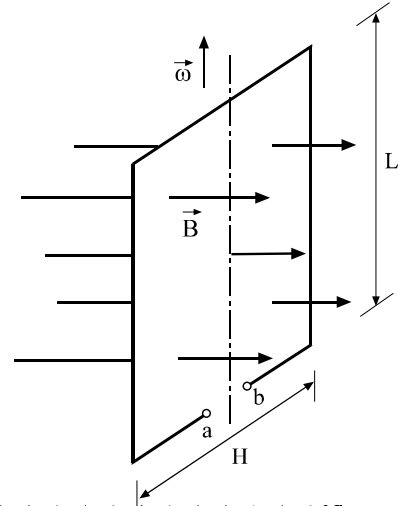


3.- Una espira rectangular plana, de lados H y L gira alrededor del eje con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme, cuyo vector inducción magnética \vec{B} es perpendicular al eje de rotación. Calcular la f.e.m. inducida, indicando claramente su polaridad en cada posición angular. Si $B = 1,2 \text{ T}$, $\omega = 3000 \text{ rpm}$ ($100\pi \text{ rad/s}$), $H = 60 \text{ cm}$, $L = 80 \text{ cm}$, calcular el valor eficaz de la f.e.m. inducida en la espira.



③ \vec{B} está fijo en el espacio y no varía con el tiempo, pero la espira observa una variación en el nº de líneas de \vec{B} que la atraviesan (flujo de \vec{B}) al girar con velocidad angular $\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \cdot \vec{u}_z$.
 Si observamos la espira desde arriba, podemos analizar la variación del Φ_B en cuatro posiciones angulares diferentes y así deducir la dirección y sentido del \vec{E}_{nc} que se inducirá a lo largo de la espira.

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} da = B \cdot L \cdot H \cdot \cos \varphi$$

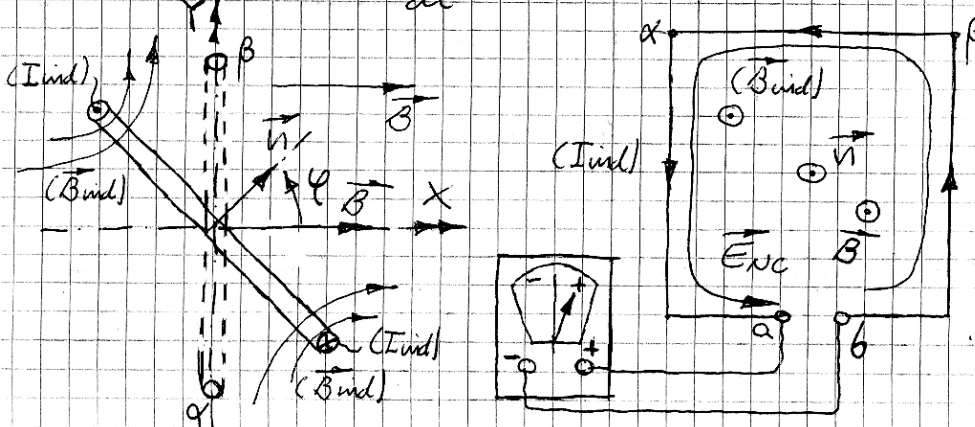
$$\varphi = |\vec{\omega}| \cdot t \Rightarrow \Phi_B = B \cdot L \cdot H \cdot \cos |\vec{\omega}| \cdot t$$

