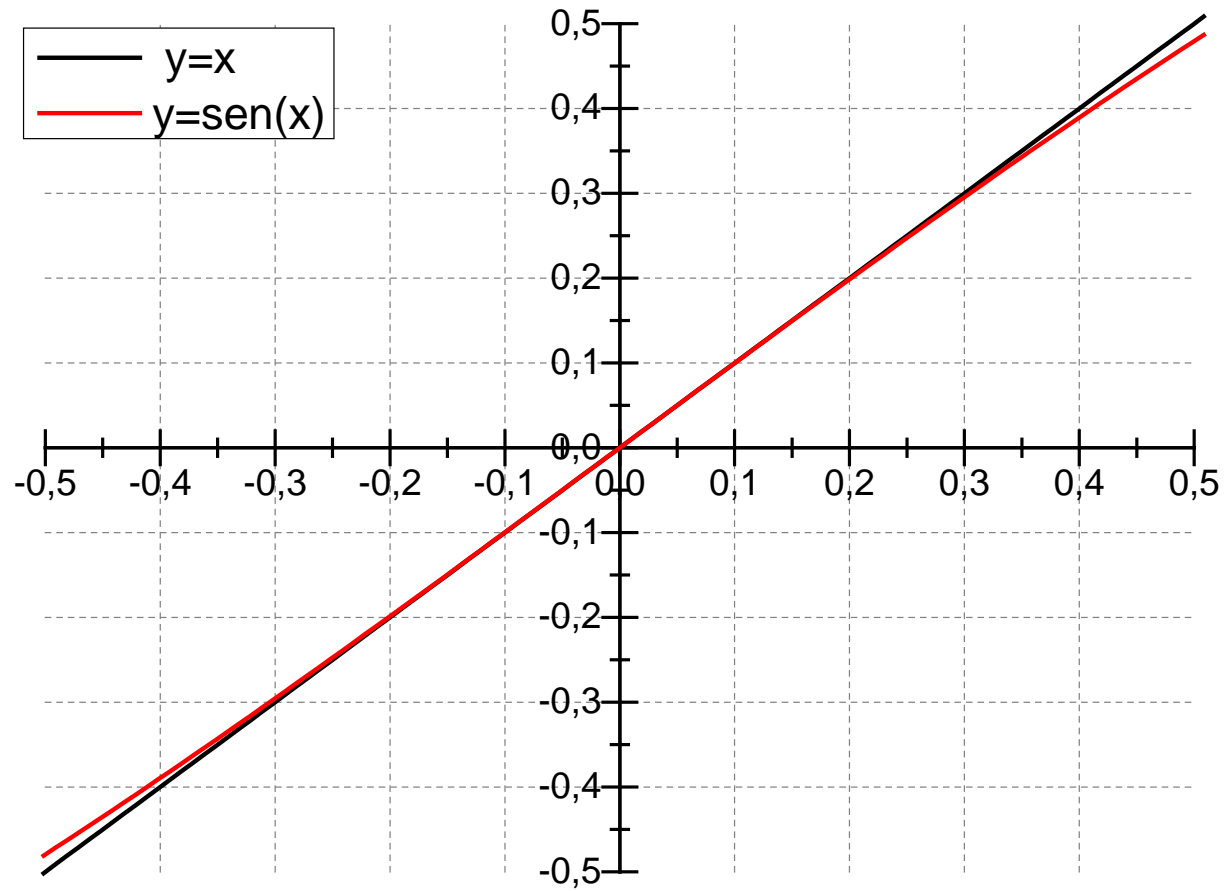
Aproximación para ángulos pequeños, si están expresados en radianes



$$\sin(\theta) \approx \theta$$

El péndulo simple: ecuación de movimiento para ángulos pequeños

Aproximación para ángulos pequeños, si están expresados en radianes



$$\sin(\theta) \approx \theta$$

El péndulo simple: ecuación de movimiento para ángulos pequeños

Aproximación para ángulos pequeños, si están expresados en radianes $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

Solución

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

Ecuación del movimiento armónico simple con

Frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Posición angular máxima

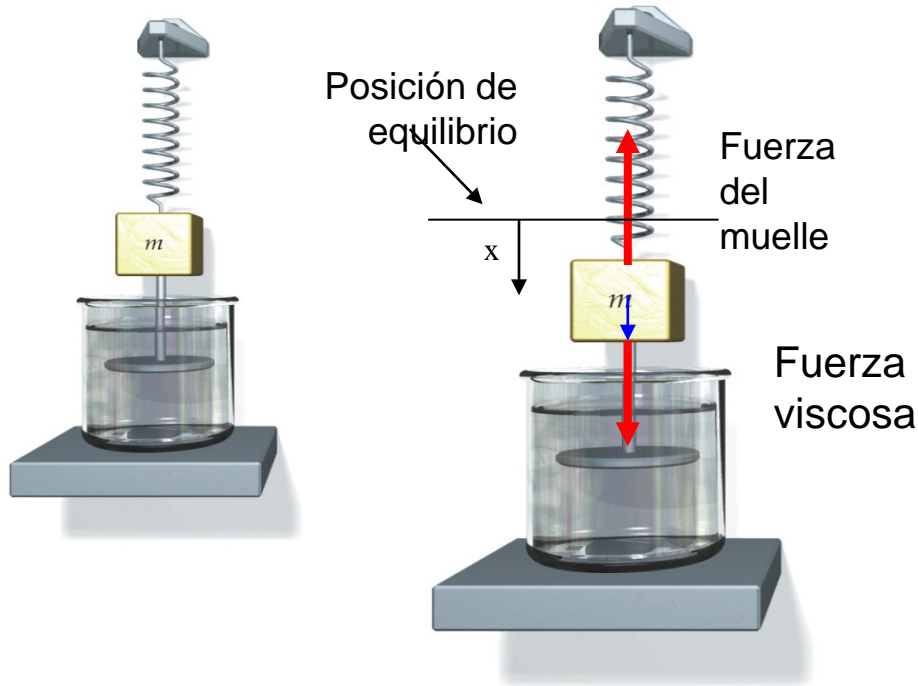
$$\theta_{max}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

