Tema 4. Energía Electrostática.

- Energía electrostática en condensadores.

1.- Dos condensadores aislados, de capacidades iguales de valor C, inicialmente cargados con cargas q_1 y q_2 , se conectan en paralelo. Calcular la energía disipada en la chispa que se observa en los terminales de los condensadores en el momento de realizar la conexión.

2.- Un condensador de capacidad $C_1 = 4\ \mu F$ se carga hasta que su diferencia de potencial es de 800 V. A continuación se desconecta de la fuente y se conecta en paralelo con otro condensador aislado y descargado de capacidad $C_2 = 6\ \mu F$. Calcular la energía electrostática total de los dos condensadores antes y después de ser conectados. Explicar en qué se ha invertido la diferencia de energía observada teóricamente.

3.- Una batería electroquímica del sistema eléctrico de un automóvil (12 V - 80 Ah) es capaz de acumular una energía aproximada de 1 kW-h ≡ 3,6 MJ. Calcular el volumen mínimo de un condensador plano construido usando titanato de bario ($\varepsilon = 1200 \cdot \varepsilon_0$, rigidez dieléctrica 10^7 V/m) que sea capaz de almacenar esa energía a 12 V.

4.- Un condensador de placas planas, paralelas, de superficie S, separadas una distancia d por aire, se conecta a una batería cuya diferencia de potencial es V_0 . Posteriormente el condensador se aísla, y entre las placas conductoras se introduce un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo, de permitividad ε, que llena todo el espacio entre las placas. Calcular:

a) la carga inicial y final en las placas del condensador,
b) la diferencia de potencial final entre las placas del condensador,
c) la energía almacenada en el condensador antes y después de introducir el dieléctrico.

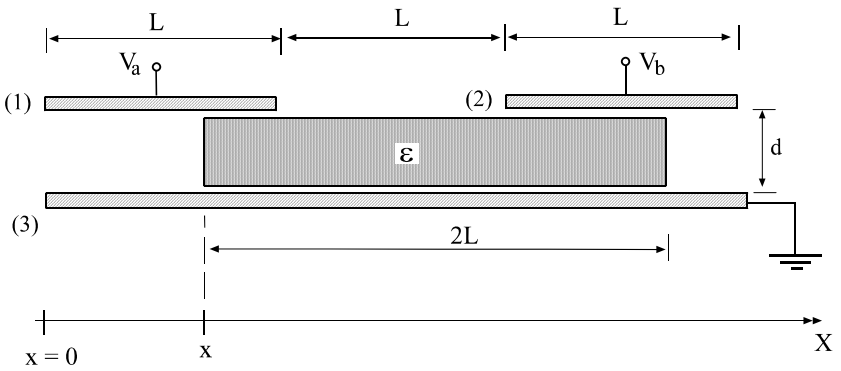
5.- Un condensador de placas planas, paralelas, de superficie S, separadas una distancia d por aire, se encuentra conectado a una batería cuya diferencia de potencial V_0 se mantiene constante. Manteniendo el condensador conectado a la batería, se introduce entre las placas un material dieléctrico de permitividad ε y espesor d, llenando todo el espacio entre ellas. Calcular:

a) la carga inicial y final en las placas del condensador,
b) la energía almacenada en el condensador antes y después de introducir el dieléctrico

6.- Para detectar la posición (desplazamiento a lo largo del eje X) de una lámina dieléctrica plana, de longitud 2L, anchura L, espesor d y permitividad ε, se propone utilizar un dispositivo como el representado en la figura (ver figura en la página siguiente). Está formado por dos láminas metálicas (1 y 2), cuadradas de lado L, cargadas con cargas iguales de valor q_+. Una tercera lámina metálica, paralela a ellas, aislada y descargada, situada por debajo de la lámina dieléctrica y conectada a tierra completa el sistema. Las tres láminas metálicas son de espesor despreciable, y los efectos de deformación de las líneas de campo eléctrico pueden también despreciarse. La señal eléctrica que se pretende usar para conocer la posición de la lámina dieléctrica es la diferencia de potencial entre las láminas 1 y 2, $V_a - V_b$.

Calcular:
a) La relación entre la diferencia de potencial ($V_a - V_b$) y la posición (coordenada x) de la lámina, y representarla gráficamente.
b) La energía electrostática del sistema en función de la posición (coordenada x) de la lámina.

