2.- Un alambre conductor de cobre tiene una sección transversal de 0,8 mm^2 . La carga eléctrica que atraviesa esa sección decrece exponencialmente con el tiempo según la expresión

$q(t) = 72 \cdot (1 - e^{-0,2t})$ pC. donde t es el tiempo en segundos.

a) Calcular la expresión de la corriente eléctrica que circula por el alambre.
b) Calcular la carga que atraviesa la sección del alambre desde t = 2 s, hasta t = 3 s.
c) Calcular el módulo del vector densidad de corriente eléctrica, $|\vec{J}|$, en t = 1 s.

En este problema nos dan la carga que ha atravesado la sección de un conductor en función del tiempo.

Haciendo un símil entre la carga y un fluido, podríamos pensar que la carga que atraviesa una sección es como la cantidad de agua que atraviesa una sección de tubería donde hemos colocado un contador de agua. La lectura del contador nos da la cantidad de agua que ha circulado o atravesado la sección de tubería en donde está instalado.

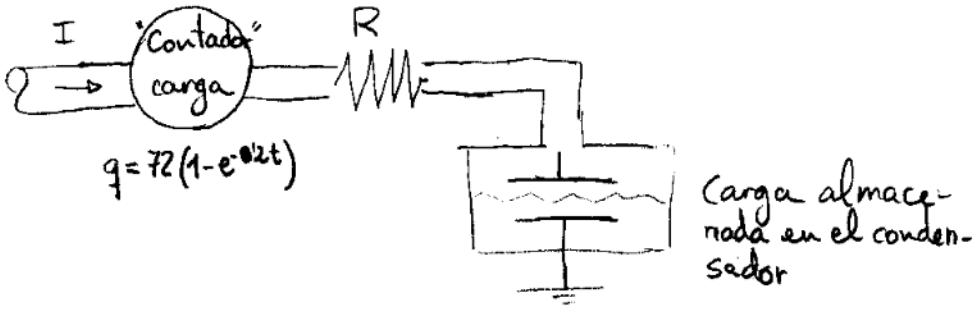
En nuestro caso eléctrico, hemos medido la carga que ha atravesado una sección de cable desde t=0. La "lectura" de la carga que ha atravesado en un instante "t" obedece la expresión matemática $q(t) = 72(1 - e^{-0,2t})$ μC.

En el símil de la tubería, lo rápido que aumenta la lectura del contador nos indica el caudal que atraviesa la tubería. Si todos los grifos están cerrados, la cantidad de agua que ha atravesado el contador desde su instalación no varía, y el caudal que atraviesa el contador es cero. Si todos los grifos están abiertos, el contador aumentará su lectura rápidamente.

En nuestro caso eléctrico, lo rápido que cambia nuestro "contador de carga" instalado en una sección del cable lo podemos calcular numéricamente. La derivada de una función nos indica precisamente la tasa de variación de esa función. Por tanto, para calcular la intensidad que atraviesa la sección basta con calcular la derivada de la carga que ha circulado por el cable con respecto al tiempo

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = 72\cdot(+0'2)\, e^{-0'2t} = 14'4 \cdot e^{-0'2t}\ \frac{\mu C}{s} = 14'4\, e^{-0'2t}\ \mu A}$$

Observación: los datos del problema corresponderían a un circuito RC, donde la carga que atraviesa el cable sería la misma que se almacena en el condensador.



b) La cantidad de carga que atraviesa la sección de alambre desde $t = 2s$ hasta $t = 3s$ la calculamos por simple resta

$$\Delta q = q(t=3s) - q(t=2s) = 72\left(1 - e^{-0'2\cdot 3}\right) - 72\left(1 - e^{-0'2\cdot 2}\right)$$

$$\Delta q = 32'48 - 23'74 = 8'75\ \mu C$$

Observación: esto es análogo a cuando calculan el agua que hemos consumido en un periodo como diferencia de la lectura actual del contador menos la lectura del recibo anterior.

c) La densidad de corriente eléctrica $|\vec{J}|$ es proporcional a la velocidad a la que se mueven los portadores: $J = Nqv$

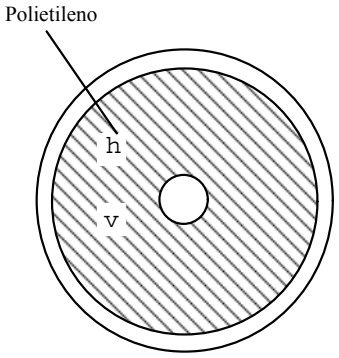
En un cable homogéneo, la corriente se reparte uniformemente por su sección y podemos aplicar la fórmula

$$|\vec{J}| = J = \frac{I}{S} = \frac{14'4 \cdot e^{-0'2\,t}\ \mu A}{0'8\ mm^2} = 18 \cdot e^{-0'2t}\ \frac{\mu A}{mm^2} = 18 \cdot e^{-0'2t}\ \frac{A}{m^2}$$

$$J(t=1) = 14'73\ \frac{A}{m^2}$$

Observación: En nuestro símil, $\vec{J}$ equivaldría a la velocidad del fluido

6.- El cable coaxial de una línea de transmisión está formado por un alambre interno cilíndrico de radio 0,81 mm y un conductor cilíndrico coaxial con el anterior de radio interior 2,95 mm y espesor despreciable. El espacio que separa ambos conductores está lleno de polietileno. Calcular la corriente de fuga a través del aislante en 10 m de longitud del cable cuando la diferencia de potencial aplicada entre los dos conductores es de 1000 V.



- Corriente de fugas de un cable coaxial.

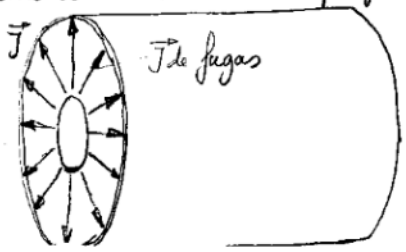
En este problema, hay una pequeña corriente de fugas radial, desde el "vivo" (cilindro interior) hasta la malla (tomando el conductor interior como positivo.

En el enunciado se da la permitividad del polietileno. No obstante, el campo eléctrico no se puede calcular como un condensador cilíndrico, porque en un condensador nos basábamos en que no había carga real en el aislante. Ahora no se cumple esta condición. Por ello, tenemos que aplicar la Ley de Ohmn para hallar el campo eléctrico

• Estudio de la geometría

- El problema tiene simetría cilíndrica: podemos girar cualquier ángulo el cable y el sistema será equivalente. Por otra parte, como el cable es indefinido (muy largo), podemos tomar cualquier sección y tendremos infinito trozo de cable a derecha e izquierda. Por tanto, tanto el campo eléctrico como la densidad de corriente sólo pueden depender de r.

- La dirección de $\vec{J}$ o $\vec{E}$ (ambos son paralelos en un material ohmico) la podemos deducir utilizando la propiedad de que las líneas de $\vec{E}$ son perpendiculares a las líneas equipotenciales. Como los cilindros son superficies equipotenciales, la corriente fluye perpendicularmente a éstos. $\Rightarrow$ $\vec{J}$ y $\vec{E}$ son radiales

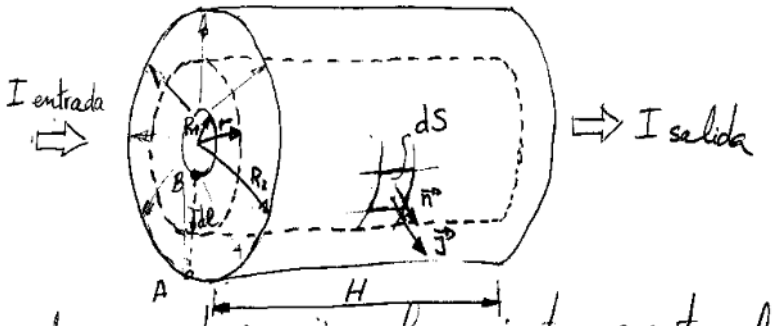


$$\vec{J} = J(r)\cdot\vec{u_r}$$

$$\vec{E} = E(r)\cdot\vec{u_r} \underset{\text{material resistivo}}{=} \frac{J(r)}{\sigma}\vec{u_r}$$

- <u>Ecuación de continuidad</u>

Para ver cómo varía J con el radio, tenemos que aplicar continuidad. El volumen que escojo es un cilindro de radio r, $R_1 < r < R_2$



En condiciones estacionarias, la corriente que entra al volumen es igual a la que sale. En este caso, debemos tener en cuenta la corriente de fugas que circula por el polietileno.

$$I_{entrada} = I_{salida} + \int_{\text{sup. lateral del cilindro}} \vec{J}\cdot\vec{n}\cdot dS = I_{salida} + I_{fugas}$$

$$\Rightarrow I_{fugas} = \int_{\text{sup. lat. r}} \vec{J}\cdot\vec{n}\cdot dS = \int_{\text{sup. lateral r}} J(r)\cdot \vec{u_r}\cdot\vec{n}\cdot dS \underset{\vec{u_r}//\vec{n}}{=} \int_{\text{sup. lat.}} J(r)\, dS \underset{\substack{\text{J cte en el}\\ \text{lateral del cilindro}\\ (r=cte)}}{=}$$

$$= J(r)\cdot\int_{\text{sup. lat}} dS = J(r)\cdot S_{\text{sup lateral cilindro}} = J(r)\cdot 2\pi r H$$

$$\Rightarrow J(r) = \frac{I_{fugas}}{2\pi r H}; \qquad \vec{J} = \frac{I_{fugas}}{2\pi r H}\vec{u_r}$$

- <u>Cálculo de $\vec{E}$</u>

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I_{fugas}}{2\pi r H \sigma}\vec{u_r}$$

- <u>Diferencia de potencial entre los electrodos</u> $A \to R_2$, $B \to R_1$

$$V_{R_2} - V_{R_1} = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E\cdot dl\cdot\cos 0 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I_{fugas}}{2\pi r H \sigma}\, dr$$

$$V_{R2} - V_{R1} = \frac{I_{fugas}}{2\pi H \sigma}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{I_{fugas}}{2\pi H \sigma}\ln\frac{R_2}{R_1} \underset{\text{Dato}}{=} V_0 = 1000\,V$$

• <u>Sustituyo valores</u>

$$\Rightarrow I_{fugas} = \frac{2\pi H \sigma V_0}{\ln R_2/R_1} = \frac{2\pi \cdot 10\,cm \cdot 6'25\cdot 10^{-12}\,(\Omega m)^{-1}\cdot 1000\,V}{\ln \frac{2'95\,cm}{0'81\,cm}}$$

$$\Rightarrow I_{fugas} = 3'04\cdot 10^{-7}\,A \simeq 0'3\,\mu A$$

• <u>Comprobación de que no se produce ruptura dieléctrica en el polietileno</u>

$$|\vec{E}| = E = \frac{I_{fugas}}{2\pi r H \sigma} = \frac{773'7}{r}$$ (máximo cuando r es mínimo)

El campo es máximo en el radio mínimo $\Rightarrow$ el punto crítico donde aparecerían primero los efectos de ionización sera en $r = R_1$

$$E_{R1} = \frac{773'7}{0'81\cdot 10^{-3}} = 955158\,\frac{V}{m} = 0'955\,\frac{MV}{m} < 50\,\frac{MV}{m} = E_{rigidez}$$

$\Rightarrow$ No hay fenómenos de ruptura.

9.- Una corriente eléctrica de intensidad I atraviesa radialmente un volumen cilíndrico hueco de longitud L, compuesto por un cilindro de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y un cilindro coaxial con el anterior de radios R_2 y R_3 ($R_2 < R_3$). El material del cilindro interior tiene conductividad constante, σ_1 @ 2 (Z óm)$^{-1}$. El material del cilindro exterior es homogéneo, de conductividad σ_2 @ 5 (Z óm)$^{-1}$. Las superficies de radios R_1 y R_3 se encuentran cubiertas con una capa de material conductor perfecto (σ# #) de espesor g#despreciable. Calcular:

a) Potenciales en cualquier punto de las superficies de radios R_1, R_2 y R_3 .

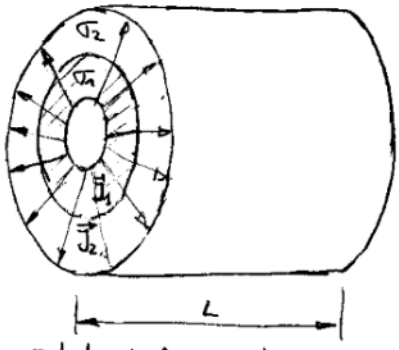
b) Resistencia equivalente del volumen conductor.

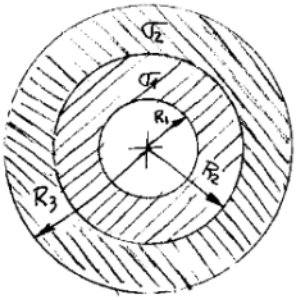
c) Si quitamos las capas cilíndricas conductoras perfectas de las superficies de radios R_1 y R_3, situamos dos superficies circulares conductoras perfectas de radio R_3 y espesor despreciable en los dos extremos del volumen, y hacemos circular la misma corriente eléctrica I en dirección axial, calcular la nueva resistencia del volumen.

