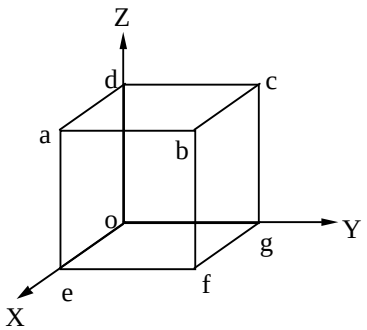
# *Tema 7*. Campo magnético en la materia.

## - Cálculo de flujos de $\vec{B}$ a través de superficies abiertas y cerradas.

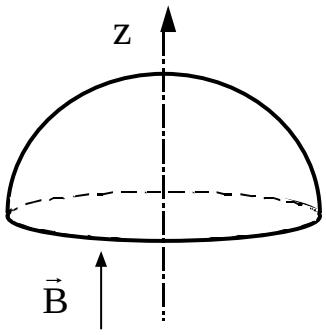
**1.-** El cubo de arista L = 2,5 cm de la figura se encuentra situado en el espacio en el que existe un campo magnético uniforme, cuyo vector inducción magnética $\vec{B}$ viene dado por la expresión

$$\vec{B} = 5 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y + 3 \cdot \vec{u}_z \text{ [T]}$$

a) Calcular el flujo del vector $\vec{B}$ a través de cada una de las seis caras del cubo.
b) Calcular el flujo total a través del cubo.




Problema 1



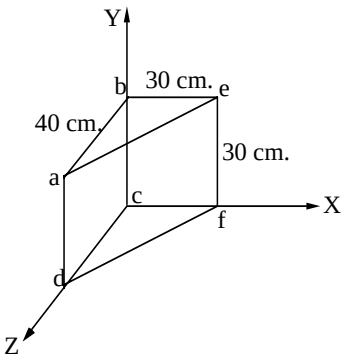

Problema 2

**2.-** La carcasa semiesférica de la figura, de radio interior R = 1 m y espesor despreciable, se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme, cuyo vector densidad de flujo magnético $\vec{B}$ es paralelo al eje ZZ' y de sentido positivo, $\vec{B} = 2\ \vec{u}_z$ [T]

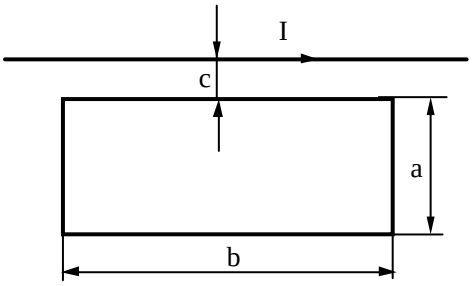
a) Calcular el flujo del vector $\vec{B}$ a través de la base plana y de la superficie curva.
b) Calcular el flujo a través de toda la superficie cerrada.

**3.-** Una superficie cerrada en forma de cilindro circular recto tiene un radio de 13 cm y una longitud de 80 cm. A través de una de las bases existe un flujo magnético entrante de 25 μWb. En la otra base existe un campo magnético uniforme cuyo vector inducción magnética $\vec{B}$ es perpendicular a la superficie, de módulo 1,6 mT y dirigido hacia afuera. Calcular el flujo magnético a través de la superficie lateral del cilindro.

**4.-** Si $\vec{B}$ es uniforme en todo el espacio, de valor 2 T dirigido en la dirección XX', calcular:
a) el flujo de $\vec{B}$ a través de la superficie aefd, y
b) el flujo total a través de la superficie cerrada.




**5.-** Calcular el flujo magnético (flujo del vector $\vec{B}$) que atraviesa la espira rectangular de la figura cuando por el alambre infinito circula una corriente eléctrica de intensidad I.
Datos: I = 800 A, a = 10 mm, b = 15 mm, c = 5 mm



**6.-** a) Una bobina toroidal de sección rectangular, de radio interior $R_1$ y radio exterior $R_2$ está constituida por N espiras elementales de altura h, conectadas en serie e infinitamente próximas unas a otras. Si circula una corriente eléctrica de intensidad I por las espiras, determinar el flujo magnético (flujo del vector $\vec{B}$) que atraviesa cada una de las espiras elementales.

b) Aplicar el resultado anterior para calcular el flujo de $\vec{B}$ a través de una espira si el toroide tiene 200 vueltas, $R_1$ = 2,45 cm, $R_2$ = 3,86 cm, h = 2,54 cm y la corriente eléctrica vale 2 A.