Datos: $q_+ = 1{,}6\ 10^{-9}$ C, L = 10 cm, d = 1 mm, $\varepsilon = 3\ \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}\ C^2/N\ m^2$



Problema 6

7.- Un condensador de placas planas, paralelas, de superficie S = 1 cm^2 y separación d = 1 cm, se carga hasta alcanzar una diferencia de potencial $V_a - V_b = V_0 = 1000$ V. La permitividad del medio dieléctrico que llena el espacio entre placas es $\varepsilon = 4\,\varepsilon_o$. Posteriormente el condensador se desconecta de la batería de carga y sus placas se separan simétricamente hasta una distancia 2d, quedando el dieléctrico rodeado de aire. Calcular:

a) el valor final de la diferencia de potencial entre las placas,
b) la energía almacenada inicial y final, y
c) el trabajo necesario para separar las placas.

8.- Entre dos cilindros conductores coaxiales, de radios *a* y *b* (*b* = 2*a*), se introducen dos capas de dieléctrico que llenan el espacio entre los conductores. Los dieléctricos son l.h.i. de permitividades $\varepsilon_1 = 4\cdot\varepsilon_0$ y ε_2. El límite de separación entre los dieléctricos es la superficie cilíndrica de radio R, coaxial con las otras dos. Entre los conductores se aplica una diferencia de potencial $V_0 > 0$ (ver figura en la página siguiente).

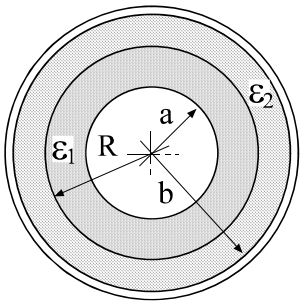
a) Calcular el valor de ε_2 para que la energía electrostática en ese medio sea la mitad que la energía en el medio 1.

b) Calcular, para el valor de ε_2 encontrado en el apartado anterior, la energía electrostática total por unidad de longitud.

9.- Dos condensadores de las mismas dimensiones, de placas planas, paralelas, de superficie S, separadas una distancia L, están conectados en paralelo, aislados y se encuentran a una diferencia de potencial inicial V_0. El espacio entre las placas de uno de los condensadores está lleno de un material de permitividad $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$, permaneciendo la distancia entre estas placas constante. Las placas del otro condensador están separadas por aire (ε_0) y una de ellas puede moverse libremente únicamente en la dirección perpendicular al plano que contiene la placa. Si esta placa se desplaza desde la posición inicial de manera que la separación entre placas aumente, se pide calcular:

a) La variación de energía potencial eléctrica almacenada en cada uno de los condensadores, indicando si es positiva o negativa y razonando el resultado.

b) Si el módulo del vector intensidad de campo eléctrico en el condensador cuyas placas están separándose valía inicialmente $\frac{E_{0M}}{4}$, con E_{0M} la rigidez dieléctrica del aire que separa sus placas, y la rigidez dieléctrica del material del otro condensador vale 0,3 E_{0M}, indicar si puede producirse la ruptura dieléctrica en alguno de los condensadores al irse separando las placas del condensador de aire. Si la respuesta es afirmativa, indicar en qué condensador se produce y cuál es la distancia entre las placas del condensador de aire cuando salta la chispa.

