

Problemas de diagonalización, valores y vectores propios

Natalia Boal
Francisco José Gaspar
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Demuestra que u es un vector propio de A , ¿Cuál es el valor propio correspondiente?
- Comprueba que λu , con λ un escalar no nulo, también es un vector propio de A .
- Demuestra que v es un vector propio de A , ¿Cuál es el valor propio correspondiente?
- ¿es $u + v$ un vector propio de A ?

2. Para las siguientes matrices determina:

- el polinomio característico,
- los valores propios,
- bases de todos los subespacios fundamentales,
- la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Determina para cada matriz A , si es posible, una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. En los siguientes apartados, S es un conjunto linealmente independiente de vectores propios de A y E es el conjunto de los valores propios correspondientes. Determina la matriz A .

(a) $S = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$, $E = \{1, 1, -1\}$.

(b) $S = \{(1, 1, 1), (-3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$, $E = \{6, 0, 0\}$.

5. ¿Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz A ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Halla los valores propios de $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ sabiendo que:

- $(0, 1, -2), (1, 0, 4)$ y $(1, 0, -2)$ son vectores propios,
- $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$.

7. Sean h y f dos endomorfismos definidos sobre un espacio vectorial real V que, respecto de una base dada $\{a_1, a_2, a_3\}$ tienen por ecuaciones $Y = AX$ y $Y = BX$, respectivamente, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula los subespacios fundamentales de h , f y $f \circ h$.

8. Determina el endomorfismo h de \mathbb{R}^3 tal que:

- $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3\}$ es subespacio fundamental,
- $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ es subespacio fundamental,
- $h(0, 1, 1) = (-2, 3, 1)$.

Si el endomorfismo h es diagonalizable, halla una matriz P regular tal que PAP^{-1} sea diagonal.

9. Sea h el endomorfismo de \mathbb{R}^3 de ecuación $Y = AX$ respecto de la base canónica con

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -16 \\ 4 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Estudia si es diagonalizable y, si lo es, halla la matriz P tal que $PAP^{-1} = D$ donde D es la matriz diagonal semejante a A .

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ -3 & -1 & -5 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Estudia si A es semejante a una matriz diagonal considerando A como:

- (a) matriz real,
- (b) matriz compleja.

11. Halla el valor del parámetro a para el cual las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$$

son semejantes.

12. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (a) Sea $h \in \text{End}(V)$ y λ valor propio de h . Entonces, existe una base de V formada por vectores propios asociados a λ , esto es, $h(v) = \lambda v, \forall v \in V$.
- (b) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable, entonces A^k es diagonalizable con $k \in \mathbb{Q}$.
- (c) Sea $h \in \text{End} V$, si $\lambda = 0$ **no** es valor propio de h , entonces h es automorfismo.
- (d) Sean $h \in \text{End}(V)$ y λ y μ dos valores propios de h distintos. Si tomamos $v \in V(\lambda)$ y $w \in V(\mu)$ entonces $v + w \in V(\lambda + \mu)$.
- (e) Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, 0 es valor propio de $A \Leftrightarrow |A| = 0$.
- (f) Sea $h \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R} \ni |\lambda I_n - A| = 0$. Entonces

$$v \in \text{Ker}(h - \lambda 1_{\text{End}(\mathbb{R}^n)}) \Leftrightarrow v \in V(\lambda).$$

13. Considera el endomorfismo $h \in \text{End}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que

$$h(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = -a_2 + (a_0 + a_1 + a_2)x + (a_0 + 2a_2)x^2.$$

Calcula los subespacios fundamentales y, en caso de ser h un endomorfismo diagonalizable, determina una matriz Q tal que $D = Q A Q^{-1}$, con D matriz diagonal.

14. Sean V un espacio vectorial real, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y $h \in \text{End}(V)$ tal que

- $v_1, v_2 \in \text{Ker}(h)$,
- el polinomio característico de h es $x^2(x-1)(x+2)$,
- $h(v_3) = -2v_1 + v_3$,
- $h(v_4) = -2v_2 - 2v_4$.

- (a) Sin hacer ningún cálculo y teniendo en cuenta únicamente los datos que te dan en el enunciado, justifica que h es un endomorfismo diagonalizable.

- (b) Comprueba que los vectores $w_1 = v_2 + v_4$ y $w_2 = -2v_1 + v_3$ son vectores propios de h .
 - (c) Da una base de vectores propios de h y calcula D , la matriz coordenada de h respecto de esa base.
 - (d) Si A es la matriz coordenada de h respecto de la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, halla P regular tal que $A = P D P^{-1}$.
 - (e) ¿ h es biyectivo?
 - (f) Halla $\text{Im } f$.
15. Ahora realiza cada uno de los apartados del ejercicio anterior para el caso en el que $V = M_2(\mathbb{R})$ y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es su base canónica.