**Independiente de la masa y de la
posición angular máxima**

Oscilaciones amortiguadas



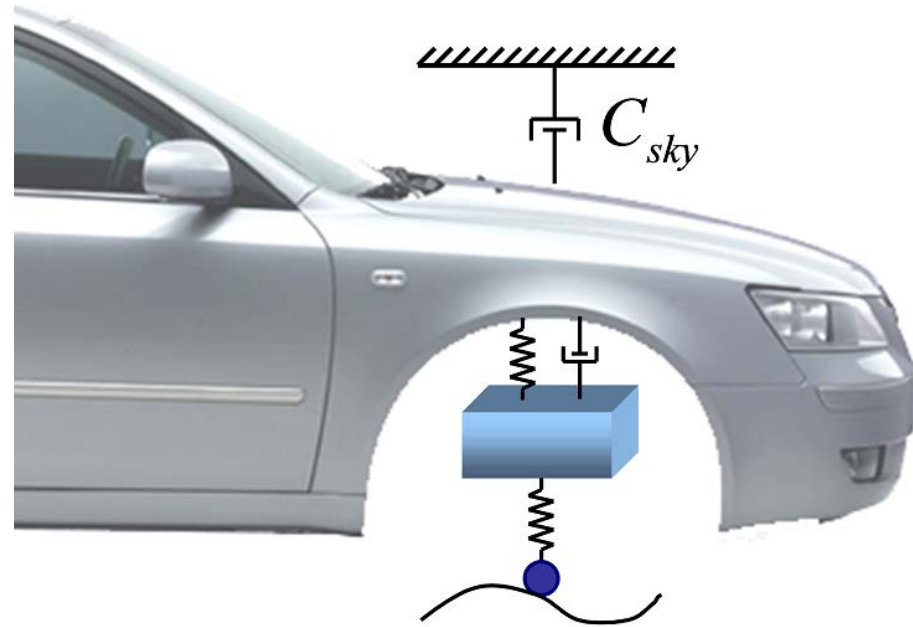
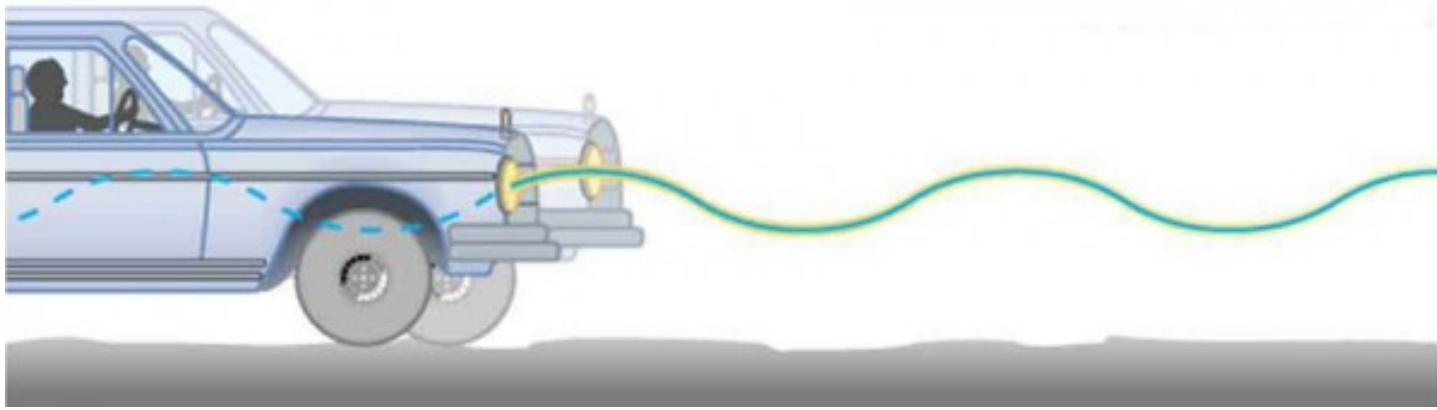
$$\sum F = -k x + b v = m a$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - b \frac{dx}{dt} + k x = 0$$

$$x = A_o e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \delta)$$

$$A = A_o e^{-(b/2m)t} \quad \text{and} \quad \omega' = \omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_o} \right)^2}$$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m A_o^2 e^{-(b/m)t} \omega^2 = E_o e^{-(b/m)t}$$



Oscilaciones amortiguadas: Definición

Las fuerzas resistivas, como el rozamiento, frenan el movimiento del sistema.

La energía mecánica del sistema disminuye con el tiempo y el movimiento se amortigua.

Supongamos una fuerza resistiva proporcional a la velocidad y de sentido es opuesto a la misma

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

Donde b es una constante relacionada con la intensidad de la fuerza resistiva.

