G. Aguilar, N. Boal, C. Clavero, F. Gaspar

5 Estabilidad de soluciones de equilibrio

Objetivos: Clasificar y analizar los puntos de equilibrio que aparecen en los sistemas diferenciales autónomos con dos variables dependientes. Analizar la estabilidad del sistema a partir de los puntos de equilibrio.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales **autónomo** en el que no aparece explícitamente la variable independiente t, dado por

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(x, y), \\ y'(t) &= G(x, y). \end{aligned}$$

A una solución de este sistema, dada por $x(t) = \phi(t)$, $y(t) = \psi(t)$ se le llama **trayectoria del sistema**. Para las trayectorias se cumplen las siguientes propiedades:

a) Dado un punto P en el plano, existe una trayectoria que pasa por él.

b) Una traslación de una trayectoria es una trayectoria.

c) Si dos trayectorias pasan por un mismo punto, una es traslación de la otra.

d) Las trayectorias son dirigidas, es decir, cuando t crece los puntos de la curva solución $(\phi(t), \psi(t))$ se mueven a lo largo de la trayectoria en una dirección.

e) Una trayectoria no puede cruzarse a si misma.

Al plano xy se le llama **plano de fases** y la representación gráfica del conjunto de las trayectorias se llama **retrato de fase** del sistema. El retrato de fase da información sobre las soluciones del sistema diferencial. Nos planteamos dos cuestiones:

1) Si dos trayectorias están "una cerca de otra", ¿permanecerán cercanas en tiempos posteriores o se alejarán una de otra?; esto nos lleva a la **estabilidad**. En un punto **estable** permanecerán cercanas, en uno **inestable** se alejarán.

2) ¿Cómo se comportan las trayectorias cuando t tiende a $+\infty$ o a $-\infty$?; esto nos lleva a la **estabilidad asintótica**.

Diremos que (x_0, y_0) es un **punto crítico** del sistema si $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$. El punto crítico puede ser:

a) Un **centro**, si está encerrado por una familia infinita de trayectorias cerradas, arbitrariamente cercanas a él, pero ninguna pasa por él.

b) Un **punto de silla**.

c) Un **punto espiral**, si existe un entorno C alrededor de él, tal que toda trayectoria que esté dentro del entorno gira en espiral alrededor de él, aproximándose al punto.

d) Un **nodo**, si hay una familia infinita de trayectorias que entran a él.

El punto crítico se dice que es **estable** si para cada $R > 0$ existe r con $0 \leq r \leq R$, tal que todas las trayectorias que entran al entorno de radio r con centro en (x_0, y_0) en un algún momento t_0, permanecen dentro del entorno de radio R con centro en (x_0, y_0) para $t > t_0$. El punto se dice que es **asintóticamente estable** si es estable y existe un entorno C con centro en (x_0, y_0), tal que toda trayectoria que este dentro de C en un momento t_0 se aproxima a (x_0, y_0) cuando $t \to \infty$.

SISTEMAS LINEALES

Consideramos el sistema lineal de coeficientes constantes $Y' = AY$, con una matriz cuadrada de orden 2. El único punto crítico de este sistema es el origen $(0, 0)$. El tipo de punto crítico viene determinado por los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz A. Así:

- Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

  i) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ el origen es un **nodo inestable**.

  ii) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ el origen es un **nodo asintóticamente estable**.

  iii) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ el origen es un **punto silla inestable**.

- Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

i) Si $0 < \lambda$ el origen es un **nodo inestable**.

ii) Si $\lambda < 0$ el origen es un **nodo asintóticamente estable**.

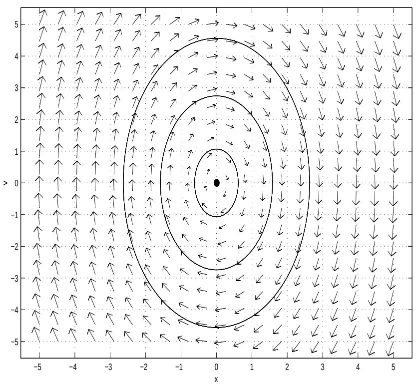
- Supongamos que λ_1 y λ_2 son complejos conjugados.

i) Si $0 < Re(\lambda_1)$ el origen es un **punto espiral inestable**.