<u>Datos:</u> R_1 = 1 cm, R_2 = 3 cm, R_3 = 5 cm, L = 10 cm, I = 20 A

14.- Calcular para los dos sistemas conductores anteriormente enunciados la potencia disipada por unidad de volumen en cada uno de los puntos de los medios, y la potencia total disipada en el volumen.

a) Estamos frente a un problema muy similar al problema del cable coaxial (pb. 6). Aunque ahora tenemos dos medios, las condiciones de simetría son iguales y la corriente tendrá dirección radial



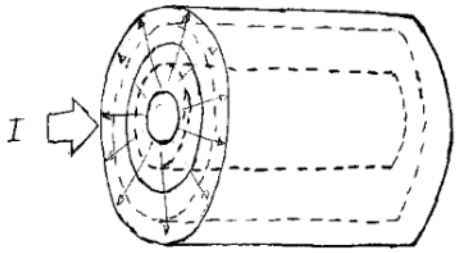


• <u>Estudio de la geometría</u>

$$\left.\begin{array}{l}\vec{J}_1 = J_1(r)\,\vec{u}_r \\ \vec{J}_2 = J_2(r)\,\vec{u}_r\end{array}\right\}$$ la corriente es radial en ambos medios porque $\vec{J}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares a las sup. equipotenciales (cilindros)

• <u>Ec. de Continuidad</u>

Para conocer J_1 y J_2 aplicamos la ecuación de continuidad en una superficie cerrada cilíndrica, de largura L y superficie lateral contenida dentro del cilindro. En condiciones estacionarias



$I_{entra} = I_{sale}$

$$I = \int_{sup\ lateral} \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS \underset{\vec{J}\,//\,\vec{n}}{=} \int_{sup.\ lateral\ cilindro} J(r)\,dS \underset{\substack{J=cte\ en\ la\\ superficie\ (radio)}}{=}$$

$$= J(r)\int_{sup\ lateral} dS = J(r)\cdot S_{cilindro} = J\cdot 2\pi r H$$

$$\Rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi r L}$$ (válido para los dos medios)

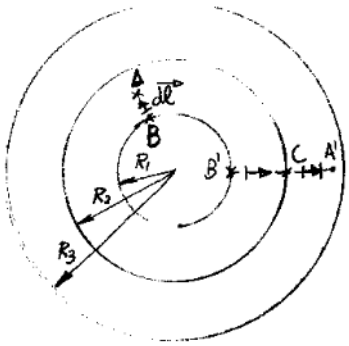
• Cálculo de $\vec{E_1}$ y $\vec{E_2}$

$$\vec{E_1} = \frac{\vec{J_1}}{\sigma_1} = \frac{I}{2\pi r L \sigma_1}\vec{u_r} \quad ; \qquad \vec{E_2} = \frac{\vec{J}}{\sigma_2} = \frac{I}{2\pi r L \sigma_2}\vec{u_r}$$

• Cálculo de los potenciales en cualquier punto

* Puntos en el primer material. $A \to r$, $B \to R_1$

$R_1 < r < R_2$



$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\,\vec{dl} \underset{\vec{E}\parallel\vec{dl}}{=} -\int_B^A E\cdot dl \overset{dl=dr}{=} -\int_{R_1}^{r} \frac{I}{2\pi r L \sigma_1}dr =$$

$$= -\frac{I}{2\pi L \sigma_1}\ln\frac{r}{R_1}$$

(sale negativo porque la corriente va del electrodo más positivo V_B al negativo).

* Puntos en el 2º material $R_2 < r < R_3$

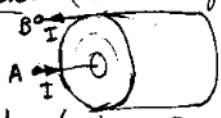
$$V_{A'} - V_{B'} = (V_{A'} - V_C) + (V_C - V_{B'}) = (V_{A'} - V_C) - \frac{I}{2\pi L \sigma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$V_{A'} - V_C = -\int_C^{A'} \vec{E}\cdot\vec{dl} \underset{\vec{E}\parallel\vec{dl}}{=} -\int_{R_2}^{r} E\,dl \underset{dl=dr}{=} \int_{R_2}^{r}\frac{I}{2\pi r L \sigma_2}dr = -\frac{I}{2\pi L \sigma_2}\ln\frac{r}{R_2}$$

$$V_{A'} - V_{B'} = -\frac{I}{2\pi L}\left(\frac{1}{\sigma_1}\ln\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{\sigma_2}\ln\frac{r}{R_2}\right)$$

b) Resistencia equivalente del conductor (entre R_1 y R_3)

Basta con aplicar la definición



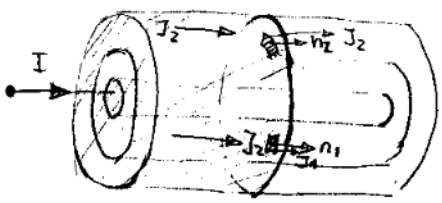
$$R_{eq} = \frac{V_+ - V_-}{I} = \frac{V_{R1} - V_{R3}}{I} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\sigma_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\sigma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)$$

c) Ahora hacemos circular la corriente en el sentido axial (en la dirección del eje, $\vec{u_z}$). En este caso, como las superficies equipotenciales son las tapas planas, ahora la corriente va en la dirección del dibujo

$$\vec{J_1} = J_1\cdot\vec{u_z} \qquad \vec{J_2} = J_2\,\vec{u_z}$$

Aunque el volumen del material 1 y 2 son "tubos", realmente J_1 y J_2 son constantes en los materiales y el problema se podría resolver como dos resistencias en paralelo, de sección $S_1 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ y $S_2 = \pi(R_3^2 - R_2^2)$ y longitud L.

Para comprobarlo aplicamos continuidad en condiciones estacionarias



$$I \text{ entra} = I \text{ sale} \qquad n_1 // J_1 \quad n_2 // J_2$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS + \int_{R_2}^{R_3} \vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS =$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} J_1 \, dS + \int_{R_2}^{R_3} J_2 \, dS; \qquad J_1 = cte \quad J_2 = cte$$

- La corriente se reparte uniformemente por cada material $\Rightarrow J_1 = cte \quad J_2 = cte$

$$\Rightarrow \quad I = J_1 \cdot \int_{R_1}^{R_2} dS + J_2 \int_{R_2}^{R_3} dS = J_1 \cdot S_1 + J_2 \cdot S_2$$

Por comodidad, llamo I_1 e I_2 a las intensidades que atraviesan cada material

$$I_1 = J_1 S_1 \; ; \qquad I_2 = J_2 S_2$$

- <u>Cálculo de E_1 y E_2</u>

$$E_1 = \frac{J_1}{\sigma_1} = \frac{I_1}{S_1 \sigma_1} = cte_1; \quad E_2 = \frac{J_2}{\sigma_2} = \frac{I_2}{S_2 \sigma_2} = cte_2;$$

- <u>Cálculo de las d.d.p. entre los extremos</u>

* A través del material 1

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} \underset{\vec{E} \text{ opuesto } \vec{dl}}{=} -\int E_1 \cdot dl \, (-1) \underset{E \, cte}{=} E_1 \int_B^A dl = E_1 \cdot L = \frac{I_1 L}{S_1 \sigma_1}$$

* Análogamente, la ddp calculada a través del material 2

$$V_A - V_B = \frac{I_2 L}{S_2 \sigma_2}$$

• Cálculo de la resistencia

$$R_{eq} = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{V_A - V_B}{I_1 + I_2}$$

$$I_1 = \frac{(V_A - V_B)\,\sigma_1 S_1}{L} \; ; \qquad I_2 = \frac{(V_A - V_B)\,\sigma_2 S_2}{L}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{\sigma_1 S_1}{L} + \frac{\sigma_2 S_2}{L}} = \frac{L}{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}$$

$$R_{eq} = \frac{L}{\pi\left[\sigma_1 (R_2^2 - R_1^2) + \sigma_2 (R_3^2 - R_2^2)\right]}$$

(Pb. 14) Potencia disipada en las dos situaciones

La densidad de potencia disipada la podemos calcular directamente

$$\frac{dP_1}{dvol} = \vec{J}_1 \vec{E}_1 = \frac{J_1^2}{\sigma_1^2} \qquad \frac{dP_2}{dvol} = \vec{J}_2 \vec{E}_2 = \frac{J_2^2}{\sigma_2^2}$$

a) * Corriente radial (sustituyendo resultados obtenidos en apartados anteriores)

$$\frac{dP_1}{dvol} = \frac{1}{\sigma_1}\left(\frac{I}{2\pi r L}\right)^2 \qquad \frac{dP_2}{dvol} = \frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{I}{2\pi r L}\right)^2$$

b) * Corriente axial $\quad V_A - V_B = I \cdot R_{eq}$

$$\frac{dP_1}{dvol} = \frac{1}{\sigma_1}\left(\frac{I_1}{S_2}\right)^2 = \sigma_1 \left(\frac{I \cdot R_{eq}}{L}\right)^2 \qquad \frac{dP_2}{dvol} = \frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{I_2}{S_2}\right)^2 = \sigma_2 \left(\frac{I \cdot R_{eq}}{L}\right)^2$$

Para calcular la potencia disipada en cada sistema, podemos integrar la densidad de potencia en cada volumen. No obstante, en este caso que conocemos las resistencias equivalente, es más fácil aplicar:

$$P = R_{eq} I^2$$

Resultados numéricos

9) a) $V(r=R_1)-V(r=R_2) = -\left(V(r=R_2)-V(r=R_1)\right) = \frac{I}{2\pi L \sigma_1}\ln\frac{R_2}{R_1} =$

$$= \frac{20\,A}{2\pi\cdot 0'1\,m\cdot 2\,(\Omega m)^{-1}}\ln\frac{3cm}{1cm} = 17'48\,V$$

$$V(r=R_2)-V(r=R_3) = \frac{I}{2\pi L\sigma_2}\ln\frac{R_3}{R_1} = \frac{20\,A}{2\pi 0'1\cdot 5\,(\Omega m)^{-1}}\ln\frac{5cm}{3cm}$$

$$= 3'25\,V$$

Si tomo como referencia un punto del radio exterior R_3, los potenciales puntuales serían

$V(r=R_3)=0$, $V(r=R_2)=3'25V$, $V(r=R_1)=17'48+3'25=$
$=20'74\,V$

b) $$R_{eq} = \frac{1}{2\pi\cdot 0'1\,m}\left(\frac{1}{2\,(\Omega m)^{-1}}\ln\frac{3cm}{1cm} + \frac{1}{5(\Omega m)^{-1}}\ln\frac{5cm}{3cm}\right)$$

$R_{eq} = 1'04\,\Omega$

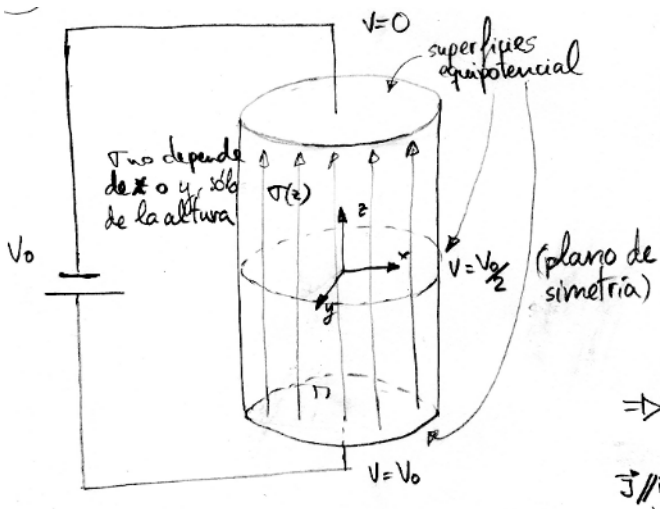
c) $$R_{eq} = \frac{0'1}{\pi\left[2\,(\Omega m)^{-1}\left(0'03^2 m^2 - 0'01^2 m^2\right) + 5\,(\Omega m)\left(0'05^2 m^2 - 0'03 m^2\right)\right]}$$

$R_{eq} = 3'32\,\Omega$

14)

	Corriente radial	Corriente axial
$\frac{dP_1}{dvol}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{20}{2\pi 0'1 r}\right)^2 = \frac{506'6}{r^2}$ $\left[\frac{W}{m^3}\right]$	$2\left(\frac{20\cdot 3'32}{0'1}\right)^2 = 0'882\cdot 10^6$ $\left[\frac{W}{m^3}\right]$
$\frac{dP_2}{dvol}$	$\frac{1}{5}\left(\frac{20}{2\pi 0'1 r}\right)^2 = \frac{202'64}{r^2}$ $\left[\frac{W}{m^3}\right]$	$5\left(\frac{20\cdot 3'32}{0'1}\right)^2 = 2'204\cdot 10^6$ $\left[\frac{W}{m^3}\right]$
P_T	$R_{eq}I^2 = 1'04\cdot 20^2 = 416\,W$	$R_{eq}I^2 = 3'32\cdot 20^2 = 1328\,W$

16.- Una varilla cilíndrica de radio R, longitud L, de material conductor lineal, no homogéneo e isótropo, con conductividad $v(z) = v_0 + 2\,\acute{o}v_1\acute{o}\frac{z^2}{L}$, donde z es la distancia a un punto de la varilla desde el centro de ella, es sometida a una diferencia de potencial V_0 entre sus extremos. Indicar razonadamente si se calentará más en la zona central o en sus extremos.



la dirección del campo eléctrico lo podemos deducir ya que éste es perpendicular a las superficies equipotenciales. (En un material óhmico, la corriente tiene la misma dirección que el campo eléctrico)

$\Rightarrow \vec{E} = E\cdot\vec{u_x}$ y $\vec{J} = J\cdot\vec{u_x} = \sigma E\vec{u_x}$

• En estas condiciones, $I = \int_{\substack{\text{sección}\\ \text{varilla}}} \vec{J}\vec{n}\,dS \overset{\vec{J}\parallel\vec{n}}{=} \int_{z=cte} J\cdot dS \overset{J \text{ se reparte uniformemente}}{=} J\cdot \text{Sección}$

$\Rightarrow J = \frac{I}{\text{sección}}$ (la densidad de corriente es cte dentro de la varilla)

$$\frac{dP}{dvol} = \vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\text{seccion}}\,\frac{1}{\sigma_0 + 2\sigma_1\frac{z^2}{L}} \begin{cases} \text{máximo en } z=0 \\ \text{mínimo en } z=\pm\frac{L}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Como $\frac{dP}{dvol}$ está relacionado con el calentamiento del cable, se tendera a calentar más en el centro que en los extremos.