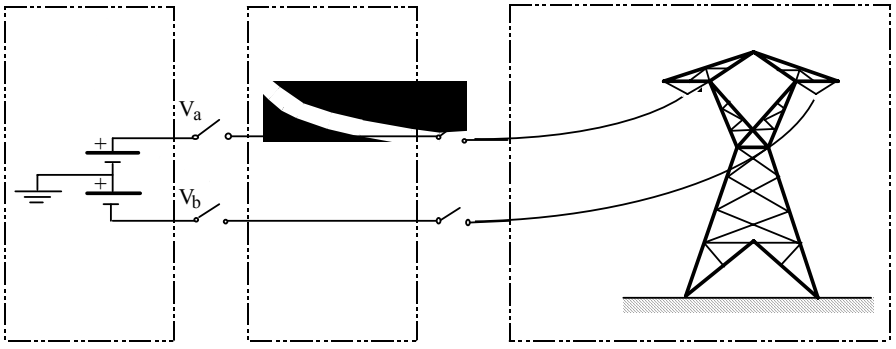


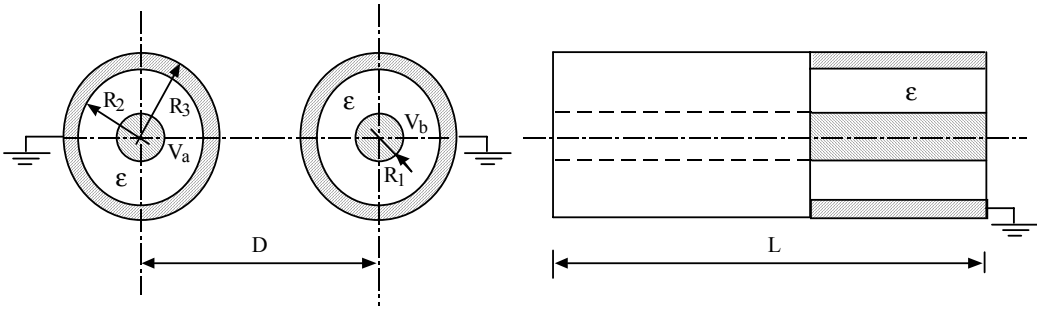
Problema 8

Problema 10

10.- Un condensador de placas planas, paralelas cuya separación es d y su superficie A, se carga conectándolo a los terminales de una batería cuya diferencia de potencial es V_a-V_b = V_0. Una vez cargado, se desconecta de la batería y entre sus placas se introduce una lámina conductora descargada de espesor d/2 y superficie A. El medio se supone aire (ε_0). Calcular la energía electrostática antes y después de introducir la lámina. ¿Cómo puede justificarse la variación de energía en este sistema si se considera aislado?

11.- El tramo terrestre de una línea de alta tensión de corriente continua que une el generador con el tramo aéreo está constituido por dos conductores rectos, paralelos, cilíndricos de radio R_1 = 5 cm separados una distancia D = 2 m. Cada uno de estos conductores se encuentra rodeado de una carcasa cilíndrica metálica, coaxial, de radio interior R_2 = 15 cm y radio exterior R_3 = 16 cm conectada a tierra. En el espacio entre el conductor y la carcasa se encuentra un gas a presión (ε = 4 ε_0) que actúa como aislante. El potencial del conductor positivo respecto de tierra es V_a = 250 kV y el potencial del conductor negativo respecto de tierra V_b = -250 kV. La longitud del tramo terrestre es L = 10 m.





Para realizar labores de mantenimiento en la línea se sigue el siguiente procedimiento:

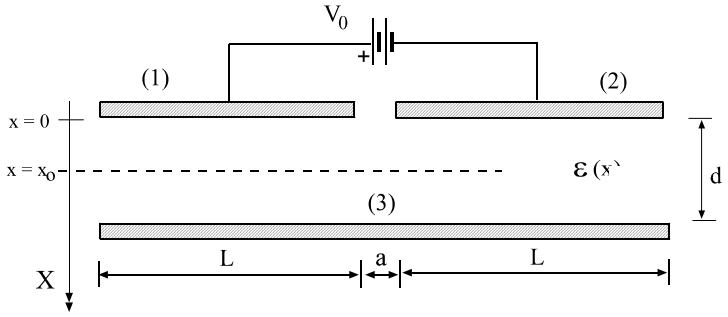
a) En primer lugar se desconecta el tramo aéreo del tramo terrestre, manteniendo este último conectado al generador. En esta situación, calcular las densidades superficiales de carga real en cada uno de los conductores del tramo terrestre de la línea.

b) En segundo lugar, se desconecta el generador del tramo terrestre, quedando este último aislado. En estas condiciones, calcular la energía electrostática que queda almacenada en el tramo terrestre de la línea.

c) Por último se extrae el gas aislante, quedando los espacios entre los conductores y las carcasas llenos de aire. Finalizada esta operación, indicar razonadamente si la energía restante seguirá almacenada o se disipará violentamente debido a la ruptura dieléctrica del aire que ha sustituido al gas.