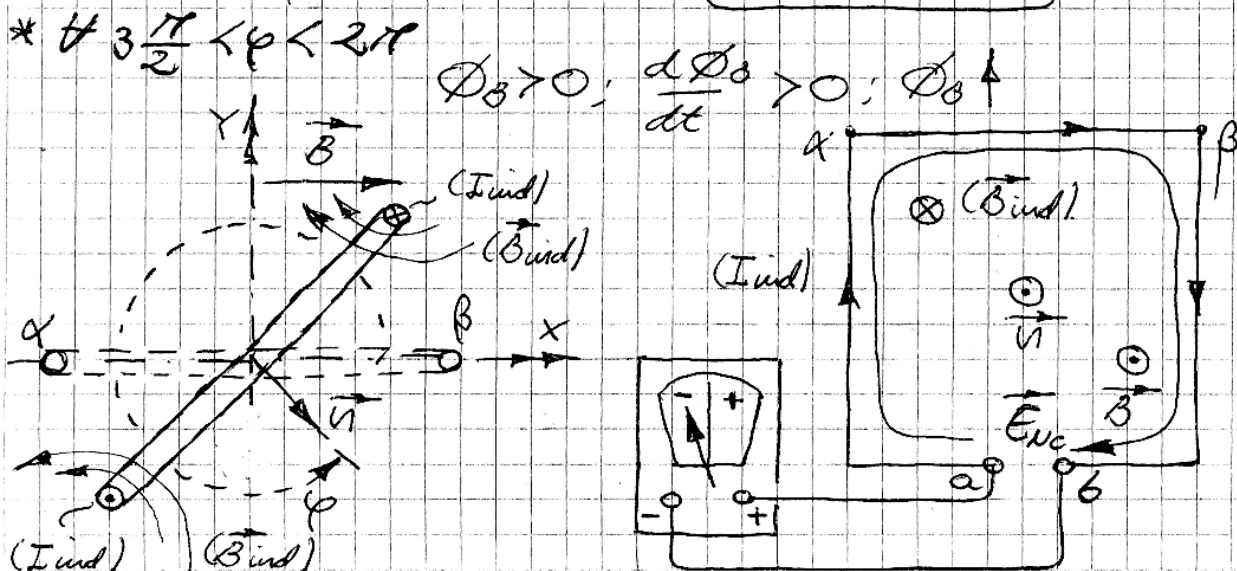
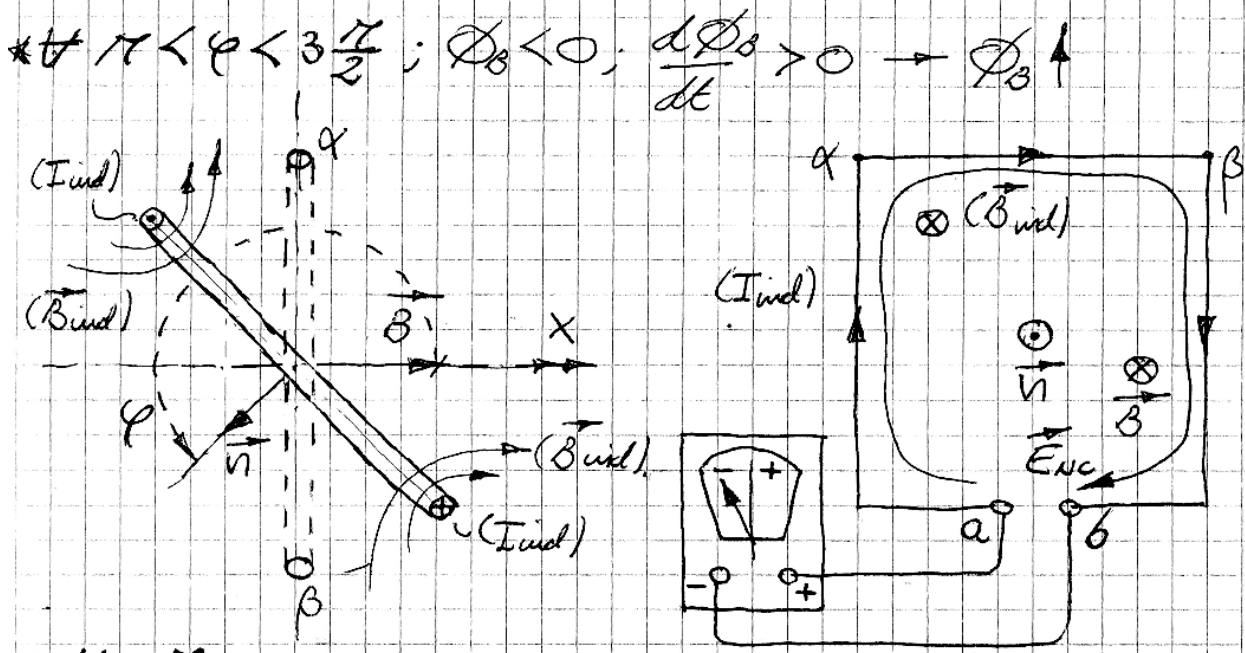
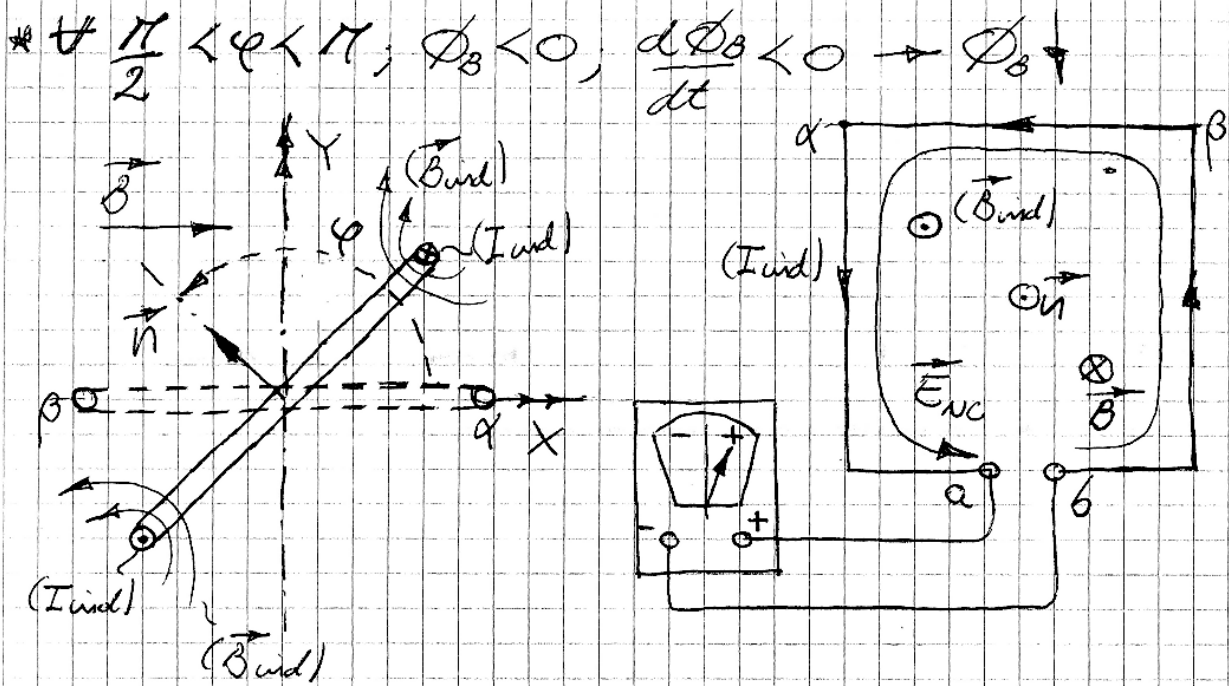
$$\frac{d}{dt} \Phi_B = B \cdot L \cdot H \cdot \frac{d}{dt} \{ \cos |\vec{\omega}| \cdot t \} =$$