La segunda ley de Newton sobre la partícula vendría dada por

$$\sum F_x = -kx - bv = ma_x$$

Por definición de velocidad y aceleración

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Oscilaciones amortiguadas: Ecuación de movimiento

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Si suponemos que los parámetros del sistema son tales que $b < \sqrt{4mk}$
(fuerza resistiva pequeña)

La solución vendría dada por

$$x = \left(Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \right) \cos(\omega t + \phi)$$

Donde la frecuencia angular del movimiento sería

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

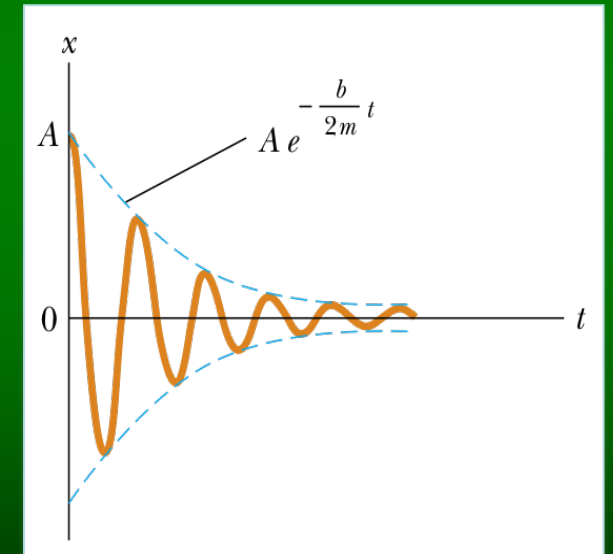
La solución formal es muy similar a la de un movimiento oscilatorio sin amortiguar,
pero ahora la amplitud depende del tiempo

Oscilaciones amortiguadas: Representación gráfica

$$x = \left(A e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \right) \cos(\omega t + \phi)$$

Oscilador subamortiguado

Cuando la fuerza viscosa es relativamente pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva, pero la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo, y el movimiento, en última instancia, cesa.



Oscilaciones amortiguadas: Oscilaciones críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas

Si definimos la **frecuencia natural** como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Podemos escribir la frecuencia angular de vibración del oscilador amortiguado como

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

A medida que la fuerza resistiva aumenta, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez.

Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $\frac{b_c}{2m} = \omega_0$:**Oscilador críticamente amortiguado**

El sistema ya no oscila más. Vuelve a la posición de equilibrio siguiendo una exponencial

Si el medio es tan viscoso que $\frac{b}{2m} > \omega_0$:**Oscilador sobreamortiguado**

El sistema no oscila. Retorna a la posición de equilibrio. Cuando más viscoso sea el medio, más tarda en volver.

Oscilaciones amortiguadas:

Oscilaciones críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas

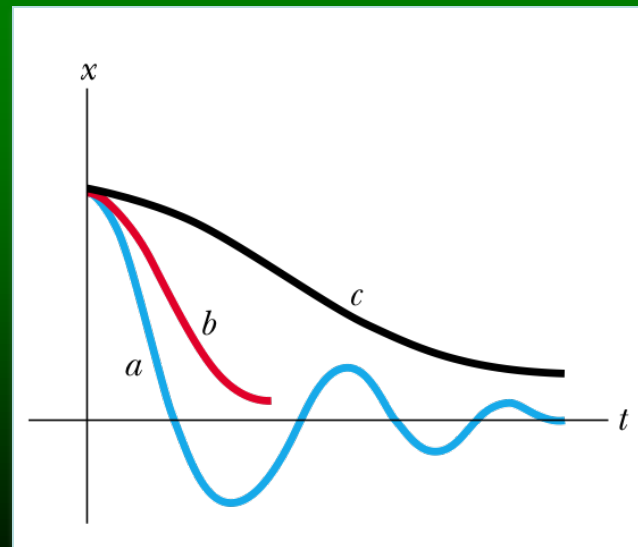
A medida que la fuerza resistiva aumenta, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez.

