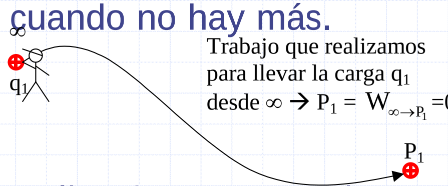
Joaquín Mur Amada

Tema 4:
Energía electrostática

Tema 4 - Índice.

1- Energía electrostática de cargas puntuales

- Partimos de que tenemos las cargas puntuales ya creadas (en esta sección no contabilizo el trabajo que cuesta "fabricar" esa carga puntual).
- Trabajo para situar una carga q_1 en un punto en el espacio P_1 cuando no hay más.



Trabajo que realizamos para llevar la carga q_1 desde $\infty \rightarrow P_1 = W_{\infty\rightarrow P_1} = 0$

- Puesto que sólo existe una carga, la carga no sufre ninguna fuerza

  → No hay campo externo que actúe sobre la carga.
- Colocar la primera carga nos sale "gratis".

1.1. Sistema de dos cargas

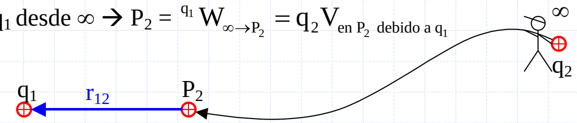
- Inicialmente tenemos q_2 en un punto muy distante.
- Trabajo que un agente exterior debe realizar para situar q_2 en presencia de q_1 en el punto P_2.

$$W_{\infty\rightarrow P_2} = \begin{array}{c}\text{trabajo que cuesta llevar a } q_2 \text{ desde } \infty \rightarrow P_2 \\ \text{(es debido sólo a la presencia de } q_1\text{)}\end{array} = {}^{q_1}W_{\infty\rightarrow P_2}$$

$$V_2 = \frac{\text{potencial del punto } P_2}{\text{debido sólo a la carga } q_1} = \frac{{}^{q_1}W_{\infty\rightarrow P_2}}{q_2} \underset{\substack{\uparrow \\ q_1 \text{ carga puntual}}}{=} k\frac{q_1}{\text{distancia}} = k\frac{q_1}{|\vec{r}_{21}|}$$

$$\Rightarrow {}^{q_1}W_{\infty\rightarrow P_2} = q_2 k \frac{q_1}{|\vec{r}_{21}|}$$

Trabajo que realizamos para llevar la carga q_2 en presencia de q_1 desde $\infty \rightarrow P_2 = {}^{q_1}W_{\infty\rightarrow P_2} = q_2 V_{\text{en } P_2 \text{ debido a } q_1}$



Forma elegante de expresar la energía de un sistema de dos carga

- Trabajo total para crear el sistema de las cargas puntuales q_1 y q_2

$$W_E = 0 + {}^{q1}W_{\infty \to P_2} = q_2 k \frac{q_1}{|\vec{r}_{21}|} = q_1 k \frac{q_2}{|\vec{r}_{21}|} = \frac{1}{2}\left(q_2 k \frac{q_1}{|\vec{r}_{21}|} + q_1 k \frac{q_2}{|\vec{r}_{21}|} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q_2 V_{\substack{\text{creado sólo} \\ \text{por q1 en P2}}} + q_1 V_{\substack{\text{creado sólo} \\ \text{por q2 en P1}}} \right) = \frac{1}{2}\left(q_2\, {}^{q_1}V_2 + q_1\, {}^{q_2}V_1 \right)$$

- Trabajo que realizamos nosotros (un agente exterior al campo eléctrico).
- ${}^{q1}V_2$ = trabajo que tenemos que realizar para trasladar 1 C desde el ∞ hasta el punto que ocupará q_2 en presencia únicamente de la carga q_1