$$= -B \cdot L \cdot H \cdot |\vec{\omega}| \cdot \text{sen} |\vec{\omega}| \cdot t =$$

$$= -B \cdot L \cdot H \cdot |\vec{\omega}| \cdot \text{sen} \varphi$$

* $\forall 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; $\frac{d}{dt} \Phi_B < 0$; $\Phi_B > 0$; $\Phi_B \downarrow$





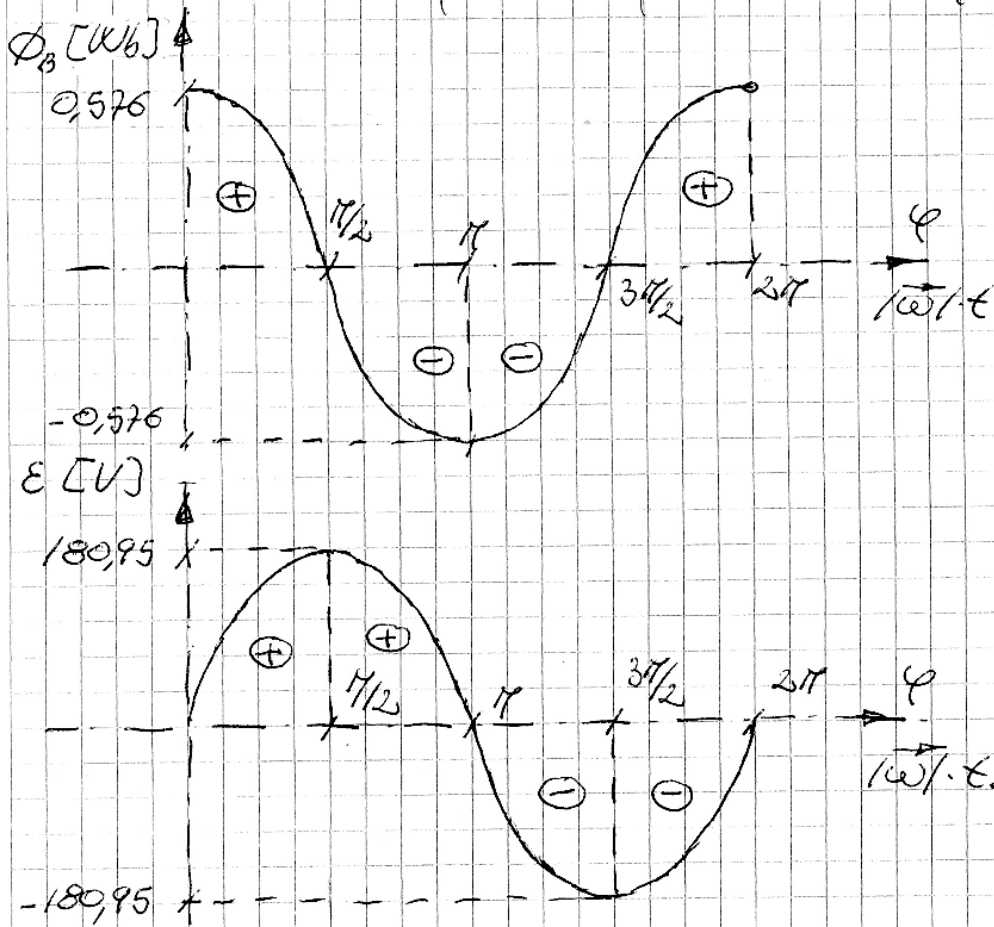
En cualquier posición, el valor absoluto de la fem inducida es

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = |\vec{B}| \cdot L \cdot H \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\sin(\vec{\omega} \cdot t)| = \\ &= |\vec{B}| \cdot L \cdot H \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\sin \varphi| \end{aligned}$$

Con los datos numéricos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 1,2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 100 \cdot \pi \cdot \sin \varphi = \\ &= 180,95 \cdot \sin \varphi \text{ V}; \mathcal{E}_{ef} = \frac{180,95}{\sqrt{2}} = 127,95 \text{ V} \end{aligned}$$

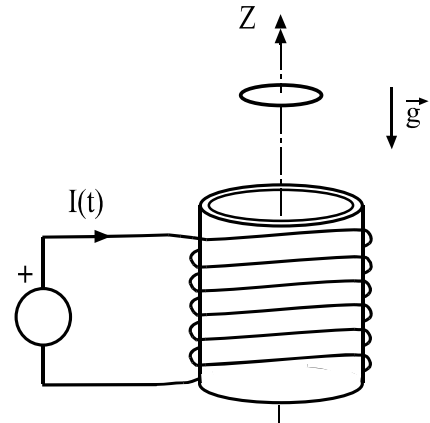
Según la referencia tomada con el polímetro, la variación de la fem en función de φ sería:



6.- Sobre un solenoide de eje vertical, recorrido por una corriente eléctrica $I(t)$, variable con el tiempo, se sitúa un anillo conductor de cobre, cortocircuitado, coaxial con el solenoide, de radio $R_a = 2$ cm, tal como se representa en la figura. La resistencia eléctrica total del anillo es $R_e = 650 \mu\Omega$. El campo magnético creado por el solenoide en los puntos del entorno del anillo tiene una componente axial y otra componente radial, ambas dependientes del tiempo. Su expresión en coordenadas cilíndricas es:

$$\{\vec{B}\}_{r \phi z} = \alpha \cdot t \cdot \vec{u}_r + \beta \cdot t \cdot \vec{u}_z; \quad 0 \leq t \leq 0,1 \text{ s};$$

$$\alpha = 284 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{s}}; \quad \beta = 6,2 \frac{\text{T}}{\text{s}}$$



a) Calcular, para cualquier instante t , la intensidad de corriente eléctrica inducida, I_a , que circulará por el anillo, indicando claramente su sentido de circulación.

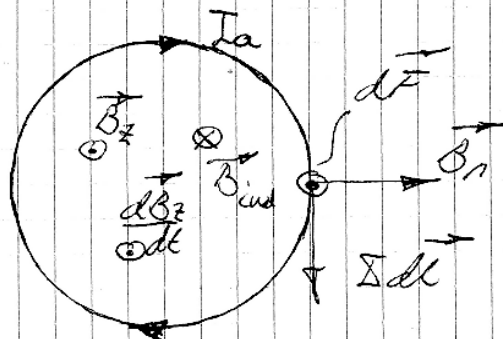
$$a) \quad \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} da$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} da = \int_0^{R_a} \int_0^{2\pi} B_z \cdot r dr d\phi = \pi R_a^2 \cdot B_z(t)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi_B = \pi R_a^2 \frac{d}{dt} B_z(t) = \pi R_a^2 \frac{d}{dt} \beta \cdot t =$$

$$= \pi R_a^2 \cdot \beta = \pi (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 6,2 = \mathcal{E} = 7,79 \text{ mV}$$

$$\mathcal{E} = R_e \cdot I_a \Rightarrow I_a = \frac{7,79 \cdot 10^{-3}}{650 \cdot 10^{-6}} = 12 \text{ A}$$



b) Experimentalmente se observa que en esta situación y en el instante $t = 80$ ms el anillo levita, como consecuencia de la aparición de una fuerza de origen electromagnético sobre el anillo, del mismo módulo y dirección que la debida a la aceleración de la gravedad, pero de sentido contrario. Si la masa del anillo es $m_a = 3,5 \cdot 10^{-3}$ kg, calcular la corriente eléctrica inducida que estará circulando por el anillo, comparándola con la obtenida en el apartado anterior.

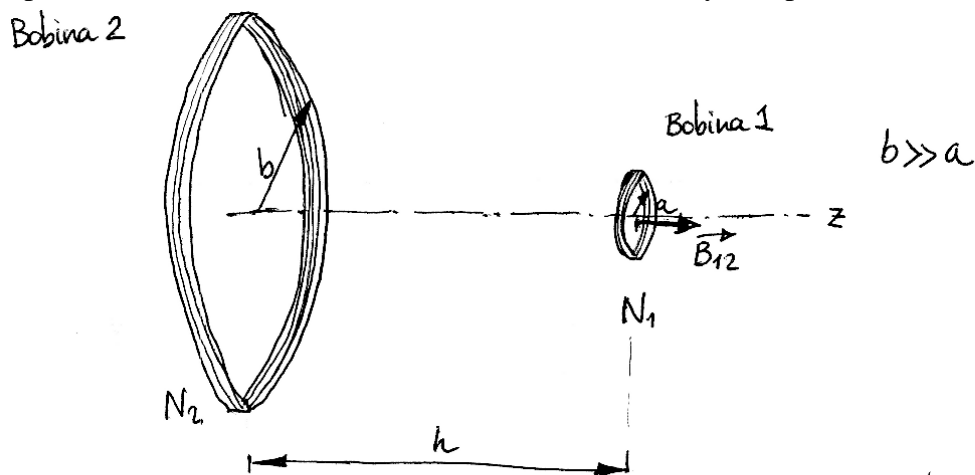
$$b) \quad d\vec{F} = I_a d\vec{l} \times \vec{B}, \quad |d\vec{F}| = I_a \cdot R_a \cdot d\varphi \cdot B_n$$