Datos: Rigidez dieléctrica aire, E_{MAX0} = 3 MV/m, Rigidez dieléctrica gas, E_{MAXg} = 15 MV/m

12.- En algunas aplicaciones industriales se utilizan campos eléctricos para levantar objetos de poco peso. Para ello es posible utilizar un dispositivo como el representado en la figura, formado por dos láminas metálicas (1 y 2), cuadradas de lado L, conectados a una fuente de tensión cuya diferencia de potencial es de V_0. Una tercera lámina metálica, paralela a ellas, aislada y descargada, completa el sistema y constituye el objeto a levantar. Las tres láminas son de espesor despreciable, y los efectos de borde (deformación de las líneas de campo eléctrico) pueden también despreciarse. Entre ellas tenemos un gas dieléctrico con permitividad $\varepsilon = 2\,\varepsilon_0$



Calcular:

a) la capacidad del sistema formado por las tres láminas metálicas.
b) densidad superficial de carga real en todos los puntos de la lámina inferior y los campos eléctricos en la región entre las placas, muy próxima a la placa inferior, $\vec{E}\big|_{x \cong d}$, y

c) densidad volumétrica de energía electrostática en cada punto del sistema y la energía total.

Datos: L = 10 cm, d = 1 mm, a = 2 cm, V_0 = 1000 V

13.- Un condensador de placas planas paralelas y dieléctrico aire puede almacenar una energía máxima W_a ¿Cuál es la máxima energía que puede almacenar el condensador si el espacio se llena con vidrio pyrex ($\varepsilon = 5{,}6\,\varepsilon_0$)?

Datos: Rigidez dieléctrica pyrex, E_{MAX} = 14 MV/m

- Energía potencial eléctrica en sistemas electrostáticos.

14.- Una esfera conductora de radio R se encuentra a un potencial V respecto del infinito. Si el medio que la rodea es aire (ε_0), calcular la energía electrostática asociada a la corona esférica comprendida entre los radios $R_1 = 2R$ y $R_2 = 4R$.

15.- Un sistema electrostático está inicialmente constituido por una esfera conductora, de radio $R_1 = 4$ cm, y carga $q = 0{,}5\ \mu C$. Si se deposita sobre la superficie de la esfera una capa esférica de material dieléctrico ($\varepsilon = 4\cdot\varepsilon_0$) de espesor $\delta = 1$ mm, calcular el incremento de energía potencial eléctrica del sistema, indicando e interpretando su signo.

16.- Una esfera conductora sólida de radio R_1 tiene una carga positiva $q_{1+} = 2Q$. Un cascarón conductor esférico de radio interno R_2 y radio externo R_3 concéntrico con la esfera sólida tiene una carga $q_{2-} = -Q$. El medio que separa los dos conductores es l.h.i, de radios R_1 y R_2 y permitividad ε. El resto del espacio se supone vacío. Calcular la energía electrostática del sistema de conductores.

17.- El conductor 1 de la figura es un cilindro macizo de altura H y radio R_1, que se encuentra inicialmente cargado con una carga total $q_{1+} = 0{,}15\ \mu C$. El conductor 2 es un cilindro hueco de radio interior R_2 y radio exterior R_3, también de altura H e inicialmente descargado y aislado. Mediante un hilo aislante se introduce el conductor 1 en el hueco del conductor 2, sin que en el proceso haya contacto entre los dos conductores. El conductor 1 queda finalmente centrado y alineado con el conductor 2, tal como se muestra en la figura (situación final I).