17.- En una instalación industrial de baja tensión se utilizan como conductores pletinas de cobre rectas, de sección rectangular constante. Disponiendo de dos piezas curvas de cobre, de la misma sección que los conductores, pero de dimensiones distintas, se pueden unir dos de estas pletinas, que forman entre sí un ángulo recto, mediante dos configuraciones distintas. En ambos casos, las secciones de unión de las piezas curvas con las pletinas rectas se consideran superficies equipotenciales.

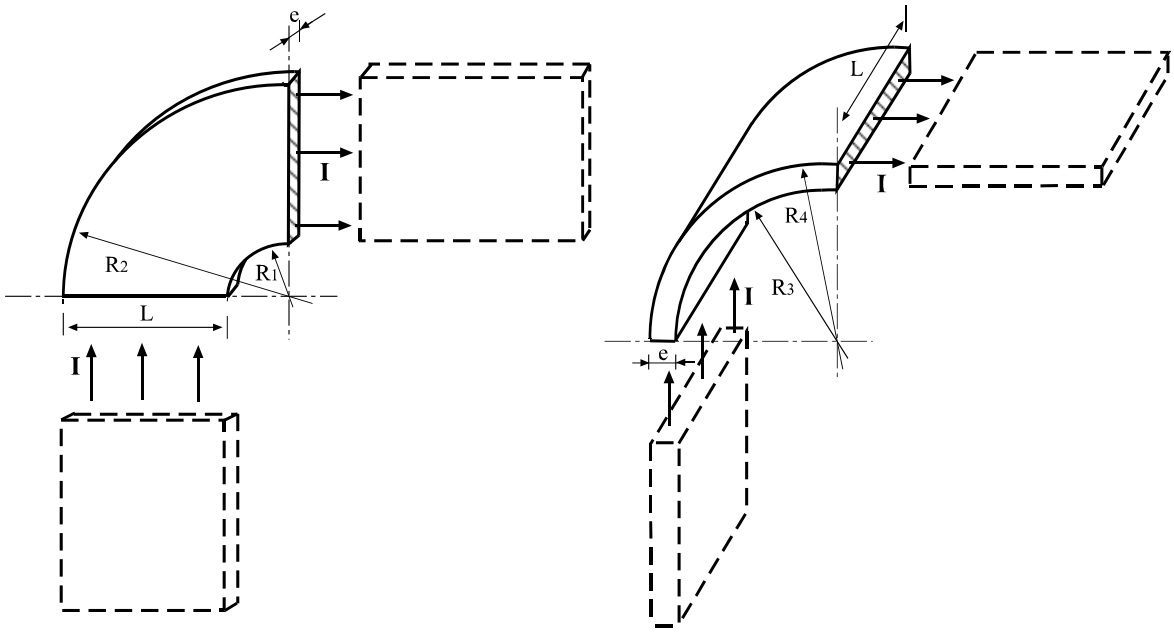
Si la intensidad de corriente eléctrica nominal de la instalación es I_n = 180 A, calcular:

a) el vector densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ en cualquier punto de las piezas curvas,

b) la densidad volumétrica (o volúmica) de potencia máxima en cada una de las piezas curvas,

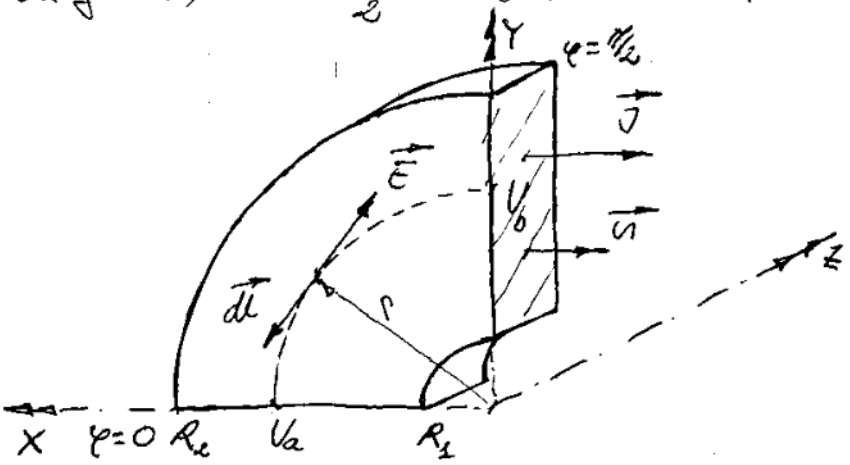
c) Partiendo de los resultados anteriores, y observando que las piezas curvas tienen el mismo volumen, indicar razonadamente cuál de las configuraciones es la más adecuada desde el punto de vista energético.

<u>Datos:</u> e = 4 mm, L = 16 mm, R_1 = 6 mm, R_2 = 22 mm, R_3 = 12 mm, R_4 = 16 mm, γ_{Cu} @ 60 ºC 10^6 (Ω·m)$^{-1}$



Pieza I Pieza II

Las dos piezas tienen la misma simetría cilíndrica, que coincide con la de la pieza conductora del problema 13. La única diferencia es que la longitud de la trayectoria entre las dos superficies equipotenciales, V_a y V_b, es $r \cdot \frac{\pi}{2}$ en vez de $r \cdot \pi$.



$$V_a - V_b = \frac{W_{b\to a}}{q} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=0} |\vec{E}|\cdot\underbrace{|d\vec{l}|\cdot\cos\pi}_{-r\cdot d\varphi} =$$

$\varphi_f < \varphi_i$

$$= -\int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=0} \frac{J_r(r=r)}{\sigma}\cdot(-r\cdot d\varphi)\cdot(-1) = -\frac{1}{\sigma}\int_{\pi/2}^{0} J_r(r=r)\cdot r\cdot d\varphi =$$

$$= -\frac{J_r(r=r)}{\sigma}\cdot r\cdot(-\pi/2) = \frac{J_r(r=r)\cdot r}{2\sigma}\cdot\pi$$

$$J_r(r=r) = \frac{2\sigma}{\pi}(V_a - V_b)\cdot\frac{1}{r}$$

$$I = \int_S \vec{J}\,\vec{n}\,da = \int_{R_1}^{R_2} |\vec{J}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos 0\cdot e\cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\sigma(V_a-V_b)}{\pi}\frac{1}{r}\,e\,dr =$$

$$= \frac{2\sigma(V_a-V_b)}{\pi}\cdot e\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,dr = \frac{2\sigma(V_a-V_b)}{\pi}\cdot e\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$(V_a - V_b) = \frac{\pi}{2\sigma} I \frac{1}{e \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$J_n(r=r) = \frac{2\sigma}{\pi} \frac{1}{r} \cdot \frac{\pi}{2\sigma} I \frac{1}{e \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{e \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} I \cdot \frac{1}{r}$$

a)

PIEZA I

$$\{\vec{J}_1\}_{r\varphi z} = \frac{1}{e \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot I \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{u}_\varphi = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{2.2}{6}} 180 \frac{1}{r} \vec{u}_\varphi =$$

$$= 34{,}63 \cdot 10^3 \frac{1}{r} \frac{A}{m^2}$$

PIEZA II

$$\{\vec{J}_2\}_{r\varphi z} = \frac{1}{L \cdot \ln \frac{R_4}{R_3}} I \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_\varphi = \frac{1}{16 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{16}{12}} 180 \frac{1}{r} \vec{u}_\varphi =$$

$$= 38{,}10 \cdot 10^3 \frac{1}{r} \frac{A}{m^2}$$

b)

PIEZA I

$$\frac{dP_1^*}{dv} = \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_1 = \frac{J_n^2}{\sigma} = [34{,}63 \cdot 10^3]^2 \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sigma} = 19{,}98 \frac{1}{r^2} \frac{W}{m^3}$$

El valor máximo de la densidad volumétrica de potencia en la pieza I aparece en el radio mínimo $r = R_1$

$$\left.\frac{dP_1^*}{dv}\right|_{r=R_1} = 19{,}98 \frac{1}{R_1^2} = 19{,}98 \frac{1}{(6 \cdot 10^{-3})^2} = 555{,}2 \frac{kW}{m^3}$$

PIEZA II

$$\frac{dP_2^*}{dv} = \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_2 = \frac{J_2^2}{\sigma} = [39{,}10 \cdot 10^3]^2 \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sigma} = 25{,}48 \frac{1}{r^2} \frac{W}{m^3}$$

$$\left.\frac{dP_2^*}{dv}\right|_{r=R_3} = 25{,}48 \frac{1}{(12 \cdot 10^{-3})^2} = 176{,}94 \frac{kW}{m^3}$$

c) Volumen Pieza I $= \frac{1}{4}\pi(R_2^2 - R_1^2) \cdot e = 1{,}407 \cdot 10^{-6}\, m^3$

Volumen Pieza II $= \frac{1}{4} \cdot \pi(R_4^2 - R_3^2) \cdot L = 1{,}407 \cdot 10^{-6}\, m^3$

$$P_1^* = \int_{vol} \vec{J}_1 \cdot \vec{E}_1 \cdot dv_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{J_1^2}{\sigma} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2} r \cdot e \cdot dr}_{dv_1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\cancel{e}}{\sigma} \frac{1}{e^{\cancel{2}}} \frac{1}{\ln^2 \frac{R_2}{R_1}} I^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\cancel{r}}{r^{\cancel{2}}} dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sigma \cdot e} I^2 \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 163{,}2 \text{ mW}$$

$$P_2^* = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sigma \cdot L} I^2 \frac{1}{\ln \frac{R_4}{R_3}} = 184{,}28 \text{ mW}$$

La pieza II disipa un 13% más de potencia que la pieza I y es, por lo tanto, menos eficiente. Pero en la pieza I aparecen puntos de mayor densidad volumétrica de potencia que en la pieza II, lo que significa que se calentarán más que cualquier otro de la pieza II.

Resolución Problemas 18 y 19. Tema 5.

Es un hecho frecuente considerar como seguro todo aquel elemento metálico que se encuentra puesto a tierra, al suponer que su potencial queda fijado por el de tierra, que permanece constante. Relacionado también con las puestas a tierra, no suele comprenderse correctamente el fenómeno de conducción en el terreno asociado a las altas corrientes eléctricas que circulan en caso de averías en sistemas eléctricos de potencia o descargas atmosféricas. Para ilustrar estos dos fenómenos, aplicando ecuaciones básicas de la teoría electromagnética y empleando expresiones matemáticas sencillas, se proponen dos ejercicios. El primer ejercicio propone el análisis de la puesta a tierra de un pararrayos con un electrodo semiesférico y el cálculo de una tensión de paso. Aunque no sea un electrodo usado en la práctica, es una buena aproximación al comportamiento real y permite un análisis mucho más sencillo que el de otro electrodo con geometría cilíndrica o plana[1]. El segundo ejercicio consiste en el cálculo de una tensión de contacto durante un proceso de conducción en un poste de madera usado en un pequeña línea eléctrica. Las dimensiones del electrodo y del poste, el valor de la resistividad del terreno y de la corteza del poste, la intensidad de corriente eléctrica asociada a un rayo y su duración, el modelo resistivo de una persona, la intensidad de corriente máxima admisible que puede circular por el cuerpo humano para una descarga con la duración del rayo, se han obtenido de la bibliografía que se detalla al final de este documento [1], [2], [3], [4].

Problema 19, parte 1ª.