$$|\vec{F}_z| = I_a \cdot 2\pi R_a B_n = \mu_0 \cdot I_a^2 \cdot \frac{2\pi R_a}{h} = 34,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$B_n(t=80 \mu\text{s}) = 285 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 22,72 \cdot 10^{-3} \text{ mT}$$

$$I_a = \frac{34,3 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 22,72 \cdot 10^{-3}} \approx 12 \text{ A}$$

10.- Calcular el coeficiente de inducción mutua, M , entre dos bobinas de espesor despreciable, coaxiales, de radios a y b ($b \gg a$), situadas en planos paralelos y con un número de vueltas N_1 y N_2 respectivamente. Las bobinas se encuentran en el vacío y la separación entre ambas es h .



Este es un problema típico de cálculo de inducción mutua, en el cual es prácticamente imposible calcular sin un ordenador la inducción en la bobina 2 (la grande) debido a la 1 (la pequeña), ya que requiere el cálculo del campo \vec{B} que crea la espira 1 en puntos fuera de su eje, y un cálculo complicado para obtener el flujo de este campo a través de la bobina 2.

Sin embargo, al revés es fácil ya que podemos considerar que el campo en la superficie de la bobina 1 creado por la 2, \vec{B}_{12} , es prácticamente constante e igual al campo que crea en su eje (a una distancia h en este caso).

Utilizando las propiedades del coef. de inducción mutua concluimos que $M_{12} = M_{21} = M$

Nos concentramos pues en calcular el caso fácil, es decir, el coef. de inducción en la bobina 1 debido a la 2, M_{12}

Partiremos del campo que crea una espira en su eje

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_z \quad \text{con} \quad \begin{cases} R = \text{radio de la espira} \\ z = \text{distancia al eje} \end{cases}$$

Como en la bobina 2 hay N_2 espiras, muy próximas entre sí el campo \vec{B} correspondiente habrá que multiplicarlo por N_2

además $\begin{cases} r = b \\ z = h \end{cases}$

$$\text{así que} \quad \vec{B}_{12} = \vec{B}_2(z=h) = N_2 \frac{\mu_0 I_2}{2} \frac{b^2}{(b^2 + h^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

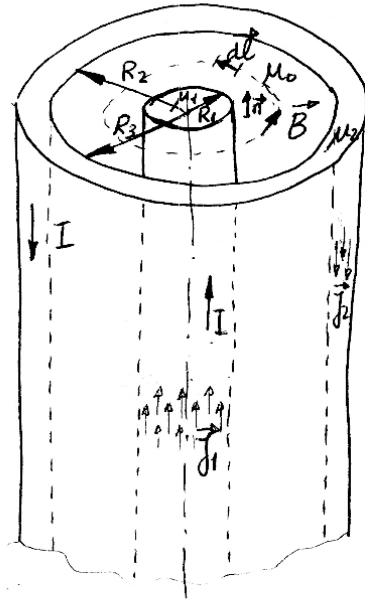
El flujo de \vec{B}_{12} sobre la bobina 1 será N_1 por el flujo a través de una espira

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= N_1 \int_{\text{sup. espira 1}} \vec{B}_{12} \cdot \vec{n} \cdot dS = N_1 \int_{\text{sup. esp. 1}} B_{12} dS = N_1 B_{12} \cdot S_1 = \\ &= N_1 B_{12} \pi a^2 = N_1 N_2 \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi a^2 b^2}{(b^2 + h^2)^{3/2}} I_2 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto} \quad \boxed{M = M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = N_1 N_2 \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi a^2 b^2}{(b^2 + h^2)^{3/2}}}$$

15.- Un cable coaxial está formado por un conductor interno cilíndrico macizo de radio R_1 y permeabilidad μ_1 , recto, de longitud infinita, y un conductor cilíndrico coaxial con el anterior de radio interior R_2 , radio exterior R_3 y permeabilidad μ_2 , ($R_1 < R_2 < R_3$). Por el conductor interior circula una corriente eléctrica distribuida uniformemente de intensidad I , que regresa por el conductor exterior, distribuyéndose también de forma uniforme (ambas corrientes son antiparalelas). El espacio que separa ambos conductores, así como el que rodea el conductor exterior, es aire (μ_0). Calcular:

- a) la energía magnética almacenada por unidad de longitud en el cable coaxial, y
- b) a partir del resultado anterior, calcular el coeficiente de autoinducción del cable coaxial, L .