Observaciones

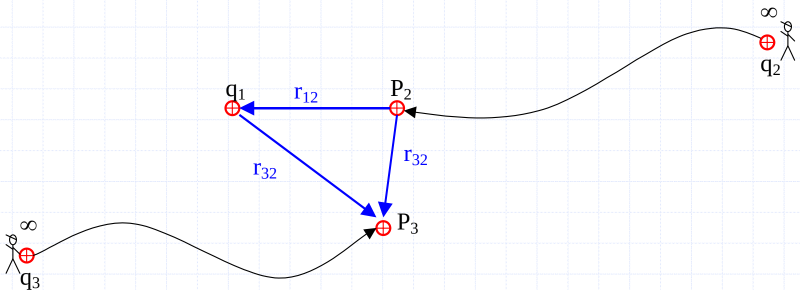
- El orden en que se traigan las cargas q_1 y q_2 no afecta a la energía eléctrica del sistema W_E
- Tampoco afecta el *camino* seguido para trasladarlas (por ser el campo eléctrico conservativo) ➔ trasladamos todas las cargas de forma *reversible* desde el ∞ hasta su posición final.
- W_E es debida a la energía potencial eléctrica.
- W_E es la facultad que tiene el sistema de producir movimiento (transformarse a energía cinética) a causa de la posición relativa de las cargas.
- Sistema conservativo → $W_{total} = W_E + W_{cinética}$
- Como el campo $\vec{E}$ es conservativo, W_E es igual al trabajo necesario contra el campo $\vec{E}$ (el que realizamos nosotros, agentes externos al campo $\vec{E}$) para llevar las cargas a sus posiciones en el sistema.

1.2. Sistema de tres cargas

- W_{total} = trabajo que realizamos para crear el sistema de tres cargas puntuales.

$q_1 \;\to\; W_1 = 0$ J = no necesito realizar trabajo

$$q_2 \;\to W_2 = \frac{1}{2}\left(q_2 V_{\substack{\text{creado sólo} \\ \text{por q1 en P2}}} + q_1 V_{\substack{\text{creado sólo} \\ \text{por q2 en P1}}} \right) = \frac{1}{2}\left(q_2\, {}^{q_1}V_2 + q_1\, {}^{q_2}V_1 \right)$$



Trabajo que realizamos para situar q_3 en su posición final en presencia de q_1 y q_2

$$q3 \;\to\; W_3 \;\to\; \begin{matrix}\text{aplicamos el principio de superposición:} \\ \text{(conocemos la energía de un par de cargas)}\end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^{q_1}W_3 \\ {}^{q_2}W_3 \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} {}^{q_1}W_3 = \frac{1}{2}\left(q_1\, {}^{q_3}V_1 + q_3\, {}^{q_1}V_3 \right) \\ {}^{q_2}W_3 = \frac{1}{2}\left(q_2\, {}^{q_3}V_2 + q_3\, {}^{q_2}V_3 \right) \end{matrix}\right\} W_3 = {}^{q_1}W_3 + {}^{q_2}W_3$$

$$W_E = \cancel{W_1} + W_2 + W_3 = \frac{1}{2}\left(q_2\, {}^{q_1}V_2 + q_1\, {}^{q_2}V_1 \right) + \frac{1}{2}\left(q_1\, {}^{q_3}V_1 + q_3\, {}^{q_1}V_3 \right) + \frac{1}{2}\left(q_2\, {}^{q_3}V_2 + q_3\, {}^{q_2}V_3 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[q_1 \left({}^{q_2}V_1 + {}^{q_3}V_1 \right) + q_2 \left({}^{q_1}V_2 + {}^{q_3}V_2 \right) + q_3 \left({}^{q_1}V_3 + {}^{q_2}V_3 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[q_1 V_{\substack{\text{en P1 creado por todas} \\ \text{las cargas menos } q_1}} + q_2 V_{\substack{\text{en P2 creado por todas} \\ \text{las cargas menos } q_2}} + q_3 V_{\substack{\text{en P3 creado por todas} \\ \text{las cargas menos } q_3}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[q_1 V_{T1} + q_2 V_{T2} + q_3 V_{T3} \right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i V_{Ti}$$

Generalización para un número de cargas N

- W_E = trabajo que realizamos para crear el sistema de N cargas puntuales, trasladando de forma *reversible* todas las cargas desde el ∞ hasta la posición final que ocupan en el espacio.