La puesta a tierra[2] de un pararrayos puede modelizarse como una semiesfera metálica maciza (v#w#¤) de radio R_1, centrada en un vasija semiesférica conductora (v#w#¤) de radio R_2 #w#¤ y espesor despreciable. El conductor de radio R_1 se encuentra conectado al pararrayos a través de un cable metálico (v#w#¤). Cuando se produce la descarga de un rayo, el terreno que se encuentra alrededor de la semiesfera de radio R_1 se comporta como un conductor de resistividad u = 1/v constante y uniforme, mientras que el potencial del conductor de radio R_2 coincide con el de tierra, $V(r = R_2) = 0$ V. El flujo de cargas negativas que, procedentes de las nubes, descienden hacia el terreno da lugar, durante un intervalo de tiempo T, a una corriente eléctrica de intensidad I, que se considera constante. El proceso de conducción se considera estacionario (no hay que considerar fenómenos de acumulación de cargas).

a) Calcular el vector densidad de corriente eléctrica, $\breve{J}$, y el vector intensidad de campo eléctrico, $\breve{E}$, en cualquier punto del terreno,

b) Calcular el potencial puntual, respecto de $r = R_2$, de los puntos de la línea radial OO' contenida en la superficie del terreno.

c) Determinar la resistencia total de la puesta a tierra.

---

[1] "Les Bases Générales de la Technique des Mises à la Terre Dans les Installations Electriciens", de Pierre Laurent, publicado en julio de 1951 en "Le Bulletin de la Société Francaise des Electriciens". Este documento se incluye como Anexo I en la publicación de IEEE [4] Power Engineering Society "IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding". The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, 1986.

[2] La instrucción 039 del Reglamento de Baja Tensión da la siguiente definición de puesta a tierra:

*"La denominación **puesta a tierra** comprende toda aligación metálica directa, sin fusibles ni protección alguna, de sección suficiente, entre determinados elementos o partes de una instalación y un electrodo o grupos de electrodos enterrados en el suelo, con objeto de conseguir que en el conjunto de instalaciones, edificios y superficie próxima del terreno, no existan diferencias de potencial peligrosas y que, al mismo tiempo, permita el paso a tierra de las corrientes de falta o las descargas de origen atmosférico."*

Datos: I = 12 kA, u = 1/v = 500 Z m, T = 0,01 s, R_1 = 0,5 m.

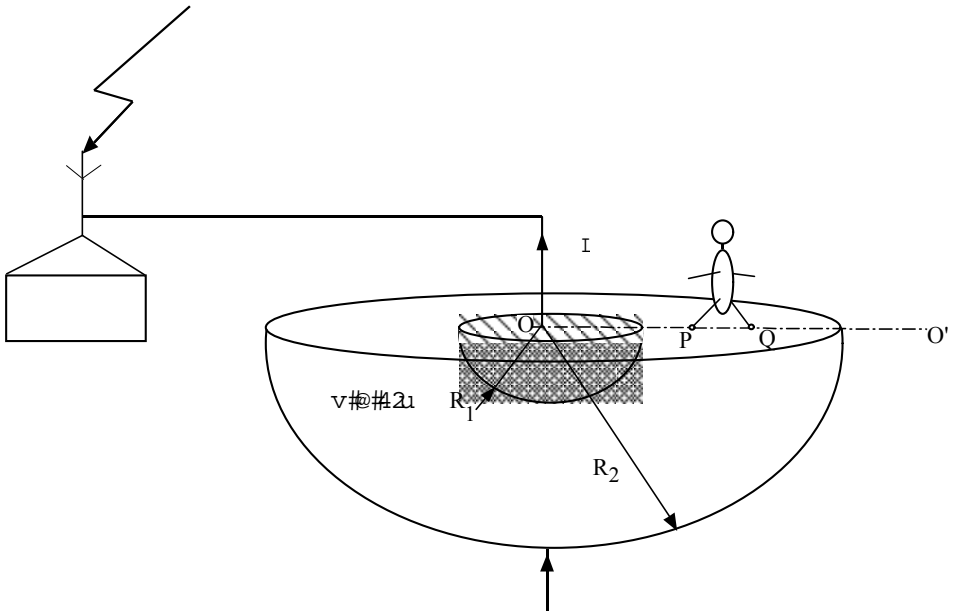


Fig 1. Esquema de la puesta a tierra del pararrayos

Problema 19, parte 2ª. Tensión de paso.

El modelo de una persona caminando sobre la superficie del terreno en dirección de la línea OO' y en las proximidades del electrodo de la puesta a tierra está formado por tres resistencias en serie. Para una descarga de esta duración, la corriente máxima que puede circular por el cuerpo humano sin resultar peligrosa es I_{max}. Calcular la distancia radial (posición del punto P) a partir de la cual podrá encontrarse una persona caminando para que la corriente eléctrica que circulase por su cuerpo no superase la intensidad I_{max}.

Datos: R_h = 1 kZ , R_s = 1,5 kZ , I_{max} = 500 mA, L = 1 m.

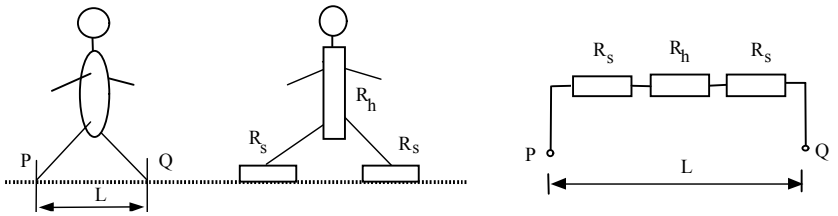


Fig 2. Modelo resistivo de una persona en el entorno de la puesta a tierra

Resolución de la 1ª parte

El cálculo de J se realiza mediante el planteamiento de la ecuación de continuidad en su forma integral

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} q_{\text{real encerrada en V}}$$

En un sistema de coordenadas esférico, (r, t, i,/la expresión más general del vector J será:

$$\vec{J}(r,t,i) = J_r(r,t,i)\,\vec{u}_r + J_t(r,t,i)\,\vec{u}_t + J_i(r,t,i)\,\vec{u}_i$$

La simetría esférica del modelo de la toma de tierra, junto con la homogeneidad del medio óhmico, permiten limitar la dirección del vector $\vec{J}$ a la dirección radial, y reducir a la coordenada radial sus dependencias espaciales; con estas simplificaciones, y observando el sentido de la corriente eléctrica, el vector densidad de corriente podrá escribirse como $\vec{J}(r,t) = |J_r(r,t)|\,\vec{u}_r$, coincidiendo su módulo con el valor absoluto de la componente radial.

La ecuación de continuidad la aplicaremos a un volumen limitado por la superficie cerrada compuesta por las superficies semiesféricas de radios R_1 y r, y la superficie circular de radio interior R_1 y radio exterior r, paralela al plano OXY (ver figura 3). Por tratarse de un proceso de conducción estacionario, la carga real encerrada en el volumen permanece constante, siendo nula su derivada temporal; la ecuación de continuidad queda entonces reducida a una integral de superficie cuyo valor es cero, siendo S la superficie cerrada que limita el volumen anteriormente definido.

La expresión que se obtiene para el vector densidad de corriente es

$$\boxed{\vec{J}(r,t) = \frac{I}{2\pi r^2}\,\vec{u}_r}$$

Aplicando la ley de Ohm, se obtiene la expresión del vector intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$,

$$\vec{J}(r,t) = \sigma\,\vec{E}(r,t) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r,t) = \frac{1}{\sigma}\,\vec{J}(r,t) = \frac{1}{\sigma}\,\frac{I}{2\pi r^2}\,\vec{u}_r}$$

Sustituyendo I, σ y π por sus valores numéricos, obtenemos las siguientes expresiones de $\vec{J}$ y $\vec{E}$

$$\vec{J}(r,t) = \frac{1{,}91\cdot 10^{3}}{r^2}\,\vec{u}_r\ \left[\frac{A}{m^2}\right] \Rightarrow \vec{E}(r,t) = \frac{954{,}9\cdot 10^{3}}{r^2}\,\vec{u}_r\ \left[\frac{V}{m}\right]$$

Para el cálculo de la diferencia de potencial o de un potencial puntual se propone emplear el método de la integral de línea. Calcular el potencial puntual equivale al cálculo de la diferencia de potencial entre el punto de coordenada radial r y la referencia, que en este caso se encuentra en el infinito; esa diferencia de potencial es el trabajo que un agente exterior al campo debe realizar para trasladar la unidad de carga positiva desde la referencia hasta el punto (trabajo realizado contra el campo).

$$V(r) - V(R_2 = \infty) = -\int_{C\ r=R_2}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r=R_2}^{r} \frac{1}{\sigma}\,\frac{I}{2\pi r^2}\,dr = \boxed{-\frac{I}{2\pi\sigma}\,\frac{1}{r} = V(r)}$$

Sustituyendo en la expresión anterior I, σ y π por sus valores numéricos, se obtiene

$V(r) = -\dfrac{954{,}9\cdot 10^{3}}{r}$ [V] expresión de la distribución de potencial a lo largo de la recta OO'.

El potencial varía desde un valor mínimo de -1,91 MV en el volumen del conductor equipotencial de radio 0,5 m, hasta el valor de 0 V cuando R_2 es lo suficientemente grande como para considerarlo infinito.

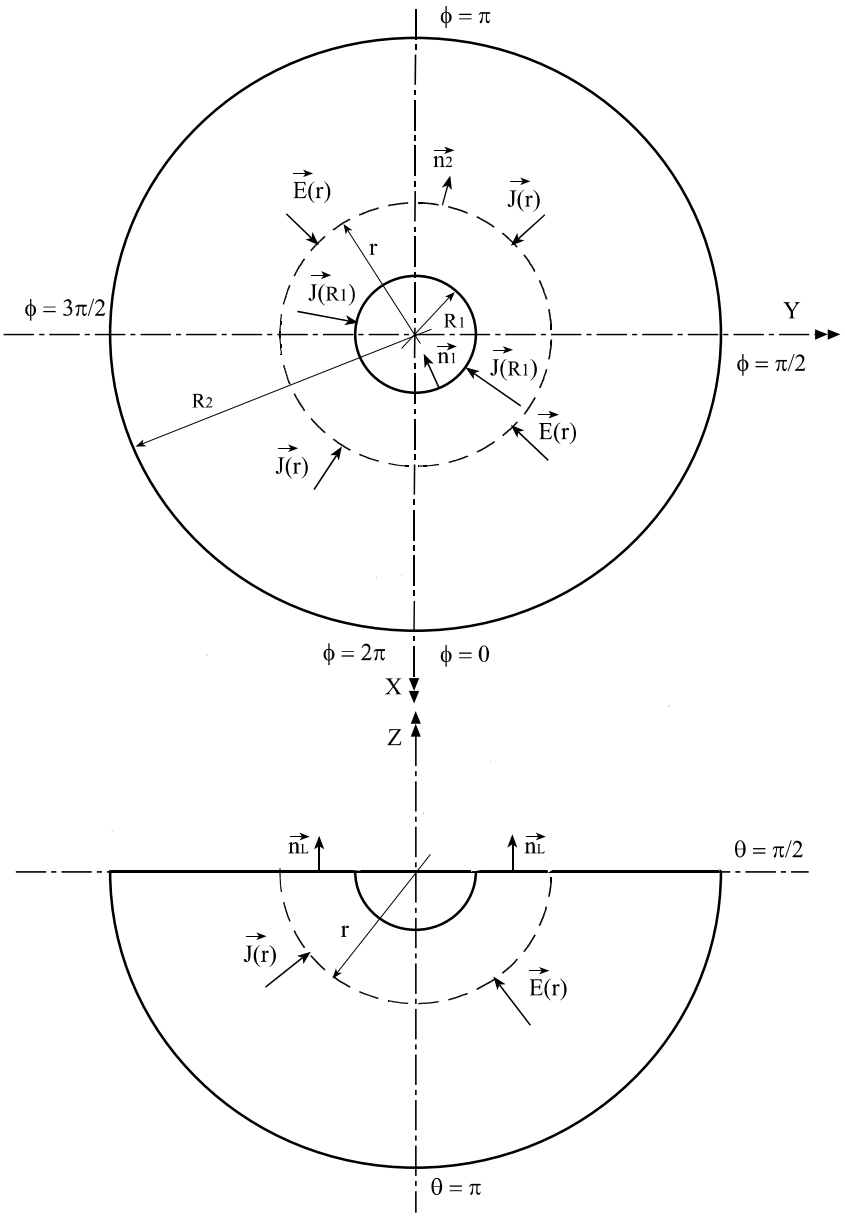


Fig 3. Distribución espacial de los vectores $\vec{J}$ y $\vec{E}$

El medio óhmico puede representarse como una resistencia de valor R_t , para la que se cumplirá la ley de Ohm

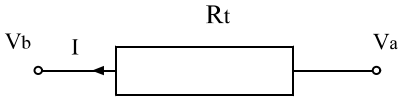


Fig.4

$$V_a - V_b = R_t \cdot I = V(R_2 + \infty) - V(r = R_1) = -V(r = R_1) = -\left(-\frac{I}{2\pi\sigma}\cdot\frac{1}{R_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma R_1}\right)\cdot I \quad \boxed{R_t = \frac{V_a - V_b}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma R_1} = 159{,}15\ \Omega}$$