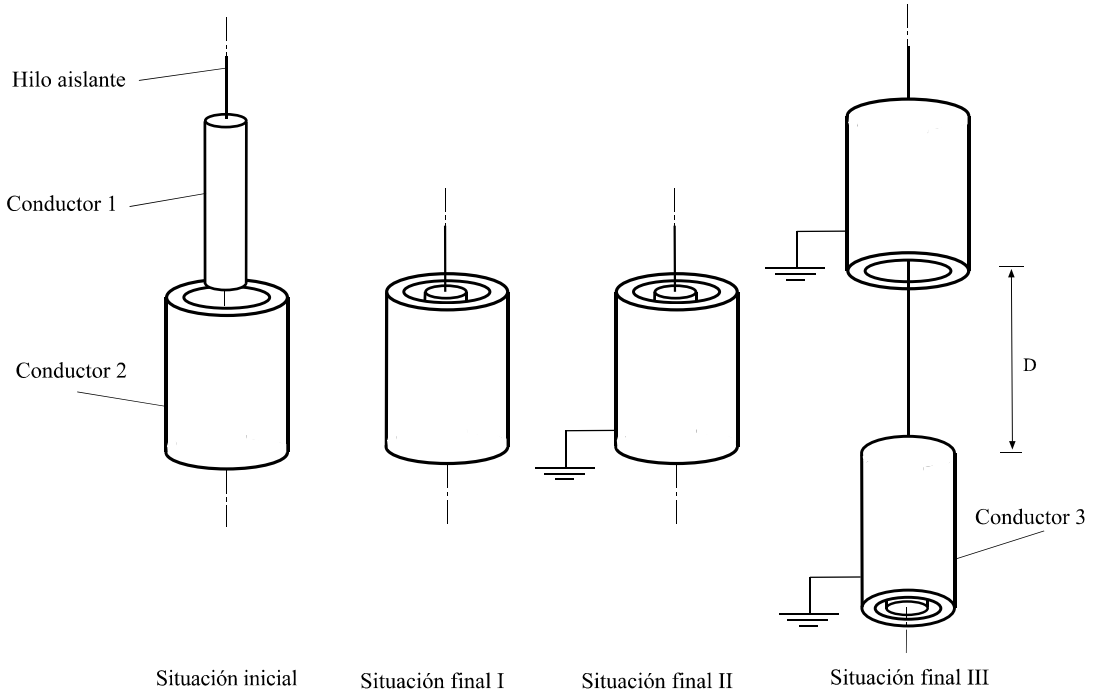
Posteriormente el conductor 1 se saca del interior del conductor 2, y el conductor 2 se conecta a tierra. El conductor 1 se vuelve a introducir en el hueco del conductor 2, hasta alcanzar la situación final II de la figura. En ningún momento hay contacto entre los conductores.

a) Calcular, únicamente, la energía eléctrica asociada al sistema formado por los dos conductores en la situación final II, e indicar si será mayor o menor que la energía en la situación final I.

El conductor 3 es otro cilindro unido a tierra, hueco de altura H, de radio interior R_4 y radio exterior R_5, coaxial con el conductor 2 y situado debajo de él, a una distancia D (D>>H).

b) Partiendo de la situación final II, el conductor 1 se deja caer hasta que queda centrado y alineado con el conductor 3, sin que exista en ningún momento contacto entre ambos conductores. El trabajo realizado para trasladar el conductor 1 desde la posición final II hasta la posición final III lo realizan el campo gravitatorio y el campo eléctrico. Calcular la parte de ese trabajo que corresponde al realizado por el campo eléctrico, indicando si es positivo o negativo.

Datos: $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 3$ cm, $R_3 = 3{,}5$ cm, $R_4 = 2$ cm, $R_5 = 2{,}5$ cm, H = 12 cm



BIBLIOGRAFÍA Y RESULTADOS

-- Problema **1**, [Serway R., "Electricidad y Magnetismo", 3ª Ed. rev.; Cap. 26, Ej. 26.5r]. Resultado:

$W_E = \frac{(q_1 \pm q_2)^2}{4C} - \frac{q_1^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C}$ [J] dependiendo de la si la polaridad de la conexión de los condensadores es igual (signo +) o invertida (signo -).

-- Problema **2**, Resultado: $W_{E\ inicial} = 1{,}28$ J; $W_{E\ final} = 0{,}512$ J. La energía es liberada en la chispa que se produce al unir los dos condensadores (luz y calor)

-- Problema **3**. Resultado: Volumen $= 3{,}6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot (12 \cdot 10^{-7})^2 \cdot \frac{1}{1200 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{12^2} = 6{,}77\ m^3$

-- Problema **4**, [Serway R., "Electricidad y Magnetismo", 3ª Ed. rev.; Cap. 26, Ej. 26.7r].