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_{Ti}$$

V_{Ti} = potencial puntual (referencia ∞) del punto que ocupa la carga q_i debido a todas las cargas (menos ella misma, puesto que la distancia de q_i a sí misma no tiene sentido).

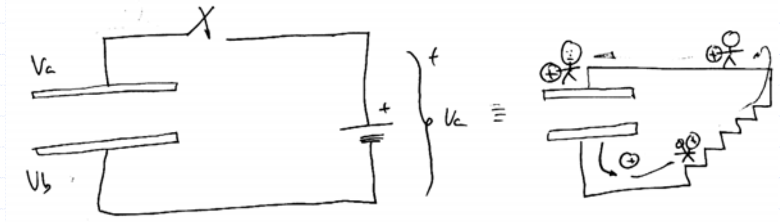
$$V_{Ti} = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} {}^{q_j} V_{Ti}$$

- En caso de tener la carga distribuida en un volumen o superficie, el sumatorio se convertiría en una integral y en vez de cargas puntuales tendríamos dq.

2. Energía electrostática almacenada en un condensador

- Cuando se carga un condensador, la fuente de alimentación realiza un trabajo para transportar las cargas de una placa a la otra, elevando la energía potencial de éstas. Éste aumento de energía de las cargas constituye la energía potencial almacenada en el condensador. circuito carga cond

http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/rc/rc_s.htm



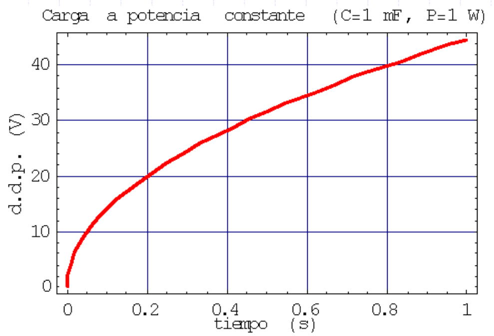
- Inicialmente, cuando el condensador está descargado, no le cuesta energía mover la primera carga.

Vídeo carga condensador

Extracto tomado de "El universo magnético y más allá".

Carga de un condensador a través de una fuente con potencia limitada

- Inicialmente, cuando el condensador está descargado, no le cuesta energía mover la primera carga.
- Conforme se va cargando el condensador, el potencial está más alto y por lo tanto, para llevar una carga + del electrodo – al + le va costando más energía.



- Símil de un obrero que va construyendo una pared: los primeros ladrillos que pone en el suelo no le suponen gasto energético porque no los tiene que levantar. Conforme aumenta la altura del muro, tiene que gastar más energía en levantar los ladrillos.

2.1. Deducción de la energía acumulada en el condensador (en función de su carga)

- Energía acumulada en el condensador = suma del trabajo necesario para trasladar cada carga q_+ desde el terminal inferior V_b o V_- al terminal o electrodo superior V_a o V_+
- dW = trabajo que realizamos para transladar dq desde $V_b \rightarrow V_a$ en un instante.

→ $dW = dq\,(V_a - V_b)$

- La d.d.p. en el condensador varía en función de la carga que vamos almacenando: $V_a - V_b = q / C$

→ $dW = q\,C^{-1}\,dq$

- Suma → se convierte en integral al trabajar con diferenciales

$$W_E = \int dW = \int \frac{q}{C}\,dq = \int_{\text{Cond.descargado } q=0}^{\text{Condensador cargado } q=Q} \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Energía necesaria para separar cargas + y - = energía necesaria para almacenar un par de cargas Q_+ y Q_- en un condensador

http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/electrostatics/vdgdischarge/vdgdischarge.htm

Fórmulas equivalentes de la energía acumulada en el condensador

- Nota: por comodidad emplearé simplemente V para denotar V_a-V_b, la d.d.p. entre las placas del condensador.