Resolución de la 2ª parte

La distribución de potencial que aparece en cualquier radio del terreno que rodea al conductor, y por lo tanto en cualquier línea radial de la superficie, se calculó anteriormente. Se observa la fuerte pendiente de dicha función en puntos cercanos al conductor, pendiente que va debilitándose junto con el valor absoluto del potencial al alejarse del conductor. Si situamos los puntos P y Q, los pies de la persona, muy cerca de la toma de tierra, por ejemplo el punto P a un metro del centro del conductor, la diferencia de potencial entre los pies, puntos P y Q, será

$$V(Q)-V(P) = -\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R=1m}^{R=2m} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) = 477{,}45 \text{ kV}$$

Si situamos los puntos P y Q alejados de la toma de tierra, por ejemplo el punto P a treinta metros del centro del conductor, la diferencia de potencial entre P y Q será

$$V(Q)-V(P) = -\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R=30m}^{R=31m} = \frac{I}{2\pi\sigma}\cdot 1{,}075\cdot 10^{-03} = 1026{,}8 \text{ V}$$

El modelo resistivo de una persona para una descarga de 0,01 s, que se incluye en el enunciado, implica que la máxima diferencia de potencial que puede haber entre sus pies es:

$$|V_Q - V_P| = (R_s + R_h + R_s)\cdot I_{max} = 4\cdot 10^3\ \Omega\cdot 0{,}5 \text{ A} = 2000 \text{ V} = 2 \text{ kV}$$

A esta diferencia de potencial se le conoce como tensión de paso. Según este modelo, la situación a un metro de la toma de tierra implica el riesgo de electrocución, ya que la intensidad de corriente eléctrica que circularía a través del cuerpo sería de 119,36 A. La situación a treinta metros ya no es peligrosa; la intensidad de corriente eléctrica que circularía sería entonces de 0,257 A. La posición límite del punto P, que será el lugar más cercano al electrodo de la puesta de tierra a la que puede encontrarse una persona caminando, será aquella a partir de la cual $|V_Q - V_P| \geq 2000 \text{ V} = 2 \text{ kV}$

$$V(Q)-V(P) = -\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_P}^{R_Q} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(-\frac{1}{R_P}\right) + \frac{1}{R_Q}\left(\right) = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{R_Q - R_P}{R_P\cdot R_Q}\right) \geq 2\text{kV}$$

$$R_Q - R_P = 1 \text{ m} \Rightarrow \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{R_P\cdot(1 + R_P)}\right) \geq 2\text{kV} \Rightarrow \frac{I}{2\pi\sigma} \geq 2\cdot 10^3\cdot R_P\cdot(1 + R_P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 954{,}9\cdot 10^3 \geq 2\cdot 10^3\cdot R_P\cdot(1 + R_P) \Rightarrow 477{,}45 \geq R_P\cdot(1 + R_P) \Rightarrow 477{,}45 \geq R_P + R_P^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_P^2 + R_P - 477{,}45 \leq 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R_P = 21{,}35 \text{ m};\ V(P) = -44{,}73 \text{ kV} \\ R_Q = 22{,}35 \text{ m};\ V(Q) = -42{,}73 \text{ kV} \end{array}}$$

Se obtiene que la distancia mínima a la que una persona puede encontrarse sería de 21,35 m desde el centro del electrodo de la puesta a tierra. En la figura 5 se observa la distribución de potencial (pozo de potencial) que una persona cercana a la toma de tierra observaría bajo sus pies; en dicha figura se ha situado a la persona a la distancia límite obtenida.

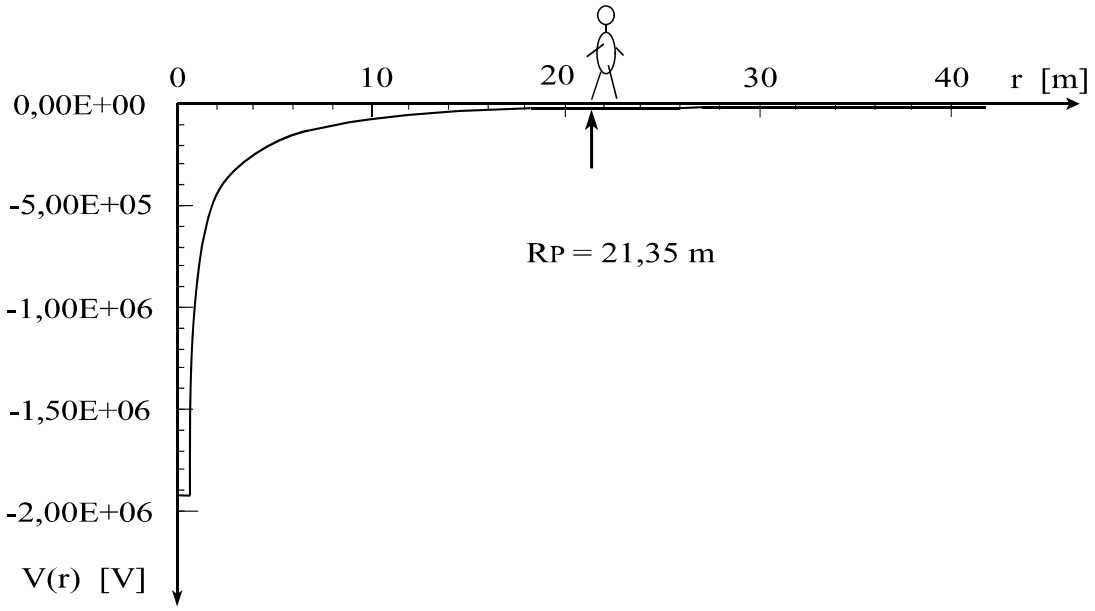


Fig 5. Distribución de potencial en el terreno y posición límite de seguridad.

Problema 18, parte 1ª.

Un poste de madera con creosota, cilíndrico, de diámetro D y altura L, se utiliza como soporte de una línea aérea de baja tensión. Cuando cae un rayo sobre él, puede considerarse que toda la corriente eléctrica circula axialmente por su corteza, distribuyéndose uniformemente en un espesor e. La conductividad v#de la corteza del poste puede considerarse constante, y el terreno un conductor ideal (v# #¤). El rayo puede modelizarse como un flujo de cargas negativas, constante durante un intervalo de tiempo T, procedentes de las nubes, que dan lugar a una corriente eléctrica de intensidad I. Calcular:

a) el vector densidad de corriente eléctrica, $\breve{J}$, y el vector intensidad de campo eléctrico, $\breve{E}$, en cualquier punto de la corteza del punto,

b) el potencial puntual, respecto de la base del poste, de los puntos de la corteza del poste, y

c) la resistencia total de la puesta a tierra.

Datos: I = 10 kA, v = $5\cdot10^3$ (Z ·m)$^{-1}$, T = 0,01 s, L = 10 m, D = 0,2 m, e = 2 mm.

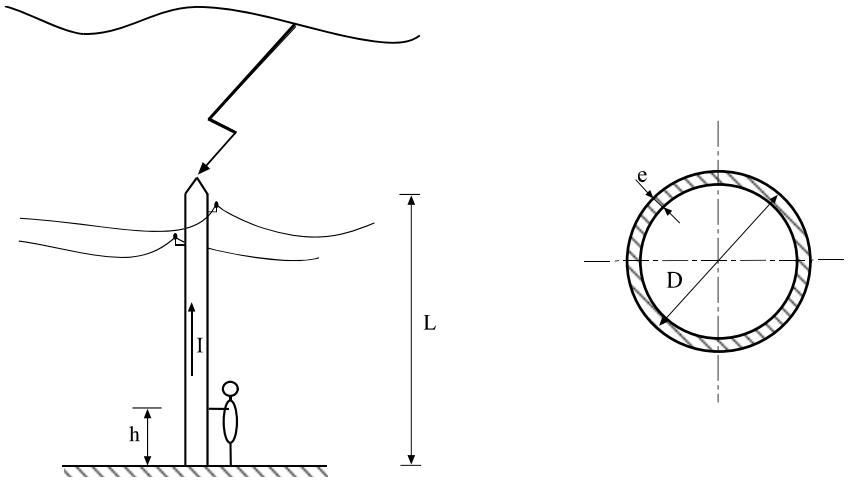


Fig 6. Descarga de un rayo sobre un poste de una línea eléctrica

Problema 18, parte 2ª. Tensión de contacto.

Utilizando el modelo resistivo para el cuerpo humano representado en la figura, una persona de pie, con los pies juntos, y tocando con un brazo el poste, puede modelizarse como el conjunto de resistencias de la figura 7. Si la corriente eléctrica máxima que puede circular por el cuerpo humano sin resultar peligrosa es I_{max}, para una descarga de duración T, calcular la altura máxima h a la que puede tocar el poste una persona sin resultar herida, suponiendo que la zona de tierra donde apoyan sus pies es equipotencial con la base del poste.
Datos: R_h = 1 kZ , R_s = 1,5 kZ , I_{max} = 500 mA.

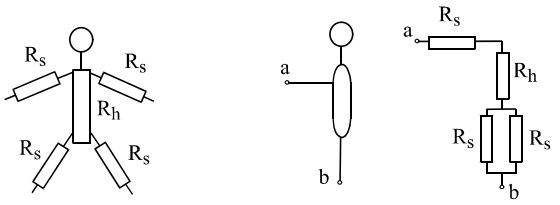


Fig 7. Modelo resistivo de una persona en contacto con el poste

Resolución de la 1ª parte.

Para resolver los apartados correspondientes a esta parte, seguiremos el mismo método que el utilizado en el ejercicio anterior. En un sistema de coordenadas cilíndrico, (r, i, z), la expresión más general del vector $\vec{J}$ será:

$$\vec{J}(r,i,z) = J_r(r,i,z)\,\vec{u}_r + J_m(r,i,z)\,\vec{u}_i + J_z(r,i,z)\,\vec{u}_z$$

La simetría cilíndrica del poste, junto con la homogeneidad del medio óhmico y la uniformidad en la distribución de la corriente eléctrica, permiten limitar la dirección del vector $\vec{J}$ a la dirección axial, y reducir a la coordenada axial sus dependencias espaciales; el vector densidad de corriente podrá escribirse, en este caso, como $\vec{J}(z) = |J_z(z)|\,\vec{u}_z$, coincidiendo su módulo con el valor absoluto de la componente axial.
La ecuación de continuidad la aplicaremos a un volumen limitado por la superficie cerrada compuesta por las superficies cilíndricas de altura L y radios D/2 y (D/2 – e), y las superficies circulares de radio interior (D/2 – e) y radio exterior D/2 (ver figura 8). Como en el ejercicio anterior, por tratarse de un proceso de conducción estacionario la ecuación de continuidad queda reducida a una integral de superficie cuyo valor es cero, siendo S la superficie cerrada que limita el volumen anteriormente definido.
La expresión que se obtiene para el vector densidad de corriente es

$$\boxed{\vec{J}(z) = \frac{I}{\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - e\right)^2\right]}\,\vec{u}_z}$$

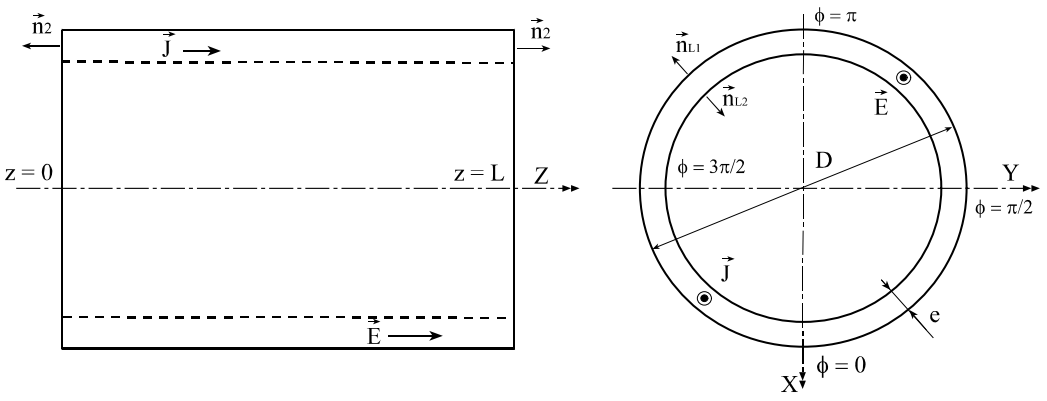


Fig 8. Distribución espacial de los vectores $\vec{J}$ y $\vec{E}$

Aplicando la ley de Ohm, se obtiene la expresión del vector intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$,

$$\vec{J}_{rz} = \sigma \vec{E}_{rz} \quad \boxed{\vec{E}_{rz} = \frac{1}{\sigma}\vec{J}_{rz} = \frac{1}{\sigma}\frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}+e\right)^2}\vec{u}_z}$$

Para calcular el potencial puntual de cualquier punto de la corteza del poste, operamos como en el ejercicio anterior

$$V(z) - V(z=0) = -\int_{z=0}^{z} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{z=0}^{z} \frac{1}{\sigma}\frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}+e\right)^2}\,dz =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{\sigma}\frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}+e\right)^2}\,z = V(z)}$$

Sustituyendo I, σ, D, e y π por sus valores numéricos,se obtiene $V(z) = -1607{,}6\,z$ (V) expresión de la distribución de potencial a lo largo del poste. El potencial es negativo y directamente proporcional a la altura de los puntos de la corteza; el extremo superior se encuentra a -16,08 kV.