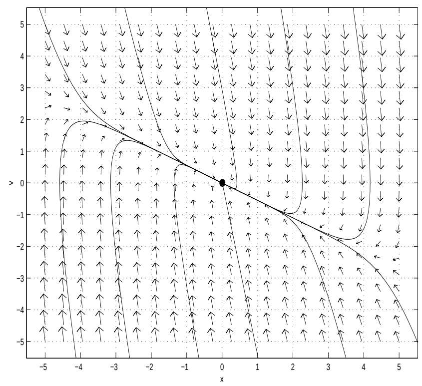
ii) Si $Re(\lambda_1) < 0$ el origen es un **punto espiral asintóticamente estable**.

iii) Si $0 = Re(\lambda_1)$ el origen es un **centro estable**, pero no es asintóticamente estable.

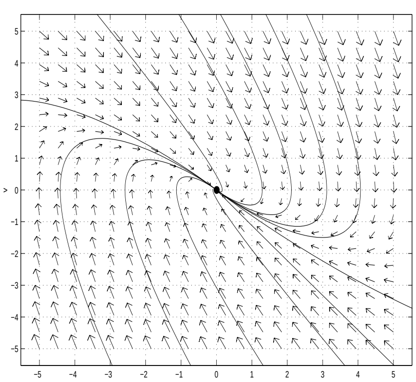
Ejercicio 1. Las siguientes figuras corresponden a las trayectorias de cuatro casos distintos del problema de masa-resorte considerado en la práctica 3; en ellas se representa el plano de fases asociado al sistema diferencial equivalente a la ecuación diferencial de segundo orden que modela el fenómeno. Relaciona las figuras con el tipo de movimiento y el tipo de punto crítico que surge en cada caso.



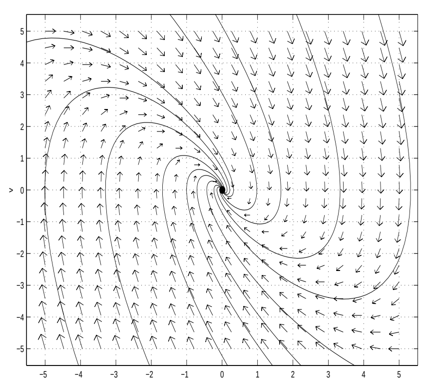
(a)



(b)



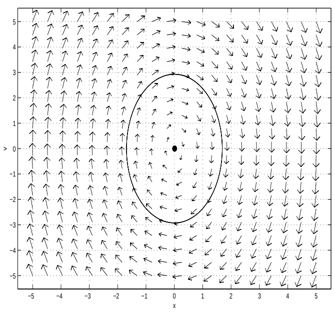
(c)



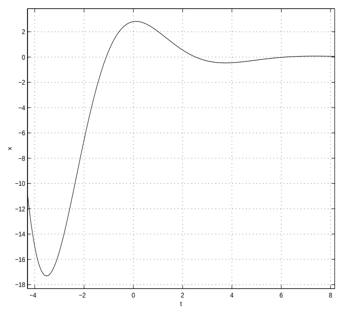
(d)

figura a	mov. sobreamortiguado	nodo asint. estable.
figura b	mov. subamortiguado	nodo asint. estable.
figura c	mov. vibratorio armónico	centro estable (no asint. estable).
figura d	mov. crít. amortiguado	punto espiral (asint. estable).

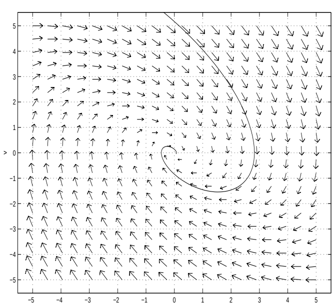
Ejercicio 2. Relaciona la gráfica de las trayectorias dibujadas en el plano de fases con la correspondiente gráfica de la solución (componente primera) del sistema diferencial autónomo equivalente al problema de masa-resorte considerado en la práctica 3.



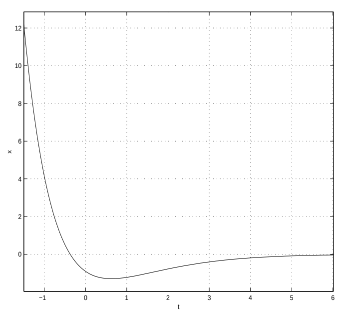
(e)



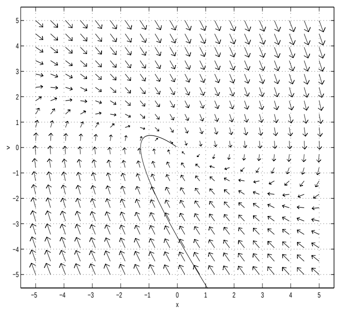
(f)



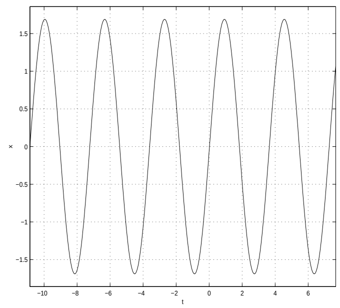
(g)