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \underset{C=\frac{Q}{V}}{\uparrow}{=} \frac{1}{2}Q\,V \underset{C=\frac{Q}{V}}{\uparrow}{=} \frac{1}{2}C\,V^2$$

- Fórmula recomendada para condensadores NO aislados (conectados a una fuente, V = cte)

$$W_E = \frac{1}{2}C\,V^2$$

- Fórmula recomendada para condensadores AISLADOS (Q = cte)

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Ejemplo: condensador plano con placas de área S, distancia entre ellas d e inicialmente vacío.

- Se conecta a una fuente de alimentación a una d.d.p. V

a) Calcular la energía electrostática.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \Rightarrow \quad W_E = \frac{1}{2} C_0 V^2 = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2d} = W_{\text{Vacío}}$$

b) Si se mantiene conectado a la fuente (la d.d.p. es cte.) y se introduce entre las placas un material de permitividad ε, calcular la nueva energía electrostática.

$$C_\varepsilon = \frac{\varepsilon S}{d} \quad \Rightarrow \quad W_E = \frac{1}{2} C_\varepsilon V^2 = \frac{\varepsilon V^2 S}{2d} > W_{\text{Vacío}}$$

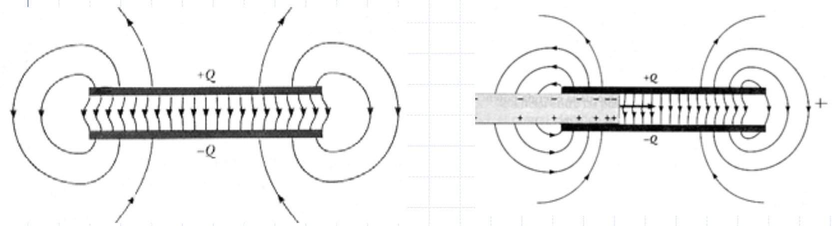
c) Si en el apartado a) se aísla el condensador y luego se introduce el material de permitividad ε, calcula la energía

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_\varepsilon} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon S} \underset{Q=C_0V}{=} \frac{C_0^2 V^2 d}{2\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2d} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} W_{\text{Vacío}} < W_{\text{Vacío}}$$

Ejemplo: condensador plano con placas de área S, distancia entre ellas d e inicialmente vacío.

d) ¿quién aporta el trabajo necesario para el cambio de energía electrostática en los casos b) y c) respecto de la situación inicial a)?

a) Condensador vacío | c) Introducimos el dieléctrico a Q=cte



b) La fuente mantiene la ddp constante → para que no disminuya la ddp al introducir el dieléctrico, aumenta la carga.

c) El dieléctrico se ve atraído al introducirlo → la ddp entre electrodos disminuye ya que las placas están aisladas (Q=cte)

2.2. Deducción de la energía acumulada en el condensador (en función del $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en su interior)

- Deduciremos la energía potencial eléctrica W_E para un condensador plano, pero el resultado será aplicable a cualquier condensador.

$$V = E\,d; \qquad C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$W_E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{\cancel{d}} E^2 d^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S d = \frac{1}{2}(\varepsilon E) E \,\text{Volumen}$$

$$W_E = \frac{1}{2} D E \tau \qquad (\tau = \text{volumen entre placas})$$

En general, cuando tenemos un sistema donde $E \neq$ cte o $D \neq$ cte, debemos utilizar una integral de volumen:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{donde } E\neq 0}} \vec{D}\,\vec{E}\,d\tau \qquad \left(\begin{array}{c}\text{expresión válida para cualquier}\\ \text{sistema, sea o no condensador}\end{array}\right)$$