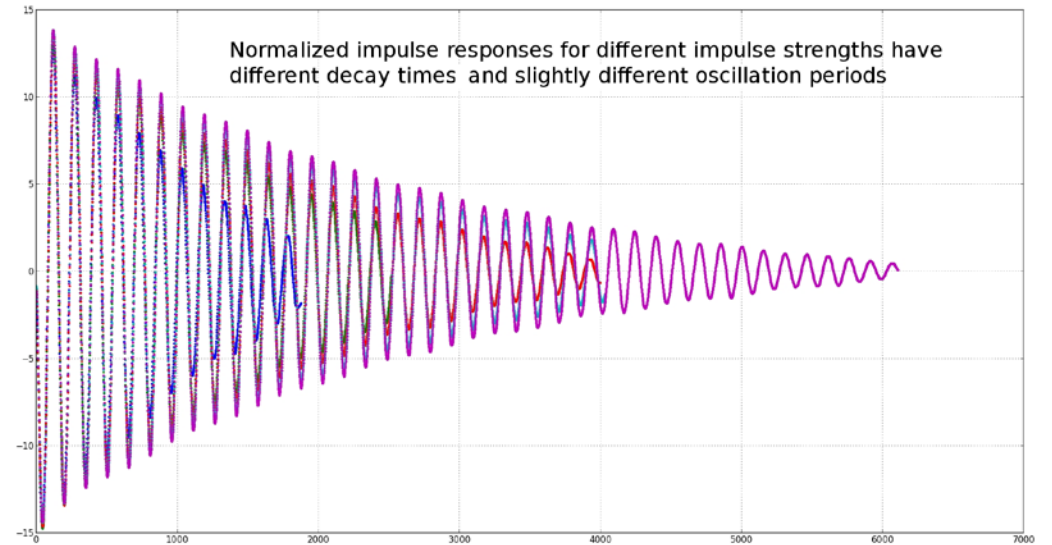
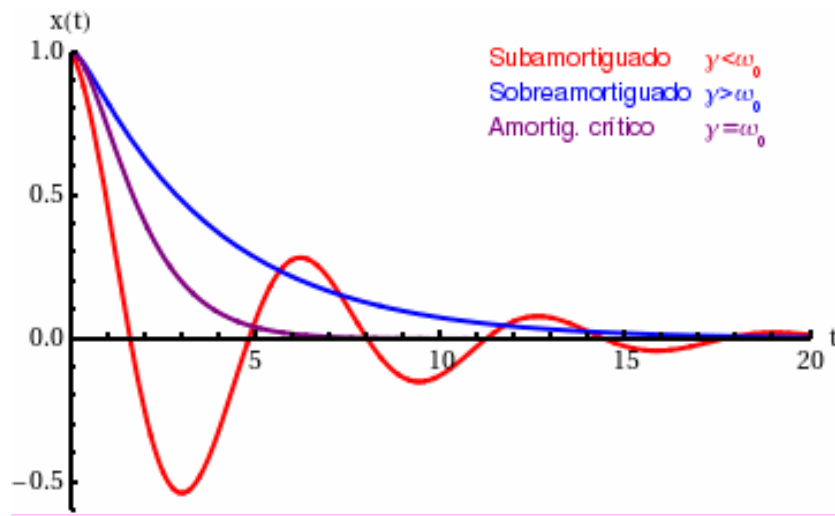
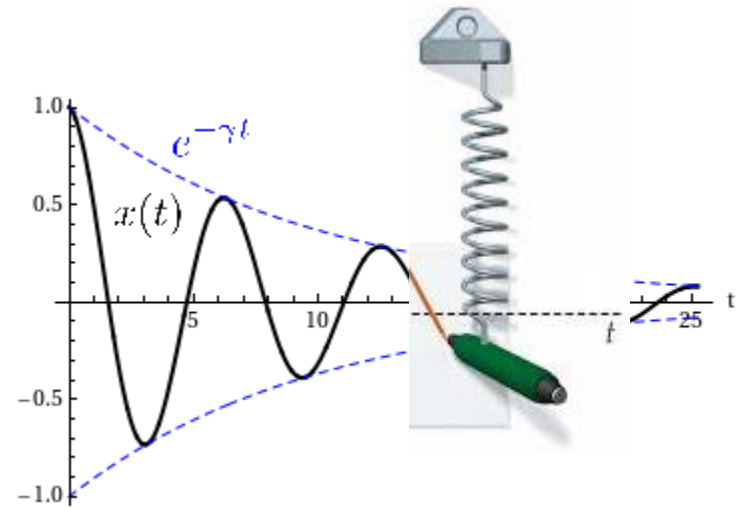
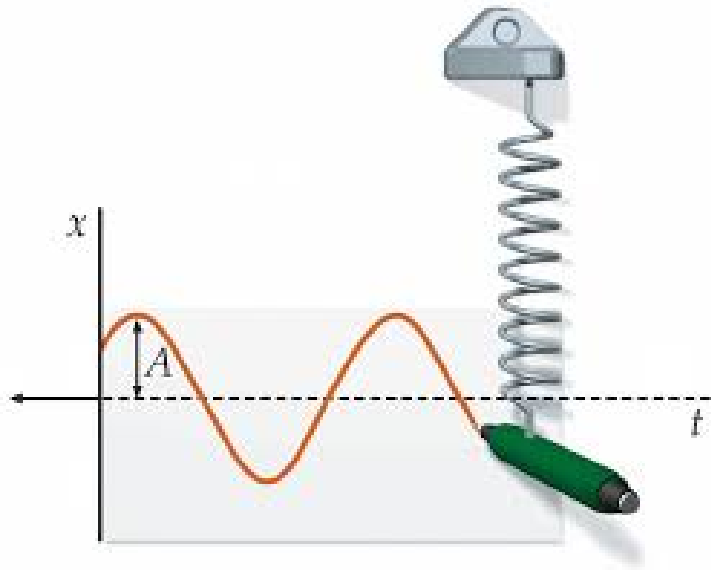
Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $\frac{b_c}{2m} = \omega_0$:Oscilador críticamente amortiguado

El sistema ya no oscila más. Vuelve a la posición de equilibrio siguiendo una exponencial

Si el medio es tan viscoso que $\frac{b}{2m} > \omega_0$:Oscilador sobreamortiguado

El sistema no oscila. Retorna a la posición de equilibrio. Cuando más viscoso sea el medio, más tarda en volver.