El poste podrá representarse como una resistencia de valor R_t , para la que se cumplirá la ley de Ohm

$$V_a - V_b = R_t\, I = V(z=0) - V(z=L) = -V(z=L) = -\int_{\vec{n}}^{\vec{a}} \frac{1}{\sigma}\frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}+e\right)^2}\,dL \times \vec{E}$$

$$\boxed{R_t = \frac{V_a - V_b}{I} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{\pi\left(\frac{D}{2}+e\right)^2} = 1{,}608\ \Omega}$$

Resolución de la 2ª parte.

La resistencia total que presenta el cuerpo humano en la situación representada en la figura 7 es de 3,25 kΩ. En este caso, la máxima diferencia de potencial entre la mano y el pie de una persona será de $V_A - V_B = \left(R_s + R_h + \frac{R_s}{2}\right) \cdot I_{max} = 3250\ \Omega \cdot 0{,}5\ A = 1625\ V$

A esta tensión se le conoce como tensión de contacto. Debido al incremento de la tensión de los puntos de la corteza del poste respecto del suelo, cuanto mayor sea la altura a la que se toque el poste con la mano, estando los pies en contacto con el terreno, mayor es el peligro de electrocución; el valor límite vendrá dado por la altura h. Si el contacto se produce en algún punto de altura inferior a h, no habrá peligro, pero si el punto está a altura superior, entonces la corriente eléctrica que circulará a través del cuerpo humano podrá ser peligrosa, e incluso mortal.

El circuito resistivo formado por la corteza del poste y el cuerpo humano es el mostrado en la figura 9. De este circuito se obtiene el valor de R(z = h), resistencia que a su vez depende de z

$$R(z = h) = (I - I_{MAX}) = V(z = h) = 1625\ V \Rightarrow R(z = h) = \frac{V(z = h)}{I - I_{MAX}} = 162{,}5 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

$$R(z = h) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{h}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - e\right)^2} = 162{,}5 \cdot 10^{-3}\ \Omega \Rightarrow \boxed{h = 1{,}01\ m}$$

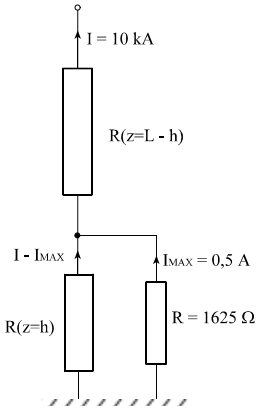


Fig 9. Circuito equivalente para aplicar la tensión de contacto

Referencias bibliográficas

[1] Ramírez, J. "Talleres Electro-Mecánicos; Bobinados." Barcelona (España). CEAC, 1986. 5ª Ed

[2] Moreno J. "Cálculo de puesta a tierra." Málaga (España) Compañía Sevillana de Electricidad, 1991

[3] UNESA; Comisión de Reglamentos "Método de cálculo y proyecto de instalaciones de puesta a tierra para centros de transformación conectados a redes de tercera categoría." UNESA – Asociación Electrotécnica y Electrónica Española.

[4] IEEE Power Engineering Society. "IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding" The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, 1986. I.S.B.N. 471-85393-3

[5] López V. "Problemas resueltos de electromagnetismo." Madrid (España). Editorial centro de estudios Ramón Areces S.A., 1990. I.S.B.N. 84-87191-62-2

[6] López, E., Nuñez, F. "100 problemas de electromagnetismo." Madrid (España). Alianza Editorial, 1997. I.S.B.N. 84-206-8635-2.

20.- El tramo de un ferrocarril eléctrico está formado por una central generadora o subestación, un sistema de cables y raíles que sirven para conducir la corriente eléctrica y un motor eléctrico en la locomotora. La corriente eléctrica circula por el conductor aéreo y por los dos raíles que forman la vía. El pantógrafo es el elemento de la locomotora que, estando en contacto permanente con el conductor aéreo, permite el movimiento relativo entre ambos. Uno de los terminales del motor eléctrico está conectado al punto "b" del pantógrafo. El otro terminal del motor está en contacto con las dos ruedas del segundo eje, punto "c", que a su vez están en contacto con los raíles.

En el tramo representado en la figura, el conductor aéreo está constituido por un cable de cobre recto, paralelo al terreno, de sección circular de diámetro D = 14 mm. Los dos raíles de la vía, también rectos y paralelos entre ellos y al cable, son de acero; su sección eléctrica equivalente es la de un rectángulo de altura h = 20 cm y anchura e = 8 cm. La diferencia de tensión en los extremos de la central se supone constante de valor $V_a - V_d = 3000$ V. La potencia absorbida por el motor de la locomotora se mantiene constante e igual a su potencia nominal $P_{nom} = 2500$ kW. Cuando circula por el motor de la locomotora una corriente eléctrica de intensidad I = 850 A, que se distribuye uniformemente en las secciones de los conductores, calcular:

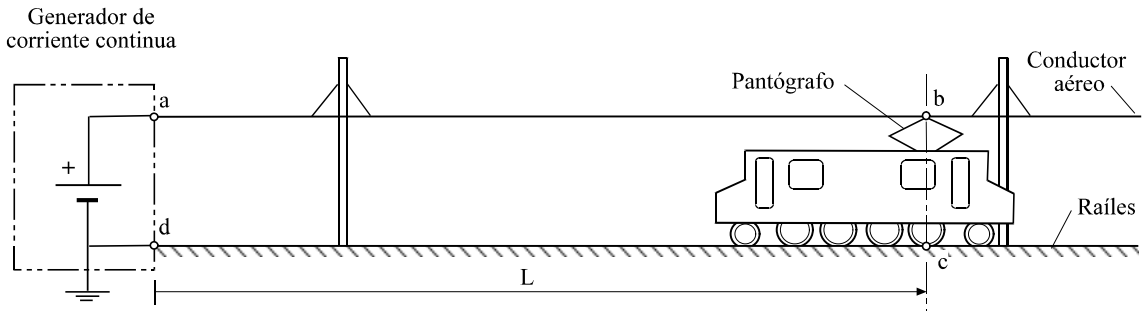
a) los vectores $\vec{J}$ y $\vec{E}$ en puntos del cable de cobre y de los raíles, y la potencia disipada por efecto Joule en el conductor aéreo y en los raíles,

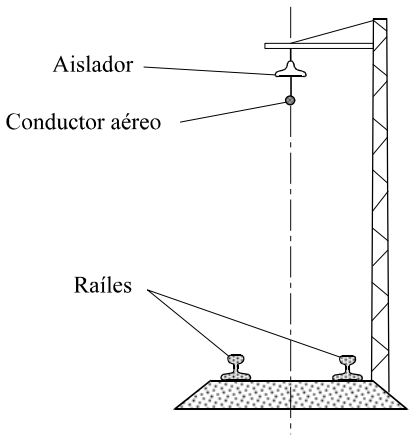
b) la distancia L a la que se encuentra la locomotora.

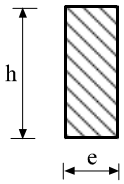
El límite de funcionamiento del motor de la locomotora a potencia nominal se debe al calentamiento de sus conductores al absorber una corriente eléctrica demasiado alta, fenómeno que ocurre cuando la diferencia de potencial entre los terminales del motor desciende demasiado. Si la corriente máxima que puede absorber el motor de la locomotora es, en este caso, de 930 A, se pide calcular:

c) la máxima distancia, L_{MAX}, que podrá recorrer la locomotora sin superar esa corriente eléctrica, y la diferencia de potencial entre los terminales del motor para esa distancia.

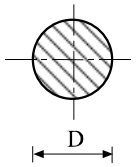
Datos: Conductividad del cobre, $\sigma_{Cu} = 5{,}8 \cdot 10^7 \frac{A}{V \cdot m}$; Conductividad del acero, $\sigma_{Fe} = 4{,}7 \cdot 10^6 \frac{A}{V \cdot m}$





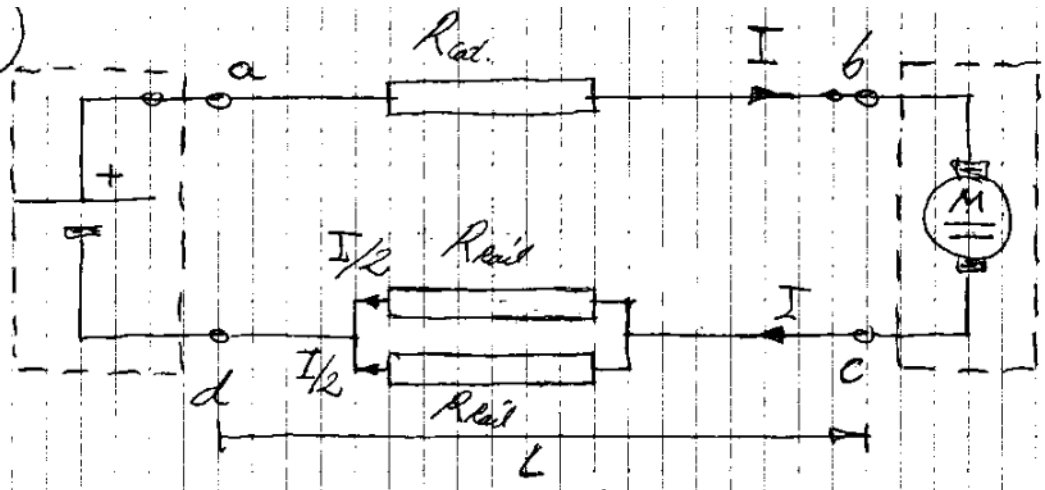


Sección equivalente del raíl

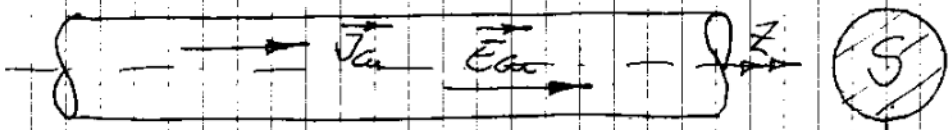


Sección del conductor aéreo

(5)



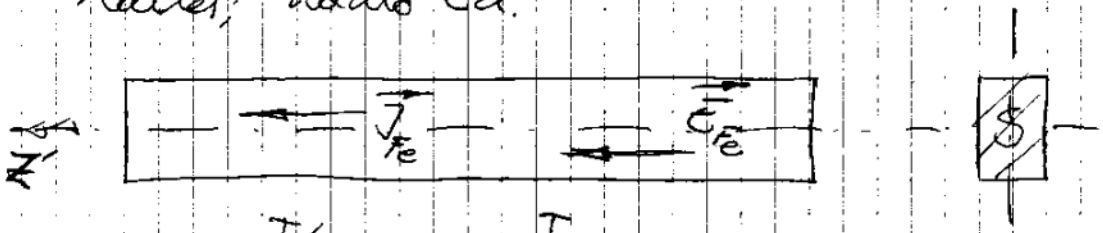
a) Cable aéreo, tramo ab



$$\{\vec{J}_{Cu}\}_{\text{nyz}} = \frac{I}{S_{Cu}} \cdot \vec{u}_z = \frac{I}{\pi \frac{d^2}{4}} \vec{u}_z = \frac{4}{\pi d^2} \cdot I \cdot \vec{u}_z$$

$$\{\vec{E}_{Cu}\}_{\text{nyz}} = \frac{1}{\sigma_{Cu}} \cdot \{\vec{J}_{Cu}\}_{\text{nyz}} = \frac{4}{\sigma_{Cu} \cdot \pi d^2} I \cdot \vec{u}_z$$

Railes, tramo cd.



