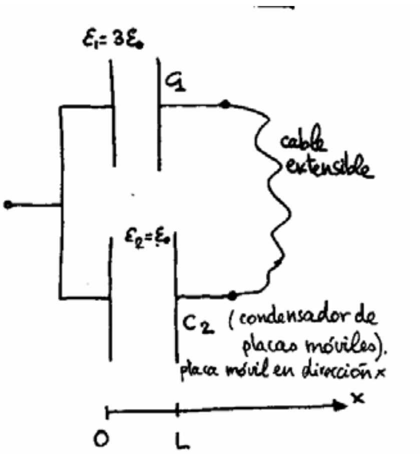
Tema 4. Problemas resueltos

9. Dos condensadores de las mismas dimensiones, de placas planas, paralelas, de superficie S, separadas una distancia L, están conectados en paralelo, aislados y se encuentran a una diferencia de potencial inicial V_0 . El espacio entre las placas de uno de los condensadores está lleno de un material de permitividad $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$, permaneciendo la distancia entre estas placas constante. Las placas del otro condensador están separadas por aire (ε_0) y una de ellas puede moverse libremente únicamente en la dirección perpendicular al plano que contiene la placa. Si esta placa se desplaza desde la posición inicial de manera que la separación entre placas aumente, se pide calcular:

a) La variación de energía potencial eléctrica almacenada en cada uno de los condensadores, indicando si es positiva o negativa y razonando el resultado.

b) Si el módulo del vector intensidad de campo eléctrico en el condensador cuyas placas están separándose valía inicialmente $\frac{E_{0M}}{4}$, con E_{0M} la rigidez dieléctrica del aire que separa sus placas, y la rigidez dieléctrica del material del otro condensador vale 0,3 E_{0M}, indicar si puede producirse la ruptura dieléctrica en alguno de los condensadores al irse separando las placas del condensador de aire. Si la respuesta es afirmativa, indicar en qué condensador se produce y cuál es la distancia entre las placas del condensador de aire cuando salta la chispa.



11/1

<u>Datos:</u>

- Superficie de las placas de ambos condensadores S.
- Separación entre placas
  - En C_1 fija e igual a L
  - En C_2 variable (inicialmente L, luego aumenta).
- Permitividad
  - En C_1: $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$
  - En C_2: $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$
- Conexión en paralelo
- Inicialmente $V_1 = V_2 = V_0$
- Sistema aislado.

a) Calcular la variación de energía eléctrica en cada condensador al aumentar la separación de la placa móvil, indicando si es positiva o negativa y razonando el resultado.

<u>Razonamientos previos</u>

- Según el sist. de coordenadas dibujado podemos decir que en general la posición de la placa móvil es x (siendo x la distancia de la placa al origen de coordenadas, que de esta forma coincide con la separación de las placas del condensador C_2).
- Como el sistema está aislado, todo el proceso será a carga constante, es decir, en todo momento $Q_T = Q_1 + Q_2 = cte.$
- Dada la conexión en paralelo $\Rightarrow V_1 = V_2$ en todo momento, aunque estas d.d.p. varían con la separación de la placa móvil
- Al ser en ambos casos condensadores planos con medios lineales, homogéneos e isótropos entre sus placas sus capacidades valen

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \cdot S}{d_1} = \frac{3\varepsilon_0 \cdot S}{L}\ ; \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \cdot S}{d_2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{x}$$ 12/2

C_1 se mantiene constante pues no varía su geometría, mientras que $C_2 \downarrow$ si $x \uparrow$

- la <u>carga total</u> del sistema puede obtenerse a partir de la d.d.p. inicial entre las placas de los condensadores.

Estado inicial $\Rightarrow x = L$ en $C_2 \Rightarrow C_{T\,inicial} = \frac{3\varepsilon_0 \cdot S}{L} + \frac{\varepsilon_0 S}{L} = \frac{4\varepsilon_0 S}{L}$

$\Rightarrow \boxed{Q_T = C_T \cdot V_0 = \frac{4\varepsilon_0 S}{L} \cdot V_0}$

Como V_0 es dato, la carga total queda determinada.