[Resnick R. - Halliday D., "Física", Tomo II, 4ª Ed.; Cap. 31, Pb. muestra 8r (apt.31-5)]. Resultado:

a) $Q_i = Q_f = \varepsilon_o \frac{S \cdot V_o}{d}$ [C]; b) $V_f = \frac{V_o}{\varepsilon_r}$ [V]; c) $W_{E\ inicial} = \frac{\varepsilon_o \cdot S \cdot V_o^2}{2 \cdot d}$ [J]; $W_{E\ final} = \frac{\varepsilon_o \cdot S \cdot V_o^2}{2 \cdot d \cdot \varepsilon_r}$ [J]

-- Problema **5**, Resultado:

a) $Q_i = \varepsilon_o \frac{S \cdot V_o}{d}$ [C]; $Q_f = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o \frac{S \cdot V_o}{d}$ [C]; b) $W_{E\ inicial} = \frac{\varepsilon_o \cdot S \cdot V_o^2}{2 \cdot d}$ [J]; $W_{E\ final} = \frac{\varepsilon_o \cdot \varepsilon_r \cdot S \cdot V_o^2}{2d}$ [J]

-- Problema **6e**, Convocatoria de Septiembre, Curso 2000 - 01, 5-9/01. Resultado:

a) $V_a - V_b = \frac{2\, d\, q_+}{\varepsilon_0\, L} \frac{2\,x - L}{(3\,L - 2\,x)\,(2\,x + L)}$ [V]

b) $W_E = \frac{2\, d\, q_+^2}{\varepsilon_0\,(3\,L - 2\,x)\,(2x + L)} = \frac{0{,}579 \cdot 10^{-9}}{(0{,}3 - 2\,x)\,(2\,x + 0{,}1)}$ [J]

-- Problema **7**, [López Rodríguez, V., "Problemas resueltos de Electromagnetismo", Cap. 5, Pb. 7r]. Resultado:

a) $V_f = 5000$ V; b) $W_{E\ inicial} = 17{,}7 \cdot 10^{-8}$ J; $W_{E\ final} = 8{,}85 \cdot 10^{-6}$ J; c) $\Delta W_E = 8{,}673 \cdot 10^{-6}$ J.

-- Problema **8**, Resultado:

a) $\varepsilon_2 = 8\,\varepsilon_0 \frac{\ln \frac{b}{R}}{\ln \frac{R}{a}}$ b) $\frac{W_E}{H} = \pi\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, V_0^2 \frac{1}{\left\{\varepsilon_1 \ln \frac{b}{R} + \varepsilon_2 \ln \frac{R}{a}\right\}}$ $\left[\frac{J}{m}\right]$

-- Problema **9e**, Problemas 2º Parcial, Curso 1996 – 97, 3-6/97. Resultado:

a) $\Delta W_E^{\varepsilon_o} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_o \cdot V_o^2 \cdot \left\{\frac{16x}{(3x + L)^2} - \frac{1}{L}\right\} \cdot S$ [J] $< 0,\ x > L$

$\Delta W_E^{\varepsilon_1} = 3 \cdot \varepsilon_o \cdot V_o^2 \cdot \left\{\frac{8x^2}{(3x + L)^2} - \frac{1}{2}\right\} \cdot \frac{S}{L}$ [J] $> 0,\ x > L$

b) Cuando $x \geq 3L$ se producira la ruptura dielectrica en el condensador de placas fijas ($\varepsilon = 3 \cdot \varepsilon_o$)

-- Problema **10**, [López Rodríguez, V., "Problemas resueltos de Electromagnetismo", Cap. 5, Pb. 8r]

Resultado: $\Delta W_E = W_{E\ final} - W_{E\ inicial} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 V_0^2 \frac{S}{d}$ $[J]$; el trabajo para introducir la lámina lo realiza el campo eléctrico en el condensador, no el agente exterior.

-- Problema **11e**, Problemas 2º Parcial, Curso 1998 – 99, 14-6/99. Resultado:

a) $\sigma_{s1+} = \frac{1}{R_1}\cdot\varepsilon\cdot V_a\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = 160{,}9\cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$; $\sigma_{s2-} = \frac{1}{R_1}\cdot\varepsilon\cdot V_b\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = -160{,}9\cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$

b) $W_E = 8\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot L\cdot V_a^2\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = 126{,}42\ \ J$

c) ${}^{II}E_r(r = R_1) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot V_a\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{1}{R_1} = 18{,}2\cdot 10^6\ \frac{V}{m} > E_{MAX}$;

${}^{II}E_r(r = R_2) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot V_a\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{1}{R_2} = 6{,}07\cdot 10^6\ \frac{V}{m} > E_{MAX}$

En todos los puntos de los condensadores, $|\vec{E}|$ supera el valor de la rigidez dielectrica del aire; la energia se disipara en forma de una chispa que descargara el sistema.

