Paradojas del Infinito. El Teorema de Banach-Tarski.

Julio Bernués.
Dpto. Matemáticas. Univ. Zaragoz.

Es conocido desde la antigüedad que la noción de infinito produce construcciones aparentemente paradójicas, muchas de la cuales *parecen* cambiar el tamaño de los objetos mediante operaciones que, sin embargo, *deberían* conservar el tamaño.

Galileo, en 1638, observó que el conjunto de los números naturales N puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números naturales pares, a pesar de que éste es un conjunto más "pequeño" que el primero. De allí, deducía que *"los atributos "igual", "mayor" y "menor" no son aplicables a cantidades... infinitas"*. Se puede establecer análogamente una correspondencia biyectiva entre N y los números impares. De manera que de la observación de Galileo podemos entresacar una técnica similar a la de una máquina de duplicar. Su construcción muestra que podemos descomponer N en dos conjuntos disjuntos, N={pares}U{impares}, cada uno de los cuales es biyectivo con el propio N (es decir, tiene "el mismo tamaño" que N).

Lo mismo podemos hacer con otros conjuntos y, por ejemplo, es muy sencillo demostrar con la ayuda de la teoría de cardinales que introdujo G. Cantor en el siglo XIX, que una bola es biyectiva con dos bolas, todas ellas (si se quiere) de idéntico tamaño, o que una bola del tamaño de un guisante es biyectiva con una bola del tamaño del sol. Los resultados de Cantor tardaron en ser aceptados por la comunidad matemática. Por ejemplo, H. Poincarè los calificó de *"una enfermedad de la que la matemática tendría que recuperarse"*. En la actualidad ya ningún matemático se sorprende de dichos resultados y están perfectamente integrados dentro de las matemáticas.

Lo que es más sorprendente es que es posible duplicar bolas de forma que las transformaciones implicadas no son biyecciones cualesquiera sino transformaciones que conservan la distancia (traslaciones y giros, o sea los movimientos que utilizamos al hacer un puzzle) y por tanto el área y el volumen. Nos estamos refiriendo al Teorema de Banach-Tarski (1924) que a menudo se enuncia como: *Una bola del tamaño de un guisante puede ser troceada en un número finito de partes las cuales, haciendo únicamente uso de giros y traslaciones, pueden ser ensambladas para formar una bola del tamaño del sol*. Otra forma equivalente de enunciarlo es: *Una bola puede ser troceada en un número finito de partes las cuales, haciendo uso únicamente de giros y traslaciones, pueden ser ensambladas para formar dos bolas disjuntas de idéntico radio a la de partida*. O dicho de otra manera, es posible hacer un puzzle a partir de una bola y ensamblarlo, sin que sobren ni falten piezas, para obtener dos bolas de idéntico tamaño que la de partida. Diremos que la bola es *equivalente por descomposición finita* a dos bolas disjuntas de igual tamaño.

Para dar una idea de cómo son las piezas de nuestro puzzle veremos un ejemplo sencillo de equivalencia por descomposición finita entre dos conjuntos: *La circunferencia unidad de centro el origen C es equivalente por descomposición finita a C-{P}* (o sea la circunferencia con un agujero en el punto P) *donde P es un punto cualquiera de C.*

En efecto, consideramos el giro de ángulo 1 que denotamos por T. Si giramos el punto P mediante T, llegamos a otro punto T(P) de C. Si lo volvemos a girar llegamos a T(T(P))=T2(P) y así sucesivamente. Así, podemos formar el conjunto A={P, T(P), T2(P), T3(P)...}. Observar que si giramos el conjunto A mediante T (es decir, giramos cada uno de sus puntos) llegamos a T(A)={T(P), T2(P), T3(P)...}. Ahora bien, el punto P no pertenece a T(A) . Ello es debido a que todos los puntos P, T(P), etc... son *distintos*, lo que a su vez es debido a que ¡el número Pi es irracional!. Por tanto T(A)=A-{P}. Y ahora ya tenemos la solución al problema. Partimos C en dos trozos disjuntos, a saber, A y C-A. Al primero le aplicamos el giro T y llegamos a T(A)=A-{P} y el segundo lo dejamos como está, C-A. Al unir A-{P} y C-A se obtiene C-{P}, como se quería demostrar.

Una de las piezas de nuestro puzzle, el conjunto A, tiene el aspecto de una *"nube de puntos"* sobre C. El otro conjunto es C-A, o sea una circunferencia con una cantidad infinita de agujeros. No es posible conseguir una demostración cortando la circunferencia "con tijeras" en intentar ensamblar los trozos para conseguir la circunferencia con un agujero.

Le ejemplo anterior es el germen de una de las dos principales herramientas utilizadas en la demostración del Teorema de Banach-Tarski. La otra herramienta es mucho más potente y profunda y último responsable de que la demostración funcione: es el llamado Axioma de Elección. El axioma dice que *a partir de cualquier familia de conjuntos no vacíos es posible construir un nuevo conjunto seleccionando un elemento de cada uno de los conjuntos de la familia*. Este aparentemente inocuo axioma fue enunciado por primera vez en 1905 y como en el caso de la teoría de cardinales de Cantor, su certeza fue objeto de fuertes disputas.