- A medida que se separan las placas de C_2 la ddp entre placas de los condensadores aumenta, ya que en todo momento se cumple que $V = \frac{Q_T}{C_T}$; como $Q_T = cte$ y $C_T \downarrow$ si $x\uparrow \Rightarrow \underline{V\uparrow \text{ si } x\uparrow}$

- Conforme separamos la placa móvil la carga del condensador 2 va pasando al 1, al disminuir su capacidad. Cada una de las cargas puede calcularse a partir de V. -

$$Q_1 = C_1 \cdot V = C_1 \frac{Q_T}{C_T} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_T \qquad y \qquad Q_2 = C_2 \cdot V = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_T$$

En el límite de placas de C_2 muy separadas ($x \to \infty$)

$\Rightarrow C_2 \to 0 \Rightarrow C_T = C_1 \Rightarrow Q_1 = Q_T$ y $Q_2 = 0$.

Vemos pues que en general habrá de cumplirse que si $x\uparrow \Rightarrow Q_1 \uparrow$ y $Q_2 \downarrow$, pero siempre manteniéndose la suma $Q_1 + Q_2 = Q_T$ constante

Tras las cuestiones anteriores podemos abordar el cálculo de la [12/3] energía con relativa comodidad

$$W_1(x) = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{C_1}{(C_1+C_2)^2} = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{\frac{3\varepsilon_0 S}{L}}{\left(\frac{\varepsilon_0 S}{L}\right)^2\left(3+\frac{L}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2} Q_T^2 \cdot \frac{L}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{1}{\left(3+\frac{L}{x}\right)^2}$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{C_2}{(C_1+C_2)^2} = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{x}}{\left(\frac{\varepsilon_0 S}{L}\right)^2\left(3+\frac{L}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{L}{\varepsilon_0 S} \frac{L}{x} \frac{1}{\left(3+\frac{L}{x}\right)^2}$$

El incremento de energía en cada condensador será:

$$\Delta W_1 = W_1(x) - W(L) = \frac{3}{2} Q_T^2 \frac{L}{\varepsilon_0 S}\left[\frac{1}{\left(3+\frac{L}{x}\right)^2} - \frac{1}{16}\right]$$

$$\Delta W_2 = W_2(x) - W(L) = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{L}{\varepsilon_0 S}\left[\frac{L}{x}\frac{1}{\left(3+\frac{L}{x}\right)^2} - \frac{1}{16 L}\right]$$

Vemos que $\underline{\Delta W_1 > 0 \quad \text{para} \quad x > L}$

y que $\underline{\Delta W_2 < 0 \quad \text{para} \quad x > L}$

La energía total es:

$$W_T = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{L}{\varepsilon_0 \cdot S} \frac{1}{\left(3+\frac{L}{x}\right)^2}\left(3+\frac{L}{x}\right) = \frac{1}{2} Q_T^2 \cdot \frac{L}{\varepsilon_0 S}\frac{1}{3+\frac{L}{x}}$$

$$\boxed{W_T = \frac{1}{2} Q_T^2 \frac{L}{\varepsilon_0 S}\frac{1}{3+\frac{L}{x}}}$$

A partir de estas expresiones deducimos lo siguiente: 12/4

$$\text{Si } x\uparrow \Rightarrow \begin{cases} W_1 \uparrow \\ W_2 \downarrow \\ W_T \uparrow \end{cases} \qquad \text{Si } x \to \infty \begin{cases} W_1 \to W_T \\ W_2 \to 0 \end{cases}$$

Y esto se interpreta del siguiente modo:

Conforme se separan las placas, la carga va pasando del condensador 2 al 1, puesto que C_2 disminuye mientras que C_1 permanece constante.

Por ello, la energía del condensador 1 también va aumentando, hasta que toda la carga y la energía acaba en él.

La explicación de que la energía eléctrica total aumenta, pese a que el sistema está aislado eléctricamente está en el trabajo mecánico que hay que realizar para separar la placa móvil. Es decir, este sistema produce la conversión de energía mecánica (la que ejerce el agente externo que separa la placa móvil) en energía eléctrica.

b) Indicar si puede producirse ruptura dieléctrica en alguno de los condensadores y en caso afirmativo para que valor de x

- Según los datos del enunciado del problema $E_2(x=L) = \frac{E_{0M}}{4}$. Para resolver este apartado hemos de calcular los campos en cada condensador.