2.3. Densidad de energía electrostática asociada a un campo eléctrico

- Hemos visto una expresión para calcular la energía almacenada en un volumen de dieléctrico

Si E y D son constantes en un dieléctrico	Si $E \neq$ cte o $D \neq$ cte (fórmula general)
$W_E = \frac{1}{2} D E \tau$	$W_E = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{donde } E\neq 0}} \vec{D}\,\vec{E}\,d\tau$

- A partir de la expresión anterior puedo definir la densidad de energía o energía por unidad de volumen que puede asociarse a un punto del espacio

$$w_E = \text{densidad de energía electrostática} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{W_E}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}\vec{D}\,\vec{E}$$

- Notación:
  - W (mayúscula): energía total del sistema
  - w (minúscula): energía por unidad de volumen, propiedad puntual
  - τ (letra griega tau): volumen (se utiliza τ para no confundirlo con V)

Observaciones sobre la densidad de energía electrostática asociada a un campo eléctrico

- La densidad de energía revoluciona el concepto de energía visto hasta ahora, que asociaba la energía a las cargas y al potencial en el punto donde se ubicaban.
- Ahora asociamos la energía a puntos del espacio con $\vec{D}$ y $\vec{E}$ no nulos, en los que puede haber o no cargas. Para obtener la energía total de sistema hay que integrar la densidad de energía al volumen donde sea no nula.

$$W_E = \int_{\substack{\text{volumen} \\ \text{donde } E \neq 0}} w_E \, d\tau$$

- Para condensadores planos, D y E son constante en el dieléctrico, por lo que obtenemos la fórmula del apdo. 2.2

$$W_E = \int_{\substack{\text{volumen} \\ \text{donde } E \neq 0}} w_E \, d\tau \underset{\substack{w_E = \text{cte en} \\ \text{el dieléctrico}}}{=} w_E \int_{\text{dielec}} d\tau = w_E \, \tau_{\text{dielec}} = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E} \, \tau_{\text{dieléctrico}}$$

Más observaciones...

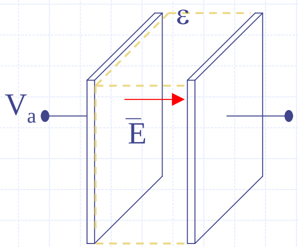
- La densidad de energía también tiene la ventaja de permitir el cálculo de energías acumuladas en regiones del espacio sin tener que conocer la distribución de las cargas que crean el campo.
- La capacidad se puede calcular a través de la energía almacenada en un condensador.
- Cuando $\vec{E} \neq 0$, existe densidad de energía > 0

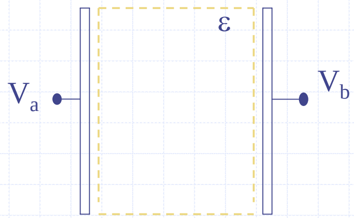
→ Si queremos crear un $\vec{E}$ en una región del espacio, necesitaremos energía.

→ Crear un campo eléctrico cuesta energía. Por ejemplo, si utilizamos una antena para crear un campo eléctrico (p. ej. teléfono móvil), tendremos que aportar energía (de la batería).

3- Campos eléctricos variables sobre materiales dieléctricos

- ¿Cómo creamos un campo variable?
  - El caso más sencillo: un condensador que lo tenemos conectado a una fuente de alterna





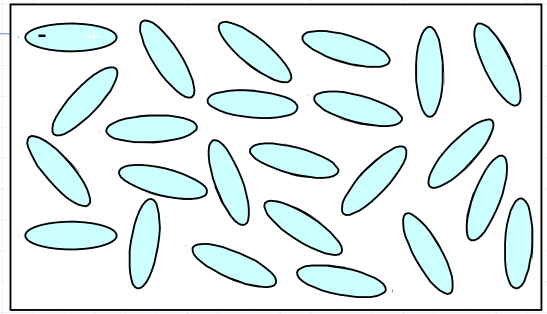
  - Cables con señal alterna.
  - Cargas moviéndose (por ejemplo, en una antena)

http://webphysics.davidson.edu/Applets/Retard/Retard.html

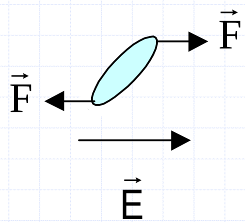
http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/electromagnetic/index.html

http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/polarizedlight/emwave/index.html