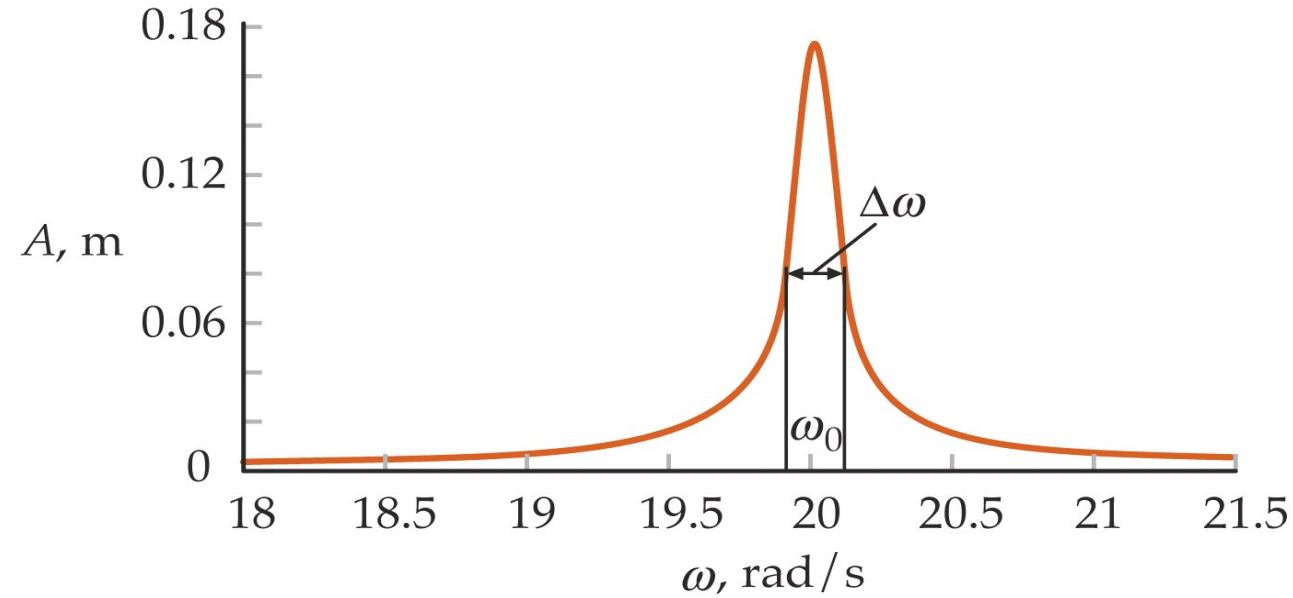
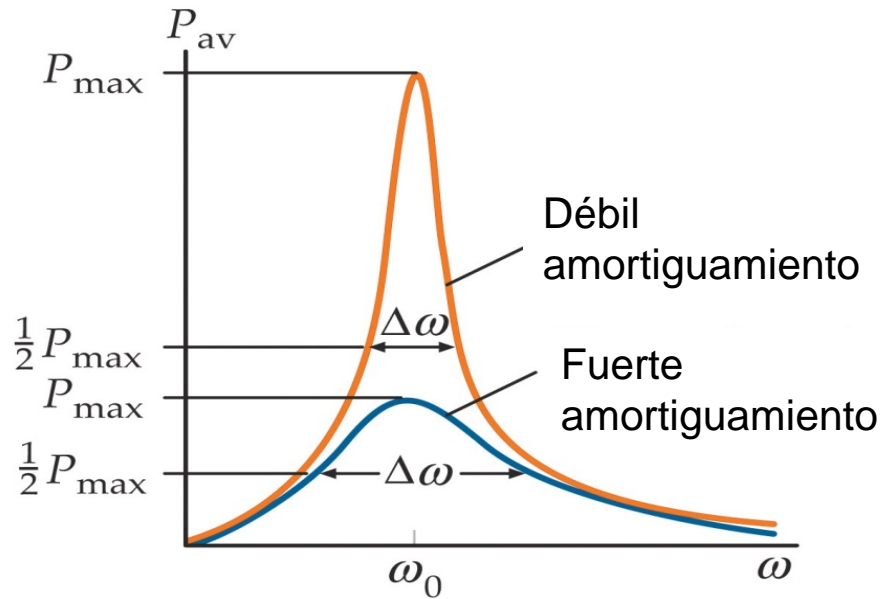
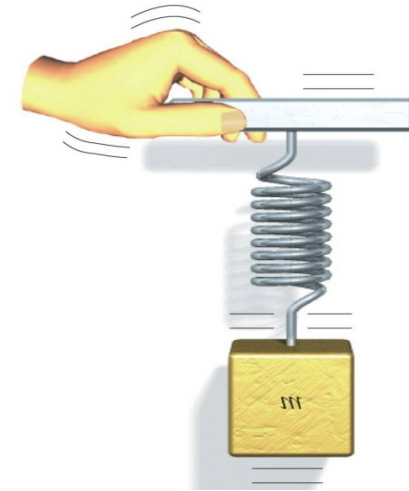
Oscilaciones forzadas y resonancia

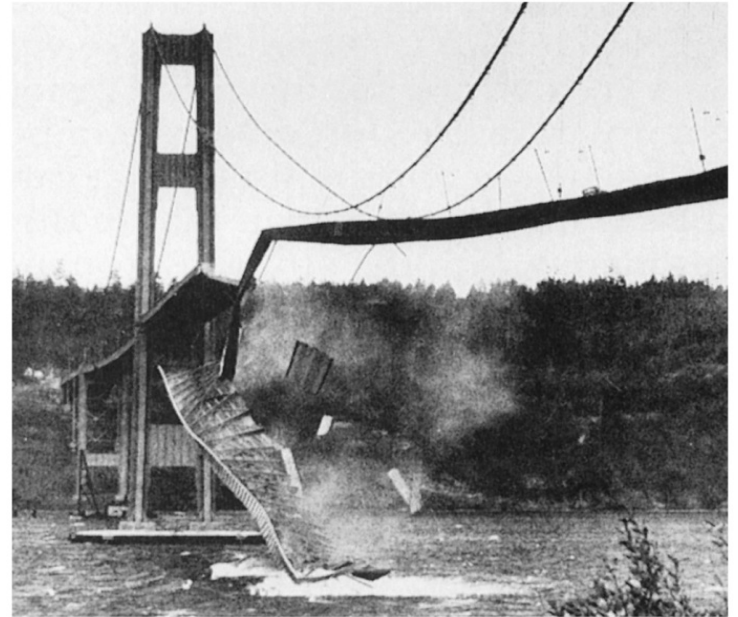
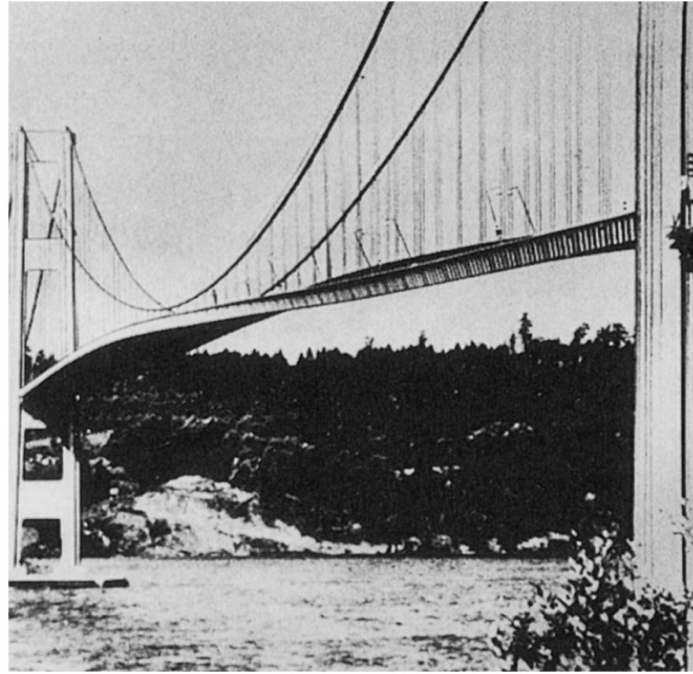
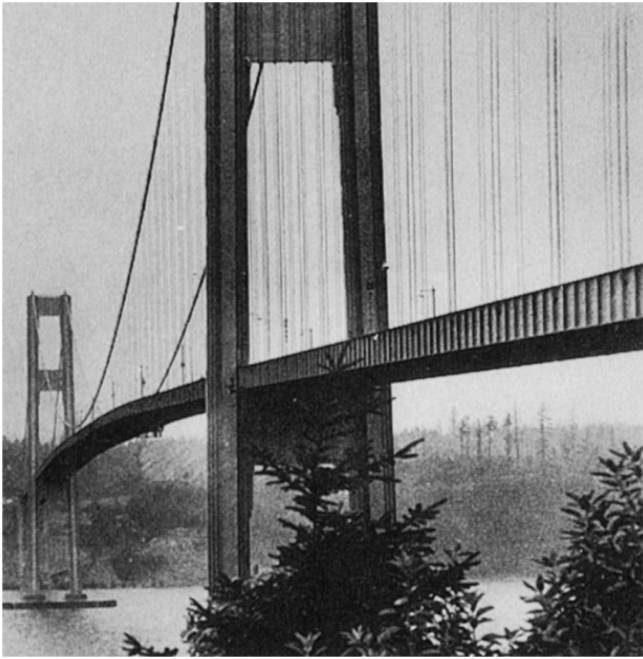