**- Ley de Ampère en medios materiales; cálculo de $\vec{H}$, $\vec{M}$ y $\vec{B}$.**

**7.-** Una tubería cilíndrica de radio interior $R_1$ y radio exterior $R_2$, cuya longitud es mucho mayor que los radios, está rodeada de aire ($\mu_0$), tanto por el interior como por el exterior. El material de la tubería es magnéticamente lineal de permeabilidad constante $\mu$. Si en el interior de la tubería y ocupando el eje hay un conductor filiforme, recto e infinito, por el que circula una corriente eléctrica de intensidad I, calcular los vectores intensidad de campo magnético, $\vec{H}$, inducción magnética, $\vec{B}$, y magnetización o imanación, $\vec{M}$, en todos los puntos del espacio.

<u>Datos:</u> $R_1$ = 10 cm, $R_2$ = 14 cm, $\mu = 1000\ \mu_0$, I = 50 A

**8.-** El vector densidad de corriente eléctrica, $\vec{J}$, a lo largo de un cilindro conductor de radio R = 5 cm, recto, de longitud infinita, rodeado de aire ($\mu_0$), es paralelo al eje del conductor, y su módulo varía linealmente con la distancia al eje de la forma

$$\left|\vec{J}\right| = J_o \frac{r}{R};\ R = 0{,}05\ \text{m};\ J_o = 3{,}82 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

La permeabilidad del material conductor es constante de valor $\mu = 350\ \mu_0$. Calcular:

a) los vectores $\vec{H}$, $\vec{B}$ y $\vec{M}$ en puntos interiores del conductor, y

b) los vectores $\vec{H}$, $\vec{B}$ y $\vec{M}$ en puntos exteriores al conductor.

**9.-** Un cable coaxial está formado por un conductor interno cilíndrico macizo de radio $R_1$ y permeabilidad $\mu_1$, recto, de longitud infinita, y un conductor cilíndrico coaxial con el anterior de radio interior $R_2$, radio exterior $R_3$ y permeabilidad $\mu_2$, ($R_1 < R_2 < R_3$). Por el conductor interior circula una corriente eléctrica distribuida uniformemente de intensidad I, que regresa por el conductor exterior, distribuyéndose también de forma uniforme (ambas corrientes son antiparalelas). El espacio que separa ambos conductores, así como el que rodea el conductor exterior, es aire ($\mu_0$). Calcular los vectores intensidad de campo magnético, $\vec{H}$, e inducción magnética, $\vec{B}$, en todos los puntos del espacio.

<u>Datos:</u> $R_1$ = 0,4 cm, $R_2$ = 1,8 cm, $R_3$ = 2 cm, $\mu_1 = 250\ \mu_0$, $\mu_2 = 100\ \mu_0$, I = 120 A

**- Medios no lineales e histéresis.**

**10.-** a) Calcular el vector intensidad de campo magnético, $\vec{H}$, y el vector densidad de flujo magnético, $\vec{B}$, en el interior de un solenoide ideal de radio R, longitud $\propto$ ($\propto >> R$), con n vueltas (espiras elementales) por unidad de longitud arrolladas en su superficie, cuando circula una corriente eléctrica de intensidad I, si el materia del núcleo es ferromagnético de permeabilidad $\mu$.

b) Aplicar el resultado anterior para determinar el valor del vector $\vec{B}$ en el centro de un solenoide de longitud 1,23 m y un diámetro interior de 3,55 cm. El devanado del solenoide tiene cinco capas de 850 espiras cada una y conduce una corriente de 0,5 A. El núcleo es de un material cuya permeabilidad es -aproximadamente y para los valores de NI del problema- $\mu = 500\ \mu_0$. Comparar este valor con el obtenido en el problema 13 del Tema 6.

Para intentar aumentar el valor del vector $\vec{B}$ obtenido en el apartado anterior, se hace circular una corriente eléctrica de intensidad 5,57 A.

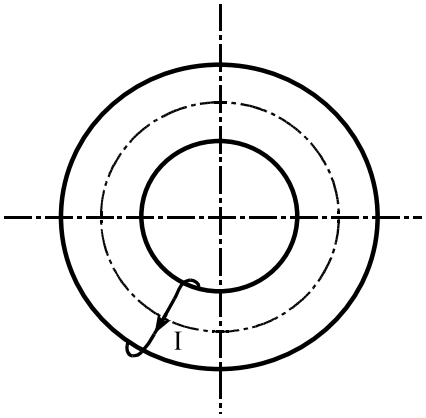
c) Calcular el nuevo valor de $\vec{B}$, indicando razonadamente si el resultado obtenido es realmente posible o no. (El codo de saturación en la curva de primera imanación del material ferromagnético se encuentra alrededor de los 2000 A/m).