-- Problema **12e**, Convocatoria de Septiembre, Curso 1999-00, 4-9/00. Resultado:

a) $C = \varepsilon_0\ \frac{L^2}{d} = 88{,}5\ pF$

b) $\forall\ 0 < y < L$; $\sigma_{S1\ inf} = -\ \varepsilon\ \frac{1}{2d}\cdot V_0 = -8{,}85\ \frac{\mu C}{m^2}$; $\vec{E}_1(x = d) = \frac{1}{2\ d}\ V_0\cdot\vec{u}_x = 5\cdot 10^5\cdot\vec{u}_x\left[\frac{V}{m}\right]$

$\forall\ L < y < L + a$; $\sigma_{S\ inf} = 0\ \frac{C}{m^2}$; $\vec{E}(x = d) = 0\cdot\vec{u}_x\left[\frac{V}{m}\right]$

$\forall\ L + a < y < 2L + a$; $\sigma_{S2\ inf} = \varepsilon\ \frac{1}{2\ d}\ V_0 = 8{,}85\ \frac{\mu C}{m^2}$; $\vec{E}_2(x = d) = \frac{1}{2\ d}\cdot V_0\cdot(-\vec{u}_x) = 5\cdot 10^5\cdot(-\vec{u}_x)\left[\frac{V}{m}\right]$

c) $w_1 = w_2 = \frac{V_0^2}{8}\varepsilon\frac{1}{d^2} = 2{,}12\ \frac{J}{m^3}$; $W_E = \frac{1}{4}\cdot\varepsilon\cdot\frac{L^2}{d}\cdot V_0^2 = 44{,}25\ \mu J$

-- Problema **13**, [Serrano V., García G., Gutiérrez C. "Electricidad y Magnetismo. Estrategias para la resolución de problemas y aplicaciones", 1ª Edición, Pearson Educación, México 2001, Cap. 4, Pb 60r]. Resultado:

$$W_v = \frac{5{,}6\cdot E_{MAXV}^2}{E_{MAXa}^2}\cdot W_a = 121{,}95\cdot W_a$$

-- Problema **14**, Resultado: $W_E = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot R\cdot V^2$ $[J]$

-- Problema **15**, Resultado: $\Delta W_E = W_{E\ final} - W_{E\ inicial} = \frac{1}{8\ \pi}q^2\cdot\left\{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0\ \varepsilon}\right\}\left\{\frac{\delta}{R(R + \delta)}\right\}$ $[J]$; el incremento de la energía es negativo, lo que implica que el trabajo para depositar la capa de dieléctrico lo ha realizado el campo eléctrico asociado a la carga q, y no el agente exterior.

-- Problema **16**, Resultado: $W_E = \frac{Q^2}{8\ \pi\ \varepsilon_0\ R_3} + \frac{Q^2}{2\ \pi\ \varepsilon}\frac{(R_2 - R_1)}{R_1\ R_2}$ $[J]$

-- Problema **17**[e], Examen 2º Parcial, Curso 1999 – 00, 15-6/00. Resultado:

a) ${}^{II}W_T = \frac{q_{1+}^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{H} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} = 1{,}85 \cdot 10^{-3}\ J < {}^{I}W_T$; al conectar el cilindro exterior a tierra, desaparece la carga en la superficie exterior del cilindro exterior, quedando el vector $\vec{E}$ limitado al espacio hueco entre los dos cilindros

b) ${}^{III}W_T = \frac{q_{1+}^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{H} \cdot \ln \frac{R_4}{R_1} = 1{,}17 \cdot 10^{-3}\ J < {}^{II}W_T$; el cambio en la energia electrica del sistema al pasar del estado II al III se debe, en este caso, a un trabajo mecanico. Al ser la energia final menor que la inicial, el trabajo lo habra realizado el sistema electrico, siendo su valor el incremento de la energia cambiado de signo.

$\Delta W_T = {}^{III}W_T - {}^{II}W_T = -\ 6{,}48 \cdot 10^{-4}\ J \Rightarrow$ Trabajo mecanico $= 6{,}48 \cdot 10^{-4}\ J$

[r]: problema resuelto.
[e]: problema o cuestión propuesto en examen.