12/5

Dada la simetría plana y dado que los dieléctricos son l.h.i, los campos en ambos condensadores serán constantes y por tanto pueden ponerse de forma simple en función de la ddp V.

$$E_1 = \frac{V}{L} = \frac{Q_T}{L}\frac{1}{C_T} = \frac{Q_T}{L}\frac{1}{\frac{3\varepsilon_0 S}{L} + \frac{\varepsilon_0 S}{x}} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0 S}\frac{1}{3 + \frac{L}{x}}$$

$$E_2 = \frac{V}{x} = \frac{Q_T}{x}\frac{1}{C_T} = \frac{Q_T}{x}\frac{1}{\frac{3\varepsilon_0 S}{L} + \frac{\varepsilon_0 S}{x}} = Q_T\frac{L}{\varepsilon_0 S}\frac{1}{3x + L}$$

Si $x\uparrow \Rightarrow E_1\uparrow$ y $E_2\downarrow$

La rigidez dieléctrica del dieléctrico del condensador 2 es $E_{0M} = 4 \cdot E_2(x=L) = \frac{Q_T}{\varepsilon_0 S}$ (el condensador C_2 no se perfora porque en el enunciado nos dicen explícitamente que x aumenta, no disminuye). De todas formas igualando $E_2(x) = E_{0M}$ se obtiene que x debe ser 0 para que C_2 se perfore, cosa que no ocurre.

Por tanto, de producirse ruptura, ésta ocurrirá en C_1.

Para descubrir si se produce ruptura, tenemos que igualar el campo en C_1 con su rigidez dieléctrica y determinar para qué valores de x ocurre (si la ecuación no tuviera solución sería porque C_1 está siempre sin perforar o bien siempre perforado, independientemente de x).

Condición de ruptura: E_1 igual al campo de ruptura del medio 1.

$$E_1 = E_{1max} = 0'3 \cdot E_{0M} = 0'3 \frac{Q_T}{\varepsilon_0 \cdot S}$$

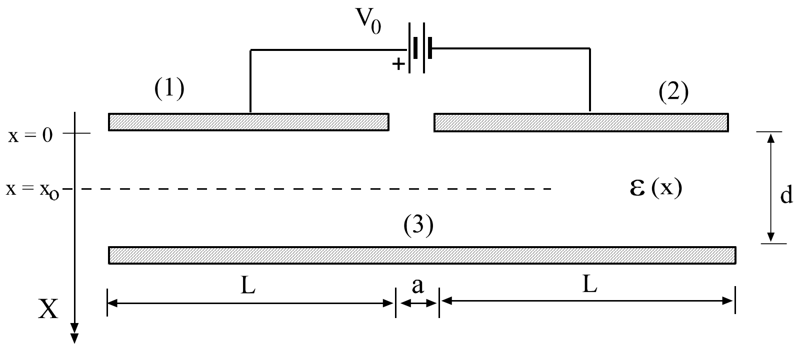
$$\Rightarrow E_1(x_r) = \frac{\cancel{Q_T}}{\cancel{\varepsilon_0 S}} \frac{1}{\left(3 + \frac{L}{x_r}\right)} = E_{1max} = 0'3 \frac{\cancel{Q_T}}{\cancel{\varepsilon_0 \cdot S}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 0'9 + 0'3 \frac{L}{x} \quad \Rightarrow \quad 0'3 \frac{L}{x_r} = 0'1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_r = 3L}$$

Inicialmente $E_1(x = L) = \dfrac{Q_T}{4 \varepsilon_0 \cdot S} = 0'25 \cdot E_{0M} < E_{1max} \Rightarrow$ no hay perforación inicialmente. Sin embargo, conforme $x \uparrow \Rightarrow E_1 \uparrow$ hasta que $x = 3L$, cuando se produce una descarga en forma de chispa en el condensador 1.

12. En algunas aplicaciones industriales se utilizan campos eléctricos para levantar objetos de poco peso. Para ello es posible utilizar un dispositivo como el representado en la figura, formado por dos láminas metálicas (1 y 2), cuadradas de lado L, conectados a una fuente de tensión cuya diferencia de potencial es de V_o. Una tercera lámina metálica, paralela a ellas, aislada y descargada, completa el sistema y constituye el objeto a levantar. Las tres láminas son de espesor despreciable, y los efectos de borde (deformación de las líneas de campo eléctrico) pueden también despreciarse. Entre ellas tenemos un gas dieléctrico con permitividad $\varepsilon = 2\,\varepsilon_o$