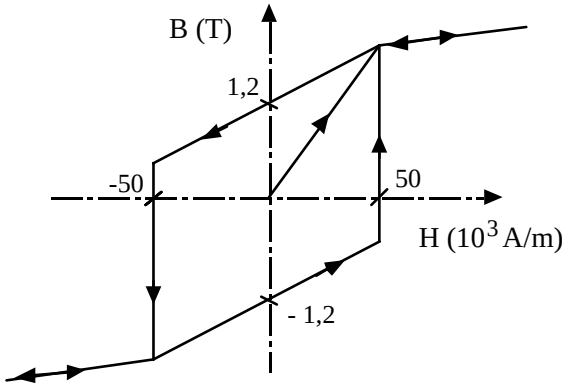
**11.-** a) Una bobina toroidal de sección rectangular, de radio interior $R_1$ y radio exterior $R_2$ está constituida por N espiras elementales de altura h, conectadas en serie e infinitamente próximas unas a otras. Si circula una corriente eléctrica de intensidad I = 2 A por las espiras, calcular los vectores $\vec{H}$, $\vec{B}$ y $\vec{M}$ en el interior del toroide. El núcleo es de granos de hierro compactados (código de colores *amarillo-blanco*) cuya permeabilidad es -aproximadamente y para los valores de N I del problema- $\mu = 210\ \mu_0$.

b) Para intentar aumentar el valor del vector $\vec{B}$ obtenido en el apartado anterior, se hace circular una corriente eléctrica de intensidad 10 A. Calcular el nuevo valor de $\vec{B}$, indicando razonadamente si el resultado obtenido es realmente posible o no. (El codo de saturación en la curva de primera imanación del material se encuentra alrededor de los 5750 A/m).

Datos: N = 200 vueltas, $R_1$ = 2,45 cm, $R_2$ = 3,86 cm, h = 2,54 cm.

**12.-** El núcleo de un toroide de sección circular es de Alnico V, material ferromagnético cuya curva de magnetización - ciclo de histéresis - se puede aproximar al mostrado en la figura. Inicialmente el material se encontraba desmagnetizado, $\vec{M}$ (t = 0) = $\vec{0}$. Se hace circular por la bobina una corriente eléctrica de intensidad $I = I_0$ sen ($\omega t$), con $I_0$ tal que el Alnico V llega a superar el codo de saturación. Indicar la dirección y sentido final del vector $\vec{M}$ en el interior del núcleo después de transcurridos dos ciclos completos, $t = 4\pi/\omega$.