Como las corrientes se distribuyen uniformemente en ambos conductores, las densidades de corriente correspondientes serán:

Conductor 1 (conductor interno)

$$I = \int_{\text{Sup. transv. cable 1}} \vec{J}_1 \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{S_{\text{cable 1}}} \vec{J}_1 \cdot dS = J_1 \pi R_1^2$$

$\vec{J}_1 \parallel \vec{n}$ $J_1 = \text{cte}$

$$\Rightarrow \vec{J}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u}_z$$

Conductor 2 (conductor externo)

$$I = \int_{\text{Sup. cable 2}} \vec{J}_2 \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot dS = J_2 \pi (R_3^2 - R_2^2)$$

$\vec{J}_2 \parallel \vec{n}$ $J_2 = \text{cte}$

$$\Rightarrow \vec{J}_2 = \frac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} (-\vec{u}_z)$$

Dada la simetría angular (de cilíndricas), \vec{H} tiene líneas de campo circulares y $\vec{H} = H(r) \cdot \vec{u}_\phi$.

La trayectoria para aplicar Ampere son circunferencias coaxiales con el sistema y recorrerla en el sentido de giro de \vec{H} (ver dibujo)

$$\oint_{\text{circunf}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{circunf}} H \cdot dl = H \cdot 2\pi r \quad \text{válido } \forall r$$

$\vec{H} \parallel d\vec{l}$ $H = \text{cte (para } r = \text{cte)}$

En cuanto a la corriente abrazada habrá que distinguir varios casos:

$$r < R_1 \quad I_{\text{abraz}}^{\text{real}} = \int_{S_{\text{parte de cable 1}}} \vec{J}_1 \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{S_{\text{parte cable 1}}} J_1 \cdot dS = J_1 S_{\text{parte cable 1}} = J_1 \cdot \pi r^2 = \frac{I r^2}{R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2 \quad I_{\text{abraz}}^{\text{real}} = I$$

$$R_2 < r < R_3 \quad I_{\text{abraz}}^{\text{real}} = I + \int_{S_{\text{parte cable 2}}} \vec{J}_2 \cdot \vec{n} \cdot dS = I - J_2 \cdot S_{\text{parte 2}} = I - I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} =$$

$$= I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$r > R_3 \quad I_{\text{abraz}}^{\text{real}} = 0$$

Así que los campos y la densidad de energía en cada región son:

zona 1

$$r < R_1 \quad H \cdot 2\pi r = \frac{I r^2}{R_1^2} \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^4} r^2$$

zona 2

$$R_1 < r < R_2 \quad H \cdot 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2}$$

zona 3

$$R_2 < r < R_3 \quad H \cdot 2\pi r = I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi (R_3^2 - R_2^2)} \left(\frac{R_3^2}{r} - r \right) \Rightarrow B = \mu_0 H$$

$$\Rightarrow w_3 = \frac{\mu_0}{8} \frac{I^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \left(\frac{R_3^2}{r} - r \right)^2 = \frac{\mu_0}{8} \frac{I^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \left(\frac{R_3^2}{r^2} + r^2 - 2R_3 \right)$$

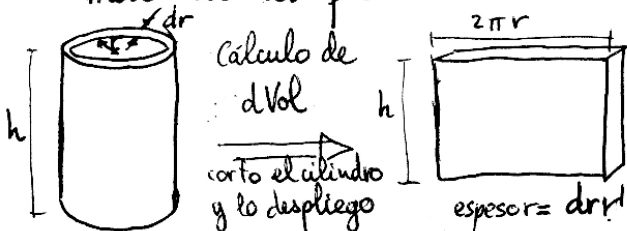
$$w_3 = \left(c + dr^2 + \frac{b}{r^2} \right) I^2, \quad \text{con } c, d, b \text{ constantes.}$$

$$R_3 < r \quad H = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow w_4 = 0$$