$$\{\vec{J}_{Fe}\}_{\text{nyz}} = \frac{I/2}{S_{Fe}} \cdot \vec{u}_z = \frac{I}{2 \cdot e \cdot h} \cdot \vec{u}_{z'}$$

$$\{\vec{E}_{Fe}\}_{\text{nyz}} = \frac{1}{\sigma_{Fe}} \cdot \{\vec{J}_{Fe}\}_{\text{nyz}} = \frac{I}{2 \sigma_{Fe} \cdot e \cdot h} \vec{u}_{z'}$$

$$(V_a - V_d) = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d)$$

Multiplicando por I los dos miembros

$$\underbrace{(V_a - V_d)\cdot I}_{P^*_{ced/generador}} = \underbrace{(V_a - V_b)\cdot I}_{P^*_{abs/cu}} + \underbrace{(V_b - V_c)\cdot I}_{P^*_{abs/locomotora}} + \underbrace{(V_c - V_d)\cdot I}_{\overset{\shortparallel}{2\left[(V_c - V_d)\cdot \frac{I}{2}\right]}\ P^*_{abs/Fe}}$$

$$(V_a - V_d)\cdot I - P^*_{abs/locomotora} = P^*_{abs/Joule}$$

Resultados numéricos:

$$\{\vec{J}_{cu}\}_{mpz} = 5{,}52\cdot 10^6\cdot \vec{u}_z\ \frac{A}{m^2}\ ;\ \{\vec{J}_{Fe}\}_{mpz} = 26{,}56\cdot 10^3\,\vec{u}_z\ \frac{A}{m^2}$$

$$\{\vec{E}_{cu}\}_{mpz} = 95{,}2\cdot 10^{-3}\cdot \vec{u}_z\ \frac{V}{m}\ ;\ \{\vec{E}_{Fe}\}_{mpz} = 5{,}65\cdot 10^{-3}\,\vec{u}_z\ \frac{V}{m}$$

$$P^*_{abs/Joule} = 3\cdot 10^3\cdot 850 - 2{,}5\cdot 10^6 = 50\cdot 10^3\,W = 50\,kW$$

b) $(V_a - V_d) = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d)$

$(V_a - V_d)$ es dato

$$(V_b - V_c) = \frac{P^*_{abs/locom.}}{I}$$

$$(V_a - V_d) - (V_b - V_c) = (V_a - V_b) + (V_c - V_d)$$

$$(V_a - V_b) = \frac{W_{b\to a}}{q} = -\int_{c\to b}^{a} \vec{E}_{cu}\cdot d\vec{l} = E_{zcu}\cdot L$$

$$(V_c - V_d) = \frac{W_{d\to c}}{q} = -\int_{c\to d}^{c} \vec{E}_{Fe}\cdot d\vec{l} = E_{zFe}\cdot L$$

$$(V_a - V_d) - \frac{P^*_{abs/loc.}}{I} = \{E_{zcu} + E_{zFe}\}\cdot L$$

$$L = \frac{(V_a - V_d) - P^*_{abs}/I}{\{E_{z_{Cu}} + E_{z_{Fe}}\}} = \frac{3\cdot 10^3 - \frac{2{,}5\cdot 10^6}{850}}{\{95{,}2 + 5{,}65\}\cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{58{,}82}{100{,}85}\cdot 10^3 = 583{,}28 \text{ m}$$

c)

$$L_{MAX} = \frac{(V_a - V_d) - P^*_{abs}/I_{MAX}}{\{E_{z_{Cu}MAX} + E_{z_{Fe}MAX}\}}$$

$$E_{z_{Cu}MAX} = \frac{1}{\sigma_{Cu}}\cdot J_{z_{Cu}MAX} = \frac{1}{\sigma_{Cu}}\cdot\frac{I_{MAX}}{\pi\delta^2/4} =$$

$$= 112\cdot 10^{-6}\cdot I_{MAX} = 104{,}16\cdot 10^{-3}\ \frac{V}{m}$$

$$E_{z_{Fe}MAX} = \frac{1}{\sigma_{Fe}}\cdot J_{z_{Fe}MAX} = \frac{1}{\sigma_{Fe}}\cdot\frac{I_{MAX}}{2eh} = 6{,}65\cdot 10^{-6}\, I_{MAX} =$$

$$= 6{,}18\cdot 10^{-3}\ \frac{V}{m}$$

$$L_{MAX} = \frac{3\cdot 10^3 - \frac{2{,}5\cdot 10^6}{930}}{\{104{,}16 + 6{,}18\}\cdot 10^{-3}} = \frac{311{,}83}{110{,}34}\cdot 10^3 =$$

$$= 2826 \text{ m}$$

$$(V_b - V_c)_{mín} = \frac{P^*_{abs}/I_{MAX}}{I_{MAX}} = 2688{,}2 \text{ V}$$

24.- Una batería de arranque de Pb-ácido usada en automoción está constituida por seis acumuladores conectados en serie. Cada uno de estos acumuladores se encuentra a su vez constituido por seis pilas elementales conectadas en paralelo (ver figura A). El electrodo positivo de cada una de las pilas elementales está formado por una placa rectangular de óxido de plomo, PbO_2 (v † ¤), de altura h, anchura a, y espesor g despreciable (ver figura B). El electrodo negativo, de plomo puro, Pb (v † ¤), tiene las mismas dimensiones que el positivo. Los electrodos son paralelos y están separados una distancia d. El espacio entre los electrodos se llena de una disolución de ácido sulfúrico H_2SO_4 (25% de ácido y 75% de agua destilada) que constituye el electrolito, de conductividad v_1 (ver figura en la página siguiente).

Cuando se conecta una de estas baterías al motor de arranque de un coche, circula a través del motor una corriente eléctrica de intensidad I. El conjunto de la batería y del motor de arranque pueden modelizarse como el circuito eléctrico indicado en la figura C.
En estas condiciones, calcular:

a) el vector densidad de corriente, $\vec{J}$, y el vector intensidad de campo eléctrico total, $\vec{E}$, en cualquier punto del interior de la pila elemental.

b) la resistencia interna de cada pila, r_p, la resistencia interna de cada acumulador, r_a, y la resistencia interna total de la batería, r_b, en función de las dimensiones de los electrodos, su separación y la conductividad del electrolito. (Para resolver este apartado, se supondrá la batería como una región pasiva, donde no existe fuerza electromotriz, y por donde circula la corriente I).

Si el motor eléctrico de arranque absorbe una potencia de 1 kW, cuando circula la corriente I,

c) calcular la potencia disipada por efecto Joule en el interior de la batería, y el rendimiento de la batería (cociente entre la potencia absorbida por el motor y la potencia total cedida por la batería).

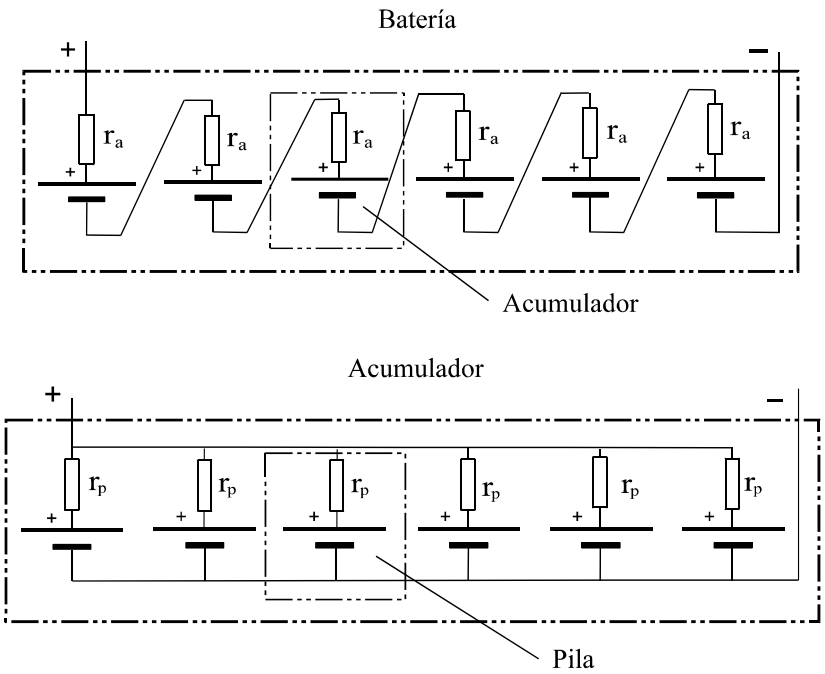


Figura A

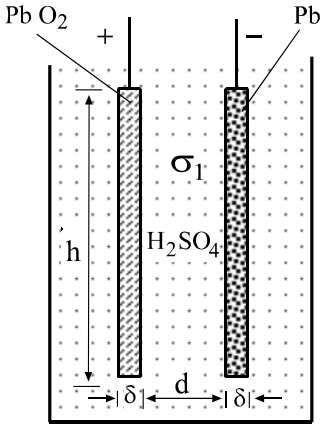


Figura B

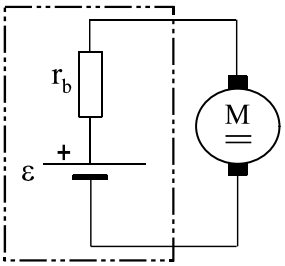
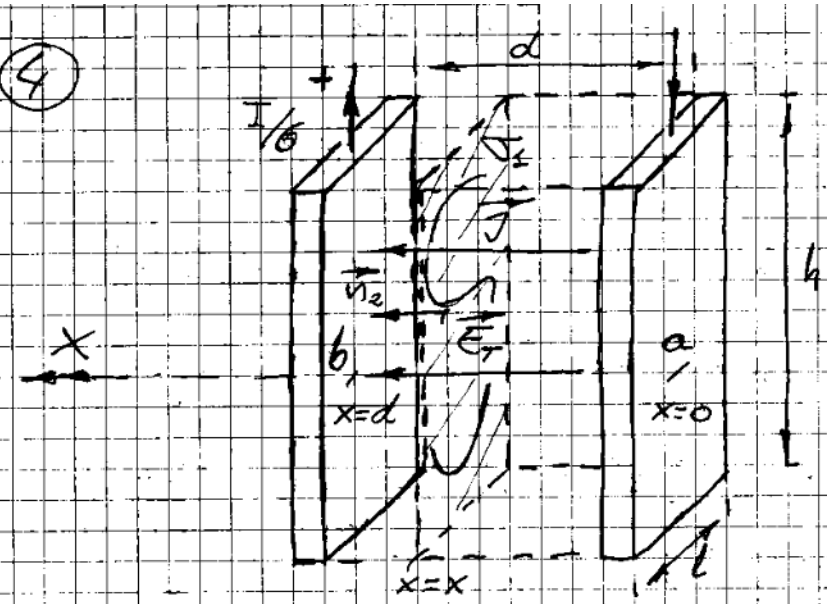


Figura C

Datos: I = 110 A , d = 2 mm, a = 10 cm, h = 15 cm, v_1 @ 3,7 $\frac{A}{V \cdot m}$

4



a) La corriente eléctrica que circula por el motor de arranque lo hace por cada uno de los acumuladores, que están conectados en serie. Cada acumulador está constituido por 6 pilas en paralelo; por lo tanto por cada pila circulará 1/6 de la corriente total.

Al tratarse de una región generadora, la corriente eléctrica sale por el terminal positivo. $\vec{J}$ tiene el sentido indicado en el dibujo, apuntando hacia el terminal positivo.

$$\{\vec{J}\}_{xyz} = J_x(x)\cdot\vec{a}_x \quad ; \quad \{\vec{E}_T\}_{xyz} = \frac{1}{\sigma_L}\{\vec{J}\}_{xyz}$$

Aplicando la ecuación de continuidad

$$\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\cdot da = -\frac{d}{dt}\,q_{\text{real encerrada}} = 0 \quad (\text{[} \text{ término de acumulación]})$$

Tomando la superficie cerrada que define el volumen $S \cdot x$, obtenemos

$$\oint_S \vec{J}\,\vec{n}\,da = \int_{S_1} J_x(x=0)\,|\vec{n}_1|\cos\pi\,da + \int_{S_2} J_x(x=x)\,|\vec{n}_2|\cos 0\,da$$

$$= \{J_x(x=0)\cdot(-1) + J_x(x=x)\cdot(1)\}\int_S da = 0$$

$$J_x(x=0) = J_x(x=x) \Rightarrow J_x \neq J_x(x)$$

$$\frac{I}{\sigma} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,da = \int_S J_x\,|\vec{n}|\cos 0\cdot da = J_x\int_S da =$$

$$= J_x\cdot S = J_x\cdot h\cdot l \Rightarrow J_x = \frac{I}{\sigma}\,\frac{1}{h\cdot l}\quad\left[\frac{A}{m^2}\right]$$

$$\{\vec{J}\}_{xyz} = \frac{I}{\sigma\cdot h\cdot l}\,\vec{u}_x = \frac{110}{6\cdot 10\cdot 10^{-2}\cdot 15\cdot 10^{-2}}\,\vec{u}_x =$$

$$= 1222{,}22\ \vec{u}_x\ \frac{A}{m^2}$$

El campo eléctrico total será la suma vectorial del campo eléctrico no conservativo más el campo eléctrico conservativo. El sentido del campo no conservativo coincide con $\vec{J}$, mientras que el sentido del campo conservativo es contrario a $\vec{J}$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_c + \vec{E}_{nc} \Rightarrow |\vec{E}_T| = \frac{|\vec{J}|}{\sigma_1} = |\vec{E}_{nc}| + |\vec{E}_c|$$

$$\{\vec{E}_T\}_{xyz} = \frac{J_x}{\sigma_1}\,\vec{u}_x\left[\frac{V}{m}\right] = \frac{1222{,}22}{3{,}7}\ \frac{V\cdot m}{A}\cdot\frac{A}{m^2} =$$

$$= 330{,}33\ \vec{u}_x\ \frac{V}{m}$$

b) $(V_a - V_b) = \dfrac{W_{b\to a}}{q} = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} =$

$$= -\int_{x=d}^{x=0} |\vec{E}|\cdot\underbrace{|d\vec{l}|}_{-dx}\cos\pi = -\int_{x=d}^{x=0} E_x\cdot dx =$$

$$= E_x\cdot d = \frac{J_x}{\sigma_1}\cdot d = \frac{I}{S}\,\frac{1}{\sigma_1}\,d$$

$$r_p = \frac{(V_a - V_b)}{I} = \frac{1}{\sigma_1}\,\frac{d}{S} = \frac{1}{\sigma_1}\cdot\frac{d}{h\cdot l}\quad[\Omega]$$