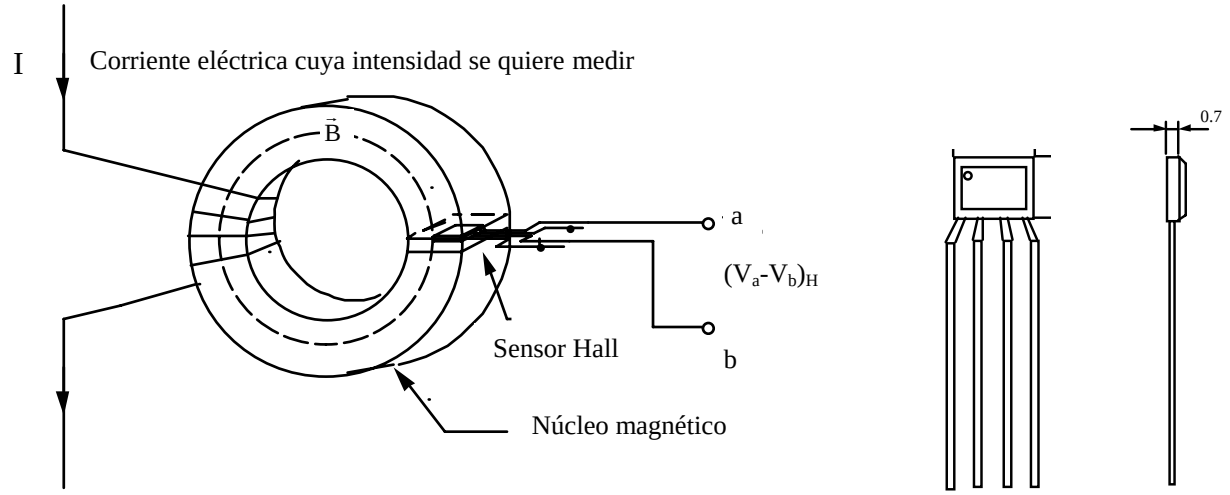

**- Aplicaciones a las medidas de magnitudes eléctricas.**

**13.-** Una de las aplicaciones del sensor de efecto Hall es la de transductor de corriente, tanto continua como alterna. Cuando en un conductor arrollado sobre un toroide circula una corriente eléctrica de intensidad I, aparece un campo magnético en el toroide. El sensor Hall colocado en el interior del toroide se ve afectado por dicho campo magnético, apareciendo en su salida un valor de tensión proporcional a $\vec{B}$ y, por lo tanto, a la corriente eléctrica que lo genera.

Un sensor comercial de efecto Hall de Arseniuro de Galio (GaAs), como el que se muestra en la figura, tiene un espesor de 0,7 mm, siendo el valor del producto $v_a \cdot \propto$ ( $v_a \equiv$ velocidad de arrastre de los portadores, $\propto \equiv$ anchura eficaz del sensor ) de 1,3 V/T. Para poder medir la intensidad de corriente eléctrica de un determinado circuito eléctrico, situamos este sensor Hall paralelo al plano de una sección de un toroide de sección cuadrada, de radio interior $R_1$ = 4 cm, radio exterior $R_2$ = 5 cm y en el centro de dicha sección. La bobina que rodea al toroide, y por donde circula la corriente eléctrica a medir, tiene una capa de 10 vueltas.

La permeabilidad del núcleo del toroide, en el que se ha realizado una ranura de 0,7 mm para introducir el sensor (entrehierro), es aproximadamente constante de valor 350 $\mu_o$.

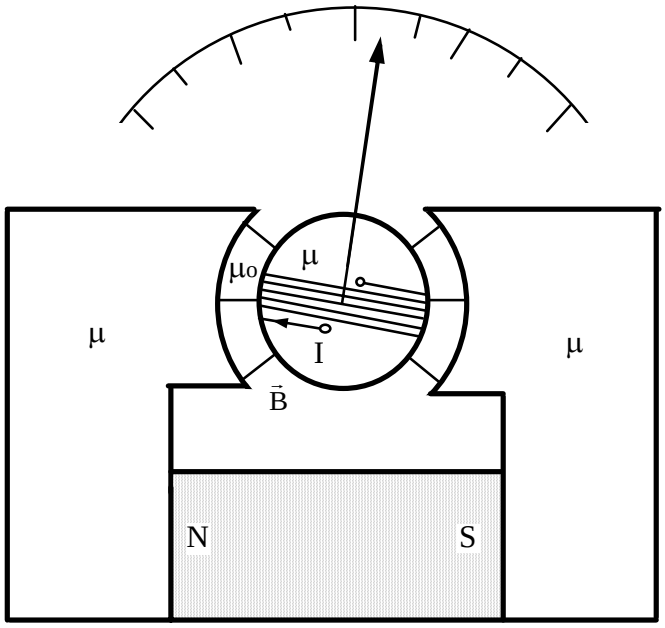
Calcular el valor de la intensidad de corriente eléctrica que circula por el circuito cuando la fem Hall, $\varepsilon_H$ , medida es de 910 mV.




**14.-** Un galvanómetro de cuadro móvil consiste en una bobina arrollada sobre un cilindro de material ferromagnético que puede girar libremente alrededor de su eje. Solidario al cilindro se encuentra una aguja que indica el desplazamiento angular respecto de una posición inicial.

Este cilíndro forma parte de un circuito magnético formado por un imán permanente y unas piezas del mismo material que el cilindro de la bobina. Estas piezas están mecanizadas en sus extremos de forma que las superficies curvas tengan un radio ligeramente superior al radio del cilindro y su eje sea común a éste. El espacio de aire entre las piezas fijas y el cilindro se conoce como entrehierro, y es necesario para permitir el giro del cilindro. Su forma y espesor despreciable permiten que las líneas del vector inducción magnética $\vec{B}$ en ese espacio sean radiales. Cuando circula una corriente eléctrica por la bobina, aparece un momento de origen magnético sobre ella, lo que provoca el giro del cilindro. Para compensar este momento, evitando que el cilindro se comporte como el rotor de una máquina eléctrica, se coloca un muelle de torsión que proporciona un momento de sentido contrario, permitiendo al cilindro alcanzar un nuevo estado de equilibrio una vez realizado un cierto desplazamiento angular.