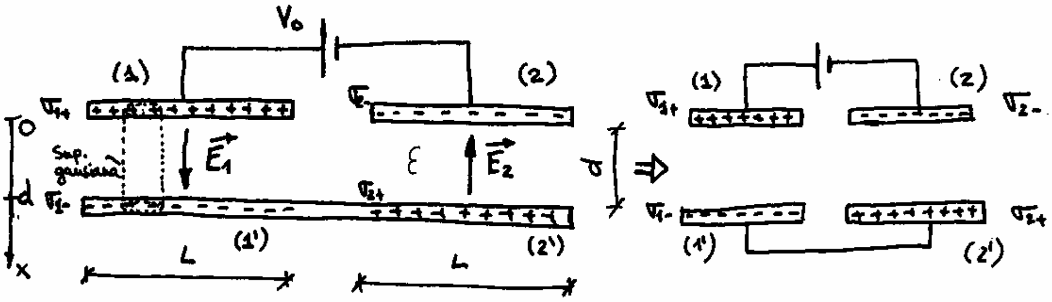


Calcular:

a) la capacidad del sistema formado por las tres láminas metálicas.
b) densidad superficial de carga real en todos los puntos de la lámina inferior y los campos eléctricos en la región entre las placas, muy próxima a la placa inferior, $\vec{E}\big|_{x \cong d}$, y
c) densidad volumétrica de energía electrostática en cada punto del sistema y la energía total.

Datos: L = 10 cm, d = 1 mm, a = 2 cm, V_o = 1000 V

El sistema formado por tres láminas forma un sistema de dos condensadores en serie. Dada la simetría del problema y que pueden despreciarse efectos de borde los campos en ambos condensadores serán perpendiculares a las placas (estamos frente a dos condensadores planos). Utilizaremos el dato. $\varepsilon = 4\varepsilon_0$



La zona de la placa inferior que está debajo de la placa (1) la he denominado (1'). En (1') aparece una densidad de carga σ_{1-} igual y de signo contrario a la de (1), σ_{1+} (esto se puede comprobar tomando una superficie gausiana tipo "lata" con la tapa superior e inferior en (1) y (1') y viendo que $\Phi_D = 0 = q_{real}$

Por otra parte, dado que las superficies S_1 y S_2 son iguales y que la carga de la placas (1) y (2) deben ser iguales y de signo contrario: $\sigma_{1+} \cdot S_1 = -\sigma_{2-} \cdot S_2 \Rightarrow \sigma_{1+} = -\sigma_{2-}$
(supuesto que las placas 1 y 2 no tenían carga neta antes de conectar la fuente de alimentación)

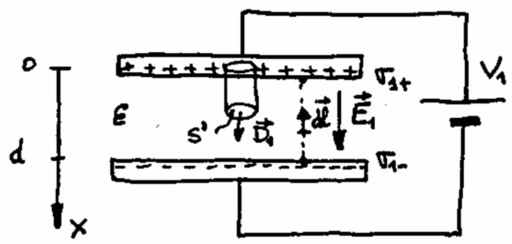
Si pensamos que la placa inferior no tiene carga neta total llegamos a la misma conclusión: $q_{placa\,inf.} = \sigma_{1-} S_1 + \sigma_{2+} S_2 = 0$
$S_1 = S_2 \Rightarrow \sigma_{2+} = -\sigma_{1-}$

Dada la simetría del problema, que $\sigma_1 = \sigma_2$ y que el dieléctrico de los dos condensadores es igual se deduce que $\vec{E} = -\vec{E_2}$ y que $C_1 = C_2$.

Por tanto, basta calcular la capacidad de uno de ellos y utilizar la fórmula de la capacidad de un sistema de condensadores en serie para obtener la capacidad total:

$$C_T = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \underset{C_1 = C_2}{=} \boxed{\frac{C_1}{2} = C_T}$$

a) Calcular la capacidad del condensador 1



Dada la simetría, aplicando la ley de Gauss para $\vec{D}$ a la superficie dibujada tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \oint\!\!\oint \vec{D_1} \cdot \vec{dS} = D_1 \cdot S' \\ Q_{real\,enc} = \sigma_{1+} \cdot S' \end{array}\right\} \vec{D_1} = \sigma_1 \cdot \vec{u_x}$$

$$\Rightarrow \vec{E_1} = \frac{\vec{D_1}}{\varepsilon} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon}$$

$$dl = -dx$$

$$\boxed{V_1} = V(x=0) - V(x=d) = -\int_d^0 \vec{E_1} \cdot \vec{dl} \underset{\vec{E_1}\ op.\ \vec{dl}}{=} +\int_d^0 E \cdot dl \overset{dl=-dx}{=}$$

$$= -\int_d^0 E_1 \cdot dx = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon} \left(x \right) \Big|_d^0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon} \cdot d$$

$$\boxed{Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_{1+} \cdot dS \underset{\sigma_{1+} = cte}{=} \sigma_{1+} \cdot S_1 = \sigma_1 \cdot L^2}$$