(h)



(i)



(j)

SISTEMAS NO LINEALES

Si el sistema diferencial inicial es no lineal, se llama **sistema linealizado** asociado al dado por

$$x'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)y,$$

$$y'(t) = \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)y,$$

donde (x_0, y_0) es el punto crítico del sistema no lineal original. Entonces, si $F(x, y)$, $G(x, y)$ son funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas y (x_0, y_0) es un punto de equilibrio del sistema original, se cumple:

i) Si la solución de equilibrio del sistema linealizado es asintóticamente estable, la solución de equilibrio del original es asintóticamente estable.

ii) Si la solución de equilibrio del sistema linealizado es inestable, la solución de equilibrio del original es inestable.

Ejercicio 3. Utiliza el fichero **pplane6.m** para clasificar el punto crítico y dibujar el plano de fases en cada uno de los siguientes sistemas diferenciales.

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 5x + 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 13x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = x - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 3x \end{cases}$$

Ejercicio 4. Utiliza el fichero **pplane6.m** para clasificar los puntos críticos y dibujar el plano de fases en cada uno de los siguientes sistemas diferenciales no lineales.

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y - 4xy \\ y' = x + 6y - 8x^2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + 3y + xy^2 \\ y' = x + 5y + x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -3x + 2y - 3x^2 \\ y' = x - y - xy \end{cases}$$

Para obtener los puntos críticos usa el fichero **sol.m**.

Ejercicio 5. Modelo de combate. Un modelo matemático para el combate de una fuerza convencional y una guerrilla está dado por el sistema

$$\begin{aligned} &x' = -0{,}1xy, \quad x(0) = 10, \\ &y' = -x, \quad y(0) = 15, \end{aligned}$$

donde x e y son respectivamente las resistencias de la guerrilla y las tropas convencionales, y 0,1, 1 son los coeficientes de eficacia en combate. Analiza quién ganará en el conflicto.

Ejercicio 6. Modelo epidémico. Un modelo de propagación de una enfermedad en una población está dado por el sistema

$$\begin{aligned} &x' = -axy, \\ &y' = axy - by, \end{aligned}$$

donde a, b son constantes positivas, x representa la población susceptible de contraer la enfermedad e y la población enferma. Determina el plano de fases del sistema y estudia si hay algún caso en el que se produce una epidemia.

Ejercicio 7. Modelo depredador-presa. En un ecosistema hay una población $x(t)$ de conejos e $y(t)$ de zorros. Se supone que el alimento de los conejos es ilimitado y se sabe que la población de conejos y zorros evoluciona de acuerdo al sistema

$$\begin{aligned} &x' = ax - bxy, \\ &y' = cxy - dy, \end{aligned}$$

con a, b, c, d constantes positivas. Realiza un análisis del plano de fases cuando $a = 2, b = c = 1, d = 3$.

1. Transformada de Laplace

Objetivos: Resolución de PVI con ayuda de la transformada de Laplace. Introducción de la función de transferencia y análisis de la estabilidad a partir de ella.

El cálculo de la transformada de Laplace y de la inversa es muy fácil usando Matlab. Para calcular la transformada de Laplace basta usar el comando **laplace**. Por ejemplo, teclea

$>>$ **laplace**$(\sin(\mathbf{2} * \mathbf{t}))$
y comprueba el resultado. Prueba a continuación con las funciones:

i) $f(t) = e^t \cos t$.

ii) $f(t) = e^t t^2 + t \cos^2 t$.

Para calcular la transformada inversa se usa el comando **ilaplace**. Por ejemplo, teclea

$>>$ **ilaplace**$(\mathbf{s}/(\mathbf{s^2}+\mathbf{1}))$
y comprueba el resultado. Prueba a continuación con las funciones:

i) $F(s) = 3/(s+1)^2$.

ii) $F(s) = e^{-s}/(s^2+2s+5)$.

Ejercicio 1. Vamos a ver que también es fácil calcular la transformada de una función definida a trozos. Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ t^2, & 1 < t \le 3, \\ \sin(2t), & t > 3. \end{cases}$$

Calcula su transformada de Laplace y usa el fichero **ejemplo1** para comprobar el resultado y tener una representación gráfica de la función.