Suponiendo que la bobina está compuesta de 250 espiras de $2{,}52\cdot10^{-4}$ m$^2$, el módulo del vector $\vec{B}$ en el entrehierro es de 0,23 T y la constante de torsión del muelle vale $3\cdot10^{-6}$ N m/rad, calcular la desviación de la aguja cuando circula por la bobina una corriente eléctrica de 100 μA.



**BIBLIOGRAFÍA Y RESULTADOS.**

-- Problema **1**, Resultado:

a) $\Phi_{abcd}$ = 1,875 mWb, $\Phi_{oefg}$ = –1,875 mWb, $\Phi_{adoe}$ = –2,5 mWb, $\Phi_{bcfg}$ = 2,5 mWb, $\Phi_{abef}$ = 3,125 mWb $\Phi_{dcog}$ = –3,125 mWb, tomando como vector normal el saliente al volumen cubico.

b) $\oint_s \vec{B}d\vec{s} = 0\ \text{Wb} = \Phi_{abcd} + \Phi_{oefg} + \Phi_{adoe} + \Phi_{bcfg} + \Phi_{abef} + \Phi_{dcog}$ (debe cumplirse siempre)

-- Problema **2**, Resultado:

a) $\Phi_{base}$ = –6,28 Wb, $\Phi_{sup.\ curva}$ = 6,28 Wb, tomando como vector normal el saliente al volumen semiesferico.

b) $\oint_s \vec{B}d\vec{s} = 0\ \text{Wb} = \Phi_{base} + \Phi_{sup.\ curva}$ (debe cumplirse siempre)

-- Problema **3**, Resultado:

$\Phi_{base\ 1}$ = –25 μWb, $\Phi_{base\ 2}$ = 84,95 μWb, tomando como vector normal el saliente al volumen cilindrico.

b) $\oint_s \vec{B}d\vec{s} = 0\ \text{Wb} = \Phi_{base\ 1} + \Phi_{base\ 2} + \Phi_{sup.\ curva}$ (debe cumplirse siempre) $\Rightarrow \Phi_{sup.\ curva} = -59{,}95\ \mu\text{Wb}$

-- Problema **4**, Resultado:

$\Phi_{aefd}$ = 0,24 Wb, vector normal saliente al volumen; $\Phi_{Total} = \oint_s \vec{B}d\vec{s} = 0\ \text{Wb}$ (debe cumplirse siempre)

-- Problema **5**, [ Serway R., "Electricidad y Magnetismo", 3ª Ed. rev.; Cap. 30, Ej. 30.8ʳ ]. Resultado:

$$\Phi = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{1}{2\cdot\pi}\, b \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 2{,}64\ \mu\text{Wb}$$

-- Problema **6**, Resultado:

$$\Phi = \mu_0 \cdot N \cdot I \frac{1}{2\cdot\pi}\, h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 0{,}924\ \mu\text{Wb}$$

-- Problema **7**, Resultado:

$$\forall\ r \le 10\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{I}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{7{,}96}{r}\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu_0 \cdot \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{10}{r}\left[\mu T\right],\ \left|\vec{M}(r)\right| = 0\left[\frac{A}{m}\right]$$

$$\forall\ 10\ \text{cm} \le r \le 14\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{I}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{7{,}96}{r}\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu \cdot \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{10}{r}\left[mT\right],\ \left|\vec{M}(r)\right| = \frac{7{,}96\cdot 10^3}{r}\left[\frac{A}{m}\right]$$

$$\forall\ r \ge 14\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{I}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{7{,}96}{r}\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu_0 \cdot \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{10}{r}\left[\mu T\right],\ \left|\vec{M}(r)\right| = 0\left[\frac{A}{m}\right]$$

-- Problema **8**, Resultado:

$$\forall\ r \le 0{,}05\ \text{m},\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{J_o}{3\cdot R} r^2 = 25{,}47\cdot 10^3 \cdot r^2\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu \cdot \left|\vec{H}(r)\right| = 11{,}2\, r^2\left[T\right],\ \left|\vec{M}(r)\right| = 8{,}89\cdot 10^6 \cdot r^2\left[\frac{A}{m}\right]$$

$$\forall\ r \ge 0{,}05\ \text{m},\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{I}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{J_o}{3}\frac{R^2}{r} = \frac{3{,}18}{r}\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu_0 \cdot \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{4}{r}\left[\mu T\right],\ \left|\vec{M}(r)\right| = 0\left[\frac{A}{m}\right]$$

-- Problema **9**, [ López Rodríguez, V., "Problemas resueltos de Electromagnetismo", Cap. 11, Pb. 11.7ʳ ].