Cuando actúan fuerzas externas periódicas, adicionales a fuerzas restauradoras y amortiguación

Fuerza externa periódica

$$F_{ext} = F_o \cos \omega t$$





Oscilaciones forzadas: Definición

La energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye con el tiempo.

Es posible compensar esta pérdida de energía aplicando una fuerza externa que realice un trabajo positivo sobre el sistema.

La amplitud del movimiento permanece constante si la energía que se aporta en cada ciclo del movimiento es exactamente igual a la pérdida de energía mecánica en cada ciclo debida a las fuerzas resistivas.

Ejemplo de oscilador forzado: oscilador amortiguado al que se le comunica una fuerza externa que varía periódicamente con el tiempo.

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

constante frecuencia angular externa

La segunda ley de Newton queda como

$$\sum F = ma \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Oscilaciones forzadas: Definición

$$\sum F = ma \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Tras un periodo de tiempo suficientemente largo, cuando el aporte de energía por cada ciclo que realiza la fuerza externa iguale a la cantidad de energía mecánica que se transforma en energía interna en cada ciclo, se alcanzará una situación de estado estacionario.

Solución

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

En un oscilador forzado, la partícula vibra con la frecuencia de la fuerza externa

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

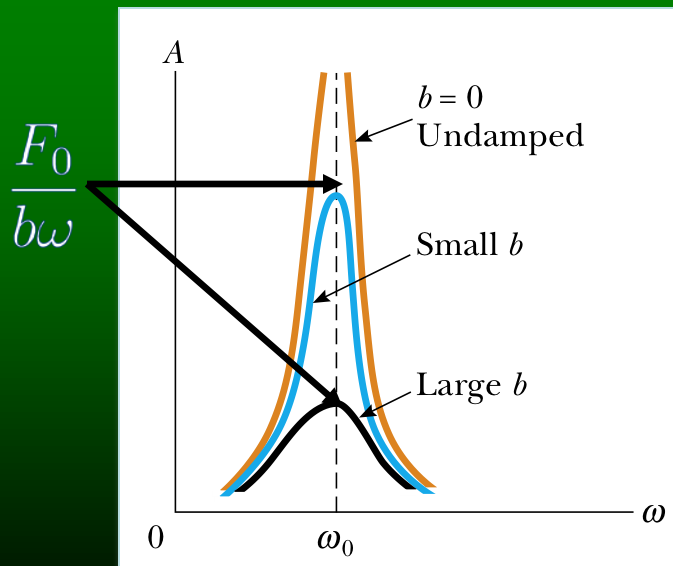
La amplitud del oscilador forzado es constante para una fuerza externa dada

Oscilaciones forzadas: Amplitud

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$



La amplitud incrementa al disminuir la amortiguación.
Cuando no hay amortiguación, la amplitud del estado estacionario tiende a infinito en la frecuencia de resonancia.

Oscilaciones forzadas: Amplitud

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La amplitud del oscilador forzado es constante para una fuerza externa dada (es esa fuerza externa la que conduce al sistema a un estado estacionario).

Si la amortiguación es pequeña, la amplitud se hace muy grande cuando la frecuencia de la fuerza externa se aproxima a la frecuencia propia del oscilador.

Al drástico incremento en la amplitud cerca de la frecuencia natural se le denomina **resonancia**, y la frecuencia natural del oscilador se le denomina también **frecuencia de resonancia**.