La energía magnética por unidad de longitud del cable la obtendremos integrando las respectivas densidades de energía, a un volumen del cable de 1 m de longitud

$$W = \int_{\text{todo el espacio donde } w \neq 0} w \cdot dVol = \int_{\text{vol zona 1}} w_1 \cdot dVol + \int_{\text{vol zona 2}} w_2 \cdot dVol + \int_{\text{vol zona 3}} w_3 \cdot dVol$$

Las densidades de energía a integrar son cantidades que dependen de la distancia al eje r . Por lo tanto, para poder resolver las integrales anteriores debo dividir las regiones en trozos de volumen en los que r sea constante. Para esta geometría, esos trozos son tubos coaxiales de espesor dr cuyo volumen es $dVol = 2\pi r \cdot h \cdot dr$ (h luego sustituiremos por 1 m)



Haciendo esa sustitución en las integrales anteriores tenemos:

$$\int_{\text{zona 1}} w_1 \cdot dVol = \int_0^{R_1} w_1 \cdot 2\pi h r dr = \int_0^{R_1} a I^2 r^2 \cdot 2\pi h r dr = 2\pi h a I^2 \frac{R_1^4}{4}$$

$$\int_{\text{zona 2}} w_2 \cdot dVol = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b I^2}{r^2} 2\pi h r dr = 2\pi h b I^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\int_{\text{zona 3}} w_3 \cdot dVol = \int_{R_2}^{R_3} I^2 \left(c + dr^2 + \frac{b}{r^2} \right) 2\pi h r dr = 2\pi h I^2 \left[\frac{c}{2} (R_3^2 - R_2^2) + \frac{d}{4} (R_3^4 - R_2^4) + \int \ln \frac{R_3}{R_2} \right]$$

La energía magnética en el cable será la suma de la energía en la barra central conductora (W1), la energía en el hueco vacío (W2) y la energía en el tubo conductor exterior (W3):

$$W1 = \int_0^{R1} w1 2\pi r h dr = \frac{h I^2 \mu1}{16\pi}$$

$$W2 = \int_{R1}^{R2} w2 2\pi r h dr = \frac{h I^2 \mu0 \ln[R2 / R1]}{4\pi}$$

$$W3 = \int_{R2}^{R3} w3 2\pi r h dr = - \frac{h I^2 \mu1 (R2^4 - 4 R2^2 R3^2 + 3 R3^4 + 4 R3^4 \ln[R2 / R3])}{16\pi (R2^2 - R3^2)^2}$$

$$W_{\text{total}} = W1 + W2 + W3 = \frac{h I^2}{16\pi} \left(\mu1 + 4 \mu0 \ln[R2 / R1] - \frac{\mu1 (R2^4 - 4 R2^2 R3^2 + 3 R3^4 + 4 R3^4 \ln[R2 / R3])}{(R2^2 - R3^2)^2} \right) = 0.1055 h$$

Consecuentemente, la energía magnética almacenada por metro de cable coaxial es:

$$\frac{W_{\text{total}}}{h} = 0.1055 \frac{J}{m}$$

b) El coeficiente de autoinducción L se obtiene igualando la expresión anterior a la energía de una autoinducción en función de la I que circula por ella. Es decir

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2W}{I^2}$$

Por tanto, la inductancia del cable la podemos obtener a través de la energía total magnética:

$$L = \frac{2 W_{\text{total}}}{I^2} = \frac{h}{8\pi} \left(\mu1 + 4 \mu0 \ln[R2 / R1] - \frac{\mu1 (R2^4 - 4 R2^2 R3^2 + 3 R3^4 + 4 R3^4 \ln[R2 / R3])}{(R2^2 - R3^2)^2} \right) = 0.00001465 h$$

La inductancia por metro de cable coaxial es:

$$\frac{L}{h} = 14,65 \mu H$$