Resultado:

$$\forall\ r \le 0{,}4\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{120}{\pi\cdot(4\cdot 10^{-3})^2}\cdot r = 1{,}194\cdot 10^{6}\ r\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = 375{,}1\ r\,[T]$$

$$\forall\ 0{,}4 \le r \le 1{,}8\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = 120\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot r} = 19{,}1\ \frac{1}{r}\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu_0\cdot 120\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot r} = 24\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{r}\ [T],$$

$$\forall\ 1{,}8\ \text{cm} \le r \le 2\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = I\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot r}\left[1-\frac{r^2-\left(1{,}8\ 10^{-2}\right)^2}{\left(2\ 10^{-2}\right)^2-\left(1{,}8\ 10^{-2}\right)^2}\right] = \frac{19{,}1}{r}\left[1-\frac{r^2-324\ 10^{-6}}{76\ 10^{-6}}\right]\left[\frac{A}{m}\right]$$

$$\left|\vec{B}(r)\right| = 2{,}4\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{r}\left[1-\frac{r^2-\left(1{,}8\ 10^{-2}\right)^2}{\left(2\ 10^{-2}\right)^2-\left(1{,}8\ 10^{-2}\right)^2}\right][T]$$

$$\forall\ r \ge 2\ \text{cm},\ \left|\vec{H}(r)\right| = 0\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = 0\,[T]\ .$$

-- Problema **10**, Resultado:

a) $\left|\vec{H}\right| = n\cdot I = \frac{N}{\ell}\cdot I\left[\frac{A}{m}\right]$; $\left|\vec{B}\right| = \mu\cdot n\cdot I = \mu\cdot\frac{N}{\ell}\cdot I\ [T]$ b) $\left|\vec{B}\right| = 1{,}085\ [T]$

c) $\left|\vec{H}\right| = 19{,}246\cdot 10^{3}\ \frac{A}{m} >> 2000\ \frac{A}{m} \Rightarrow \left|\vec{B}\right| = \mu\cdot 2000 = 1{,}256\ T$

-- Problema **11**, Resultado:

a)$\forall\ \left|\vec{H}(r)\right| = \frac{N\cdot I}{2\cdot\pi\cdot r}\left[\frac{A}{m}\right] = \frac{63{,}66}{r}\left[\frac{A}{m}\right],\ \left|\vec{B}(r)\right| = \mu\cdot\left|\vec{H}(r)\right| = \frac{16{,}8}{r}\ [mT]$

b)$\forall\ \left|\vec{H}_{min}\right|_{I\,=\,10\,A} = \left|\vec{H}\left(r=R_2\right)\right|_{I\,=\,10\,A} = 8246{,}4\ \frac{A}{m} > 5750\ \frac{A}{m} \Rightarrow \left|\vec{B}(r)\right| = \mu\cdot 5750\,\frac{A}{m} = 1{,}517\ T$

-- Problema **12**[e], Teoría Convocatoria de Septiembre, Curso 1997 - 98, 10-9/98. Resultado:

$$\left\{\vec{M}\right\}_{r\varphi z} = \frac{1{,}2\cdot 10^{7}}{4\cdot\pi}\left(-\vec{u}_{\varphi}\right)\left[\frac{A}{m}\right]$$ ; el vector gira en sentido horario.

-- Problema **13**, Resultado:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\varepsilon_H}{\left|\vec{v}\right|\cdot\ell} = 0{,}7\ T,\ \left|\vec{B}\left(r=\ 4{,}5\ cm\right)\right| = \mu\,\frac{10\cdot I}{2\cdot\pi\cdot 0{,}045} = 0{,}7\ \ T \Rightarrow\ I = 45\ A$$

-- Problema **14**, [ Resnick R. - Halliday D., "Física", Tomo II, 4[a] Ed.; Cap. 34, Ej. 7[r] ]. Resultado:

$$\alpha = \frac{I\cdot N\cdot S\cdot\left|\vec{B}\right|}{k} = 0{,}483\ rad = 27{,}67\ ^{o}$$

[r]: problema resuelto.
[e]: problema o cuestión propuesto en examen