Ejercicio 2. Vayamos ahora con las aplicaciones a PVI. Consideramos en primer lugar un circuito eléctrico en el que hay una bobina, un condensador y una pila, de forma que el PVI está dado por

$$I''(t) + 4I(t) = g(t),\ I(0) = 0,\ I'(0) = 0,$$

donde $I(t)$ representa la intensidad de corriente y $g(t)$ es de la forma

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ -1, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Abre el fichero **ejemplo2**, trata de entender todo lo que se hace en ese fichero, utilízalo para resolver el problema y analiza el tipo de solución que se obtiene.

Ejercicio 3. Una masa de 1 Kg que está sujeta a un resorte con constante de amortiguamiento 9, se suelta desde el reposo un metro por debajo de su posición de equilibrio. Al cabo de π segundos se golpea la masa con un martillo proporcionándole un impulso de 3 unidades. Escribe el PVI y resuélvelo con la transformada de Laplace; usa el fichero **ejemplo3** como ayuda.

Ejercicio 4. Se considera el circuito eléctrico que se muestra en la figura que aparece al final del guión. Suponiendo que la intensidad de corriente es nula en el instante inicial, plantea el PVI asociado. Demuestra que el sistema se puede poner en la forma $X'(t) = AX(t) + F(t)$, donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sin(3t) \end{pmatrix}.$$

Resuelve el PVI usando la transformada de Laplace; usa el fichero **ejemplo4** como ayuda.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y ESTABILIDAD

Se considera un sistema sobre el que actúa una única entrada $x(t)$, siendo nulas las condiciones iniciales en el momento en el que se aplica dicha entrada. Al aplicar la transformada de Laplace al sistema, si $y(t)$ representa la salida asociada a dicha entrada, se obtiene la relación

$$Y(s) = X(s)H(s), \quad \text{ó} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

donde

$$Y(s) = L[y(t)], \quad X(s) = L[x(t)],$$

y $H(s)$ se conoce como **función de transferencia del sistema**.

Ejercicio 5. Comprueba que la función de transferencia del sistema

$$\begin{aligned} & ay''(t) + by'(t) + cy(t) = x(t), \quad t > 0, \\ & y(0) = y'(0) = 0, \end{aligned}$$

viene dada por

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}.$$

Señalar que los coeficientes de la función de transferencia dependen exclusivamente de los parámetros del sistema y no de la entrada ni de la salida. A la función $h(t) = L^{-1}[H(s)]$ se le llama **respuesta impulsional del sistema**. Del mismo modo que $H(s)$, la función $h(t)$ depende solamente del sistema. En particular, si $x(t) = \delta(t)$ (delta de Dirac) se tiene $H(s) = Y(s)$ y por lo tanto $h(t) = y(t)$.

Ejercicio 6. Si en una red eléctrica se aplica un voltaje de $10\cos(4t)$, ¿cuál es el voltaje de salida si la función de transferencia está dada por $H(s) = 1/(1+s)$?.

Ejercicio 7. Calcula la función de transferencia y la respuesta impulsional de un sistema que admite como modelo la ecuación diferencial dada en los siguientes casos:

a) $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = g(t), \quad t > 0,$
b) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = g(t), \quad t > 0.$

Para analizar la estabilidad de un sistema podemos analizar su función de transferencia. Supongamos que $H(s) = N(s)/D(s)$, siendo $N(s)$ y $D(s)$ polinomios en s. Las raíces de $D(s)$ se llaman **polos** y las de $N(s)$ se llaman **ceros**; a ambos se les denomina **frecuencias críticas**. Sean $p_1, p_2, \cdots, p_k$ los polos y $z_1, z_2, \cdots, z_m$ las raíces. Entonces,

$$H(s) = A(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)/[(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_k)],$$

con A constante. Si descomponemos $H(s)$ en fracciones simples pueden resultar los siguientes casos:

i) Los polos son reales; para que el sistema sea estable deben ser negativos.

ii) Los polos son complejos conjugados con parte real no nula; para que el sistema sea estable la parte real debe ser negativa.

iii) Los polos son imaginarios puros; en este caso la respuesta no se amortigua. Si además la entrada tiene la misma frecuencia que la natural del sistema, aparece el fenómeno de la resonancia, que ya vimos en la práctica 3.

Para estudiar la estabilidad, también puede hacerse examinado la respuesta impulsional. Así;

i) Si $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$, entonces el **sistema es estable**.

ii) Si $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$, entonces el **sistema es inestable**.

iii) Si $\lim_{t\to\infty} h(t) = c$, con $c \neq 0$, entonces el **sistema es marginalmente estable**.

iv) Si no existe $\lim_{t\to\infty} h(t)$, pero $h(t)$ es acotada, se trata de una **oscilación acotada**.

Ejercicio 8. Estudia la estabilidad de los sistemas definidos en el ejercicio 6.