Por tratarse ahora de regiones paralelas, cada acumulador está formado por seis pilas en paralelo, siendo la resistencia total del acumulador

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_p} = \frac{6}{r_p} \Rightarrow$$

$$r_a = \frac{1}{6}\cdot r_p$$

La batería estará ahora constituida por 6 resistencias en serie;

$$r_b = r_a + r_a + r_a + r_a + r_a + r_a = 6\,r_a = \frac{1}{6}\,6\,r_p$$

$$r_b = r_p = \frac{1}{\sigma_1}\,\frac{d}{h\cdot l} = \frac{1}{3{,}2}\,\frac{2\cdot 10^{-3}}{10\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-2}} =$$

$$= 0{,}036\ \Omega$$

c) $P^*_{a\to b} = (V_a - V_b)\cdot I = r_b \cdot I^2 = \left\{ \int_{Vol} \vec{E}\cdot\vec{J}\cdot dv \right\} \cdot 36 =$

$= 0{,}036 \cdot (110)^2 = \left\{ E_x \cdot J_x \cdot \underbrace{S\cdot d}_{Vol} \right\} \cdot 36 =$

$= 435{,}6 \ W =$

$= 330{,}33 \cdot 1222{,}22 \cdot 2\cdot 10^{-3} \cdot 10\cdot 10^{-2} \cdot 15\cdot 10^{-2} \cdot 36 =$

$= 436{,}03 \ W$

$\int_{Vol} \vec{E}\cdot\vec{J}\, dv$ = potencia disipada por efecto Joule en cada pila elemental. La batería está constituida por $6\cdot 6 = 36$ pilas elementales.

$$\eta = \frac{\text{Potencia absorbida por el motor}}{\text{Potencia cedida por la batería}} =$$

$$= \frac{1000 \ W}{1000 + P^*_{a\to b}} = \frac{1000}{1436{,}03} = 0{,}6964$$

$\eta(\%) = 69{,}64\ \%$

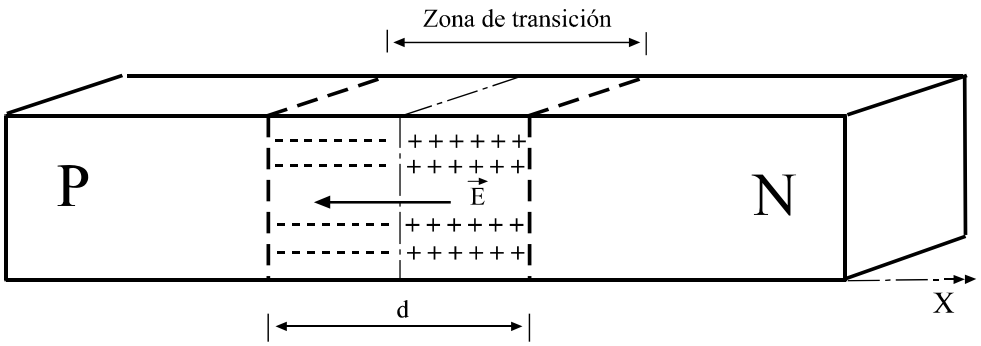
26.- Una pletina de sección rectangular S = 12,5 mm^2 y longitud L = 5 mm de un semiconductor de tipo N se une a otra pletina de las mismas dimensiones pero de semiconductor de tipo P. El volumen que rodea la superficie de unión (zona de vaciamiento o transición) queda cargado con carga real. Esta carga real crea un campo eléctrico $\vec{E}$, cuyo módulo varía con la coordenada x, y cuyo sentido es de la zona N hacia la P. El valor máximo del módulo del vector intensidad de campo eléctrico en la zona de transición es de 5,2 MV/m. La anchura de la zona de vaciamiento es d = 230 nm.

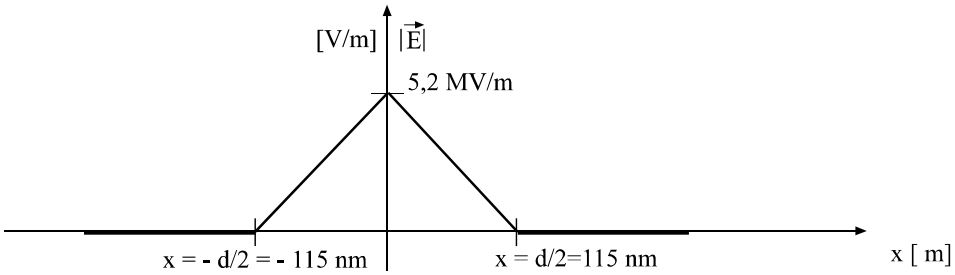
En estas condiciones, calcular:

a) la diferencia de potencial que aparece entre los extremos de la zona de transición.

Si el semiconductor tipo P se conecta ahora al terminal positivo de una batería de 12 V, y el terminal negativo al semiconductor tipo N a través de una resistencia de 1 kΩ, la conducción en la unión PN se debe a los portadores mayoritarios, siendo la conductividad del semiconductor de tipo P y la del tipo N iguales y de valor $\sigma_P = \sigma_N = 1{,}1 \cdot 10^3 \dfrac{A}{V \cdot m}$

b) Calcular la diferencia de potencial entre los terminales de los semiconductores P y N





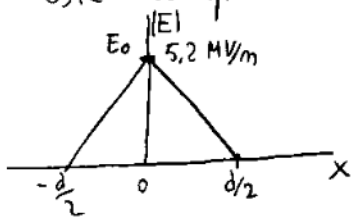
Si ahora se invierte la polaridad de la batería, la conducción en la unión PN se debe a los portadores minoritarios, presentando ambos semiconductores una conductividad de $\sigma_P = \sigma_N = 4 \cdot 10^{-4} \dfrac{A}{V \cdot m}$

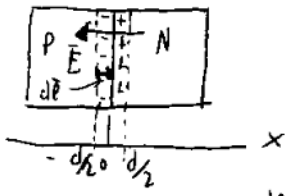
c) Calcular la diferencia de potencial entre los terminales de los semiconductor P y N

En este problema se ilustra el principio de funcionamiento de un dispositivo básico en la electrónica actual, el diodo de semiconductores.

a) En este apartado nos piden calcular la d.d.p en los extremos de la zona de transición de la unión PN. Para ello sólo es necesario conocer el campo eléctrico que aparece en ella como consecuencia de las acumulaciones de carga en las proximidades de la unión.

Este campo es dato:





Por tanto la d.d.p. buscada será:

$$V_0 = V(d/2) - V(-d/2) = -\int_{-\frac{d}{2}}^{d/2} \vec{E}\, d\vec{l} \underset{\vec{E}\,op\,d\vec{l}}{=} \int_{-\frac{d}{2}}^{d/2} E\, dl \overset{dl = dx \text{ (porque x crece)}}{=} \int_{-d/2}^{d/2} E\, dx$$

un campo de la forma representada en la gráfica anterior puede representarse matemáticamente así:

$$E(x) = E_0\left(1 + \frac{2x}{d}\right) \quad -\frac{d}{2} \leq x < 0 \; ; \qquad E(x) = E_0\left(1 - \frac{2x}{d}\right) \quad 0 < x \leq \frac{d}{2}$$

(Estas expresiones se obtienen sin más que suponer que el campo varía de forma lineal, es decir $E(x) = a + bx$, e imponer lo que vale en dos puntos para determinar cuanto vale a y b)

(Si el estudiante no consigue deducir las expresiones anteriores con la explicación previa se le recomienda preguntar en tutorías a la mayor brevedad)

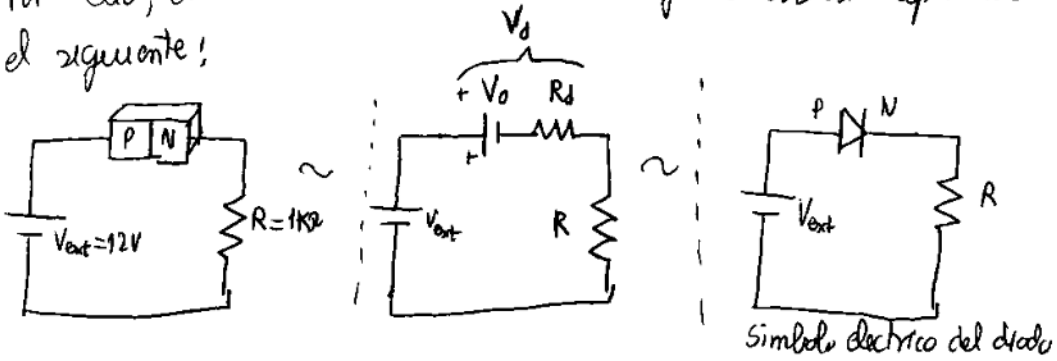
De esta forma ya podemos calcular la integral de la d.d.p.

$$V_0 = \int_{-\frac{d}{2}}^{0} E_0\left(1+\frac{2x}{d}\right)dx + \int_{0}^{\frac{d}{2}} E_0\left(1-\frac{2x}{d}\right)dx = E_0\frac{d}{2} + E_0\frac{2}{d}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{0} + E_0\frac{d}{2} - E_0\frac{2}{d}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\frac{d}{2}} =$$

$$= E_0 d - E_0\frac{d}{4} - E_0\frac{d}{4} = E_0\left(d-\frac{d}{2}\right) = E_0\frac{d}{2} = \boxed{0{,}6\ V = V_0}$$

---

b) Para calcular esta segunda parte debemos suponer que cuando establecemos entre P y N una ddp igual a V_0 (pero con el terminal positivo del lado P) se anula el campo del apartado a) y a partir de ese momento el conjunto se comporta como una resistencia ordinaria. Por ello, el modelo de conducción del conjunto en este apartado será el siguiente:



A este tipo de polarización del diodo se la denomina polarización directa.

Vistos los modelos equivalentes de la unión PN anteriores el cálculo de la ddp en sus extremos, V_d, se reduce a calcular R_d y resolver el circuito.

Dada la simetría plana de la barra semiconductora y teniendo en cuenta el dato de que $\sigma_P = \sigma_N = 1{,}1\cdot 10^3\ (\Omega\cdot m)^{-1}$ podemos utilizar la correspondiente formula para el cálculo de la resistencia en este caso: $R = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{l}{S}$. Ahora $l = 2L = 10mm \equiv$ longitud total de la barra P más la barra N.

$S = 12{,}5\ mm^2$. Luego: $R_d = \frac{1}{\sigma_P}\cdot\frac{2L}{S} = 0{,}72\ \Omega$

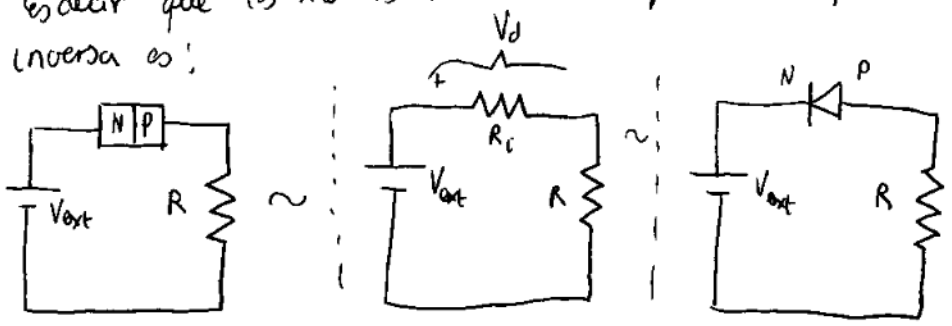
Ahora, para calcular V_d simplemente tenemos que obtener la I por el circuito $I = \frac{V_{ext} - V_0}{R + R_d} \simeq \frac{V_{ext} - V_0}{R} = 11{,}4\ mA$

y después: $V_d = V_0 + I R_d = 0{,}6\,V + 8\,mV = 0{,}608\,V$

---

c) Ahora, cuando establecemos una d.d.p. en sentido contrario al anterior el modelo de conducción para el diodo es simplemente una resistencia, calculada como antes pero ahora con la conductividad correspondiente a los portadores minoritarios, es decir $\sigma_p = \sigma_N = 4 \cdot 10^{-4} (\Omega m)^{-1}$

Es decir que los modelos de conducción para este tipo de polarización inversa es:



La resistencia ahora vale:

$$R_i = \frac{2L}{\sigma_p \cdot S} = \frac{10\,mm}{4 \cdot 10^{-4} (\Omega m)^{-1} \cdot 12{,}5\,mm^2} = 2\,M\Omega$$

$\Rightarrow$ La corriente por el circuito en este caso vale: $I = \frac{V_{ext}}{R + R_i} \simeq \frac{V_{ext}}{R_i} =$

$= 6\,\mu A$

y $V_d = R_i I = \underline{12\,V = V_d}$