Factor de calidad Q

El *factor de calidad*, Q , de un oscilador mide cómo de agudo es el pico de una resonancia. Se define, en términos de la energía como

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta E|/E}$$

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía almacenada promedio}}{\text{Energía disipada en un periodo}}$$

Ahora usamos la relación $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau}$

$$E(t) = A_0 e^{-t/\tau} \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{\tau} A_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E(t)}{\tau}$$

$$\frac{dE(t)}{E(t)} = \frac{dt}{\tau} \quad \xrightarrow{\text{aproximamos}} \quad \approx \frac{\Delta E(t)}{E(t)} = \frac{\Delta t}{\tau} \quad \text{entonces} \quad \frac{\Delta E(t)}{E(t)} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta E|/E} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

21.1. Una partícula que oscila armónicamente toma 1 s para pasar por dos puntos de su trayectoria con la misma velocidad, que se encuentran separados 20 cm. En 2 s más vuelve a pasar de regreso por el segundo punto. Calcular el periodo y la amplitud del movimiento.

$$T = 6s$$

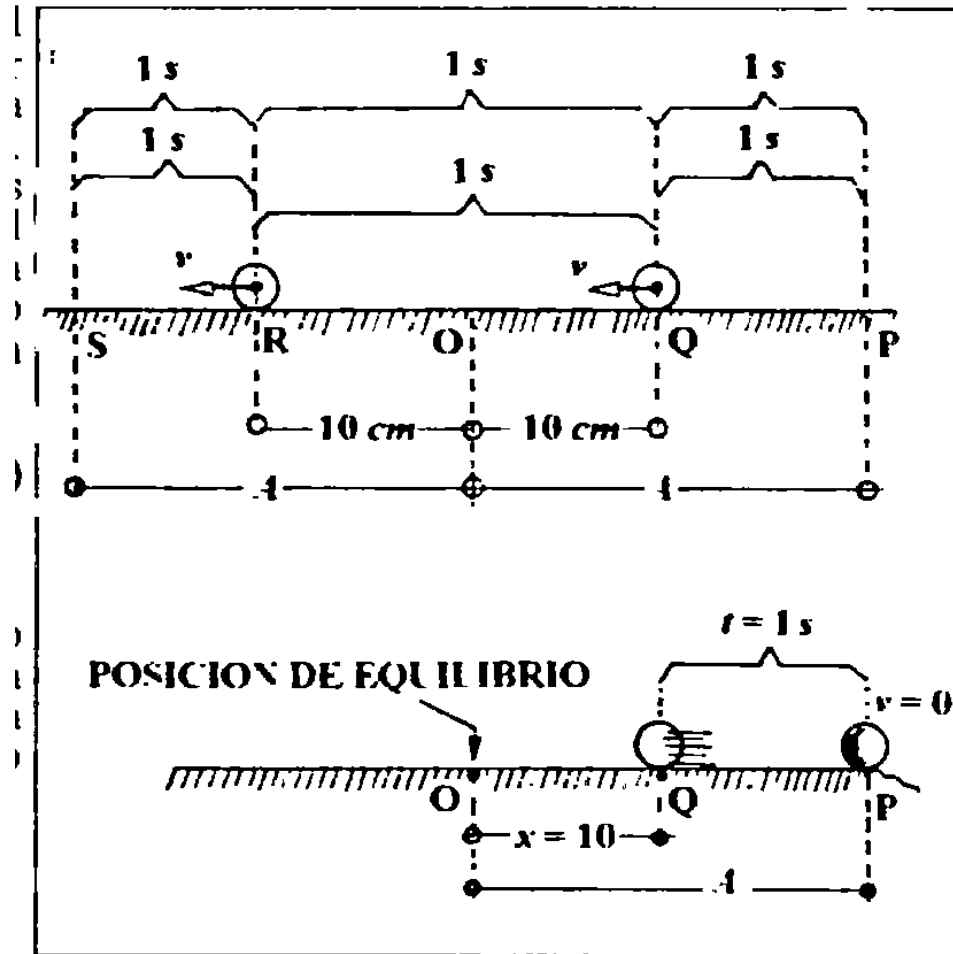
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

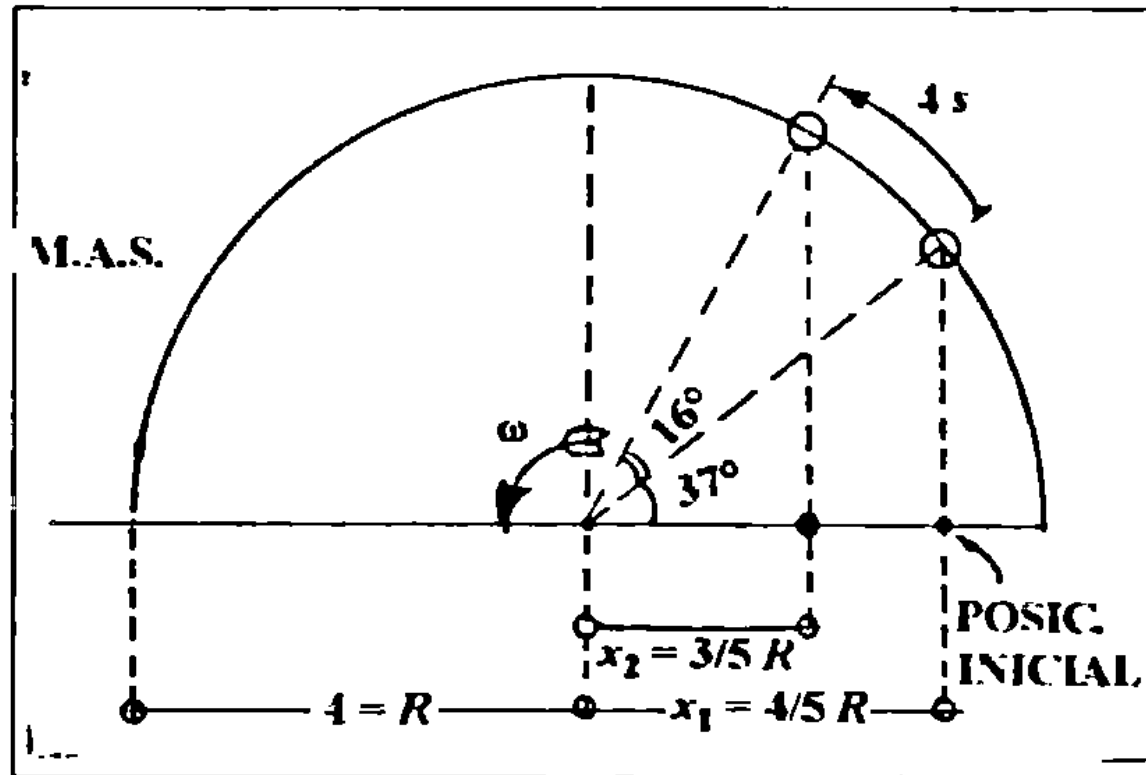
$$10 \text{ cm} = A \cos\left(\frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1s\right)$$