Modelo dipolar para un dieléctrico polar

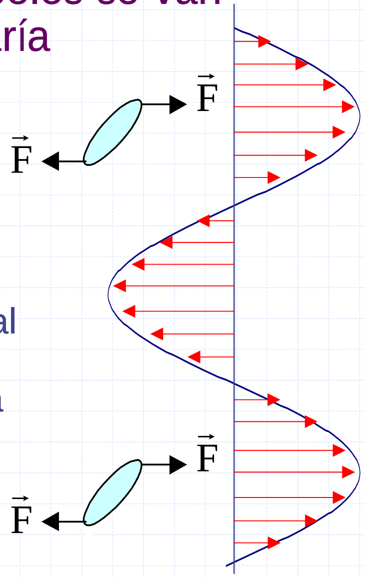


- Efecto de un campo eléctrico sobre un dipolo

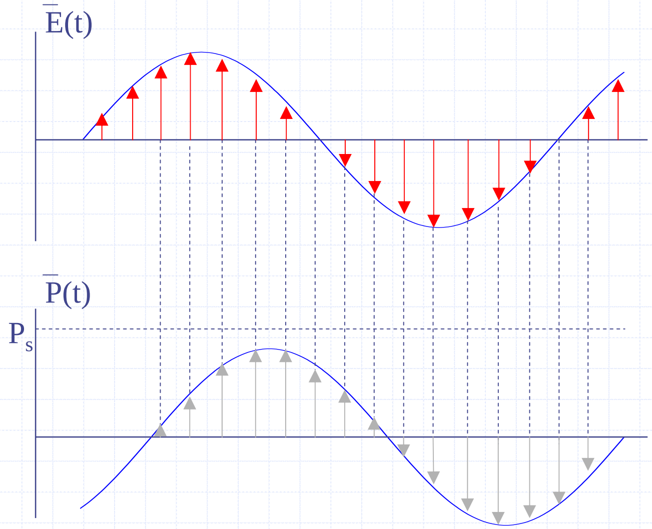


Consecuencia: los dipolos se van alineando según $\vec{E}$ varía

- Si variamos muy rápidamente $\vec{E}$, no da tiempo a que su polarización siga a $\vec{E}$.
  - → Puede aparecer una especie de "rozamiento" al orientarse y parte de la energía eléctrica se disipa en calor.
  - → Este efecto es más importante a algunas frecuencias.



Desfase entre el vector polarización $\vec{P}$ y el vector campo eléctrico $\vec{E}$



Descripción matemática del desfase entre $\vec{E}$ y $\vec{P}$: Permitividad dieléctrica compleja

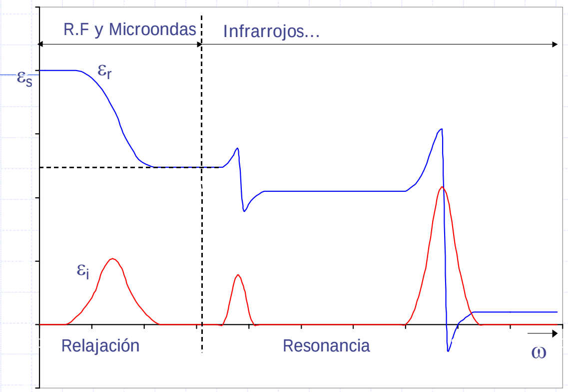
- De la misma forma que en circuitos de corriente alterna se utiliza las impedancias complejas para representar el desfase entre tensión V(t) e intensidad I(t), en electromagnetismo se utiliza la permitividad compleja ε^* para representar el desfase entre D(t) y E(t):