E. Borel, uno de los padres de la moderna teoría de integración, rechazaba de plano la validez del Axioma de Elección puesto que de él se deducía algo tan aparentemente absurdo como el teorema de Banach-Tarski. Con el Axioma de Elección se demuestra *únicamente* que *existe* una manera de partir una bola para duplicarla, pero no hay forma alguna de saber *cómo* se hace esa partición. Y es que el Axioma de Elección siempre produce, cada vez que se aplica en cualquier área de la matemática, demostraciones existenciales pero nunca constructivas. Esto era lo que Borel criticaba, el que *"el conjunto de elección no se definía en el sentido lógico y preciso de la palabra definir"*, es decir, no se definía explícitamente y así, según él, se producía una contradicción.

La lucha no quedó completamente resuelta hasta que en 1963 Cohen encontró la relación entre el Axioma de Elección (AE) y la axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF) de la teoría de conjuntos, o sea los axiomas que constituyen los fundamentos de nuestra matemática. Cohen demostró que si ZF es consistente (es decir no contiene contradicciones) entonces AE es independiente de ZF, es decir, tanto ZF+AE con ZF+no AE son también consistentes. Esto significa que AE no es ni cierta ni falsa sino indemostrable a partir de nuestros axiomas ZF. Por tanto podemos ampliar nuestra axiomática añadiendo bien AE o su bien su negación y ambas elecciones dan lugar a axiomáticas consistentes. ¿Cuál elegir?. Añadirlo a nuestra axiomática significa aceptar consecuencias aparentemente paradójicas como el Teorema de Banach-Tarski, pero añadir su negación significa privar a las matemáticas de mucha aplicaciones extraordinariamente útiles de las que sería muy difícil prescindir. Es por eso que en la actualidad ha sido ya *digerido* y completamente comprendido e integrado por la comunidad matemática y se considera el Axioma de Elección añadido a la lista de los axiomas de la teoría de conjuntos ZF.

Una situación análoga se planteó en el siglo XIX con la axiomática de la Geometría Euclídea y el Axioma de las Paralelas (sobre la existencia de una *única* recta paralela a otra dada por un punto exterior). Tras múltiples intentos de demostrarlo a partir de los otros axiomas, se vio que su negación (o sea la no existencia de paralela o existencia de dos o más paralelas) también daba lugar a geometrías consistentes (geometría esférica o hiperbólica respectivamente) es decir, el Axioma de las Paralelas era independiente de los demás.

Pero, ¿es *matemáticamente* posible transformar por descomposición finita un guisante en el sol?. ¿Cómo es *posible* que mediante transformaciones que conservan el volumen comencemos con una bola y terminemos con dos, o sea, dupliquemos el volumen?. Veamos. Estamos acostumbrados a que todos los objetos que manejamos tengan asociado un volumen o, en lenguaje matemático, que sean medibles. Sin embargo, cuando se define la noción matemática de volumen (H. Lebesgue 1904) aparecen inevitablemente conjuntos no-medibles a los que no podemos asociar ningún volumen. Es decir, para poder medir lo que queremos, hemos de pagar el precio de *no poder medir* ciertos conjuntos. Lo que ocurre en el Teorema de Banach-Tarski es que los conjuntos en los que se trocea la bola son precisamente (y necesariamente) *no-medibles* y por tanto no tiene sentido hablar de conservación de volumen de esos conjuntos. De hecho puede ocurrir, como ocurre, que al ensamblarlos produzcan una conjunto de volumen el doble que el del comienzo. Por cierto que en la mejor demostración del Teorema de Banach-Tarski que conocemos por R. Robinson 1947 se utiliza un puzzle de 18 piezas.

Nos ocupamos finalmente del caso del plano. ¿Es posible enunciar un análogo al Teorema de Banach-Tarski en el plano?. La respuesta ahora es que la duplicación del círculo no es posible. Para que dos conjuntos (medibles y acotados) del plano sean equivalentes por descomposición finita es necesario que sus áreas sean iguales y esta condición sólo se sabe que es suficiente en casos particulares.

En 1925, Tarski planteó la siguiente versión de la cuadratura del círculo :¿Es un círculo equivalente por descomposición finita a un cuadrado de igual área?. Dicho de otra forma, ¿es posible formar un puzzle a partir de un círculo y ensamblarlo para producir un cuadrado sin que sobren ni falten piezas?. En 1963 Dubins, Hirsch y Karush demostraron que no es posible si el puzzle se forma "utilizando tijeras" (lo que tiene un significado matemático preciso). Sin embargo en 1989 el matemático húngaro Laczkovich demostró que la respuesta al problema de Tarski es afirmativa, para lo cual necesitó una descomposición del orden de ¡10 50 piezas!. Finalmente, ¡se había logrado cuadrar el círculo!, (si bien no con "regla y compás" como proponía el problema original).

¿Es posible que un resultado tan poco intuitivo pero verdadero en el mundo matemático y evidentemente falso en el mundo real (donde *todos* los conjuntos son medibles) tenga aplicaciones físicas?. Hemos encontrado dos:

- En Augenstein, B.W. "Hadron physics and transfinite set theory" *Inter. J. Theoretical Phys.* 23 (1984) 1197-1205, el autor relaciona el Teorema de Banach-Tarski con descubrimientos sobre quarks.

- Aunque ya sepamos que, por culpa de los conjuntos no medibles no sea posible construir una maquina duplicadora incluso disponiendo del Teorema de Banach-Tarski, el lógico matemático H. Weyl encontró otra útil aplicación al re-escribir de manera más rigurosa un conocido pasaje bíblico, Mateo 14, 15-21:

  Jesús de Nazaret: "... tomad estos cinco panes y estos dos peces y dad de comer a esos que que nos siguen".

  Discípulos: Maestro, ¿podemos usar el Axioma de Elección?.