$$10 \text{ cm} = A \cdot 1/2$$

$$A = 20 \text{ cm}$$



21.2. Determinar la ecuación del movimiento de la proyección sobre un diámetro de un punto que describe una circunferencia de 35cm de radio, sabiendo que al comenzar el movimiento la proyección incide en los $\frac{4}{5}$ del radio respecto al centro, y luego de 4s su proyección da en los $\frac{3}{5}$ del radio. Indique también el periodo del movimiento.



21.2. Determinar la ecuación del movimiento de la proyección sobre un diámetro de un punto que describe una circunferencia de 35cm de radio, sabiendo que al comenzar el movimiento la proyección incide en los 4/5 del radio respecto al centro, y luego de 4s su proyección da en los 3/5 del radio. Indique también el periodo del movimiento.

a) t=0 s: $x_1 = A \cos(\omega t + \delta)$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}R = R \cos \delta \Rightarrow \delta = 37^\circ = 0.645772 \text{ rad}$$

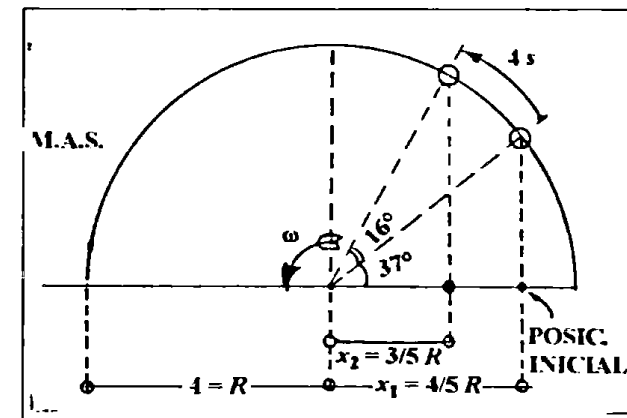
b) t = 4s $x_2 = A \cos(4. \omega + 37^\circ)$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}R = R \cos(4. \omega + 37^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4. \omega + 37^\circ = 53^\circ \Rightarrow \omega = 4 \frac{^\circ}{s} = \frac{\pi}{45} \text{ rad/s}$$

periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/45} \Rightarrow T = 90 \text{ s}$

$$x_1(t) = 35 \cos\left(\frac{\pi}{45}t + 0.645772\right)$$



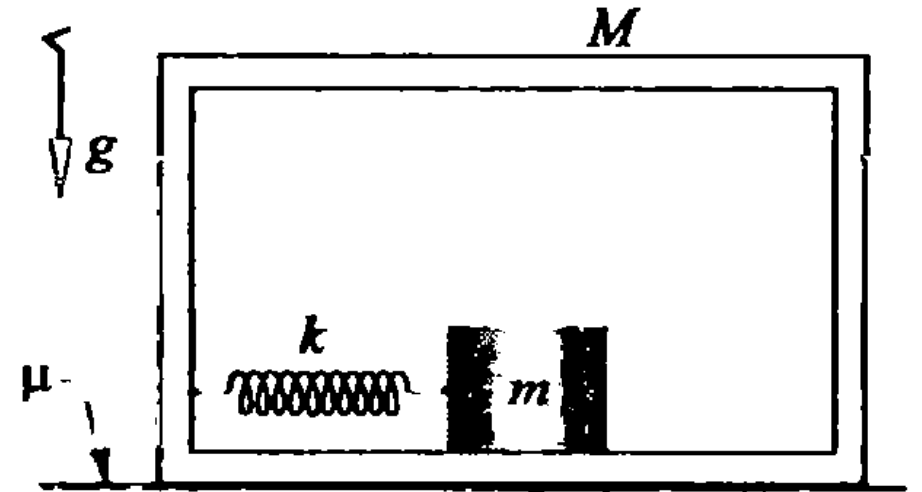
21.9. Un bloque de masa m unido por un resorte de constante elástica K a unacaja de masa M oscila armónicamente sin fricción ¿Con qué amplitud de las oscilaciones del bloque comenzará la caja a moverse por la mesa?

$$\sum F_x = 0 \quad F - fr_{max} = F - \mu N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N - (M + m)g = 0$$

$$F = fr_{max} = \mu (M + m)g = kA$$

$$A = \mu \frac{(M + m)g}{k}$$



21.18. Un dardo es impulsado con una velocidad $v_0 = 200\text{m/s}$, y se incrusta en un bloque de masa $M = 95\text{ g}$. Si el dardo tiene una masa $m = 5\text{ g}$. ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento oscilatorio?. Además, $k = 10\text{N/m}$, y no existe rozamiento.