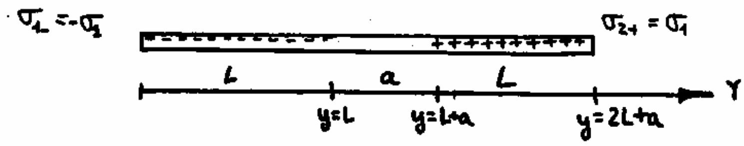
16/:

$$\boxed{C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{\varepsilon \cdot S}{d}}$$

Luego la capacidad total del sistema es $C_T = \frac{C_1}{2}$

$$\boxed{C_T = \frac{4\varepsilon_0 S}{d} = 354\,pF}$$

b) Para describir la carga en puntos de la lámina inferior necesito definir un eje y.



$0 < y < L$ $\quad \sigma_{inferior} = -\sigma_1$ $\quad [C/m^2]$

$$\vec{E} = \vec{E_1}(x=d) = \frac{\vec{D_1}}{\varepsilon} = \frac{\sigma_1}{4\varepsilon_0}\vec{u_x} \qquad \left[\frac{N}{C}\right]$$

$L < y < L+a$ $\quad \sigma_{inferior} = 0 \quad [C/m^2]$

$\vec{E} = 0 \quad [N/C]$

$a+L < y < a+2L$ $\quad \sigma_{inferior} = +\sigma_{2+} = \sigma_1 \quad [C/m^2]$

$$\vec{E} = \vec{E_2}(x=d) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} -\vec{E_1}(x=d) = -\frac{\sigma_1}{4\varepsilon_0}u_x \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

Para completar la resolución de este apartado hemos de calcular σ_1 en función de los datos. Para ello aplico $Q_1 = C_T \cdot V_0$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{2\varepsilon_0 \cdot S}{d}V_0 \Rightarrow \sigma_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma_1 = cte}}{=} \frac{Q_1}{S} = \boxed{\frac{2\varepsilon_0 V_0}{d} = \sigma_1} \qquad (1)$$

Resultados numéricos

16

$0 < y < L$ $\quad \sigma_{inferior} = -2\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{d} = -17'7 \dfrac{\mu C}{m^2}$

$$\vec{E}_1(x=d) = \frac{1}{2}\frac{V_0}{d}\vec{u_x} = 10 \cdot 10^5\, \vec{u_x} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$0 < y < L+a$ $\quad \sigma_{inferior} = 0 \qquad \vec{E} = 0$

$a < y < 2L+a$ $\quad \sigma_{inferior} = 2\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{d} = 17'7 \dfrac{\mu C}{m^2}$

$$\vec{E}_2(x=d) = \frac{1}{2}\frac{V_0}{d}(-\vec{u_x}) = -10 \cdot 10^5\, \vec{u_x} \;[V/m]$$

c) La energía electrostática sólo va a tener un valor no nulo en las zonas donde $E \neq 0$. Por tanto, sólo tenemos que estudiar w en el dieléctrico entre las placas 1 y 1' (condensador C_1) y entre las placas 2 y 2' (condensador C_2). Dada la simetría del problema, $|\vec{E_1}| = |\vec{E_2}|$ y $|\vec{D_1}| = |\vec{D_2}| \Rightarrow w_1 = w_2$

$$\boxed{w_1 = \frac{1}{2}E_1 \cdot D_1 = \frac{1}{2}E_2 \cdot D_2 = w_2 = \frac{\sigma_1^2}{4\varepsilon_0}}$$

la energía total asociada al condensador 1 será

$$W_1 = \frac{1}{2}\iiint_{\text{volumen dieléctrico 1}} \frac{\sigma_1^2}{4\varepsilon_0}\, dV_{ol} = \frac{\sigma_1^2}{\varepsilon_0}\iiint_{V_{ol\,1}} dV_{ol} = \frac{\sigma_1^2}{\varepsilon_0} L^2 d \underset{\text{Sust } \sigma_1 (1)}{=} \frac{\varepsilon_0 L^2}{2d} \cdot V_0^2$$

Por tanto, la energía total será: $\boxed{W_T = W_1 + W_2 = 2W_1 = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d} \cdot V_0^2 = 88'5\, \mu J}$