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_r(\omega) - j \cdot \varepsilon_i(\omega)$$

$$\text{donde} \begin{cases} \varepsilon_r(\omega) \equiv \text{componente real de } \varepsilon^*(\omega) \\ \varepsilon_i(\omega) \equiv \text{componente imaginaria de } \varepsilon^*(\omega) \end{cases}$$

- ε_r produce los efectos que hemos estudiado hasta ahora (polarización proporcional al campo eléctrico).
- ε_i tiene que ver con el desfase de D(t) respecto E(t) y crea, como consecuencia, un calentamiento en el dieléctrico debido a que el dieléctrico, al ser sometido a un campo de cierta frecuencia, no es capaz de orientarse a la vez que varía el campo E.

Representación de ε_r y ε_i frente a la frecuencia



- Para campos que varían lentamente, tiene el valor que utilizamos en clase.
- Para campos que varían muy rápidos, la permitividad tiende a valer lo mismo que la del vacío
- En algunas frecuencias, el material sufre un proceso por el cual absorbe energía en forma de calor y la permitividad tiene parte compleja

Potencia absorbida por unidad de volumen en un dieléctrico

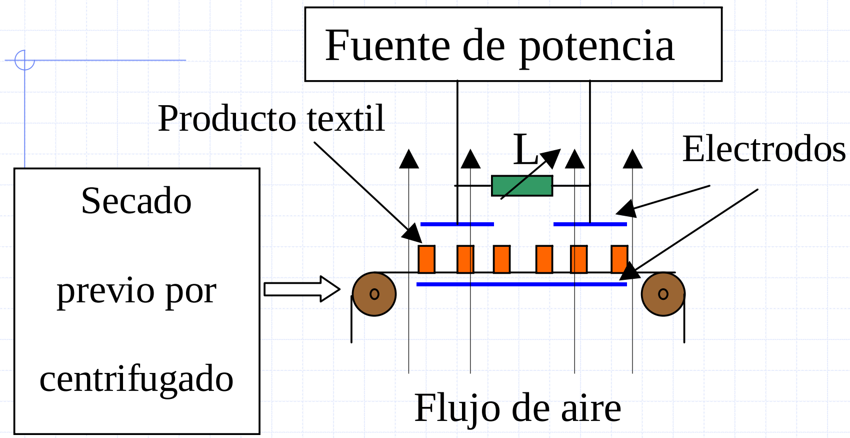
- La densidad volúmica de potencia absorbida es proporcional a la **frecuencia**, a la parte imaginaria de la permitividad del dieléctrico para esa frecuencia, $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ **,** y a la amplitud del **campo eléctrico** aplicado **al cuadrado**

$$p = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \omega \cdot \varepsilon_i(\omega)$$

Ventajas del calentamiento por campos eléctricos

- Calentamiento volumétrico, con densidades de potencia muy elevadas concentradas en la zona de procesamiento.
- Calentamiento selectivo.
- Calentamiento uniforme y más rápido.
- Ambiente limpio, libre de productos de combustión. Comparación Microondas vs. R.F
- Con R.F. No hay problemas de penetración
- Los sistemas de R.F. Presentan mayores problemas en cuanto a generación de armónicos.
- Los sistemas de RF son más problemáticos frente a la aparición de arcos por utilizar campos mayores

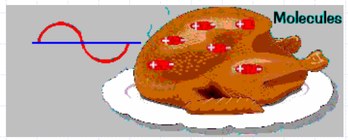
Secado industrial de textiles



Ventaja: **Ahorro de energía 60 %**

Dato: Unidades de secado de **60 kW 13,5 MHz** secan 1500 pares de tirantes/h, tras el proceso de tinte

Hornos de microondas

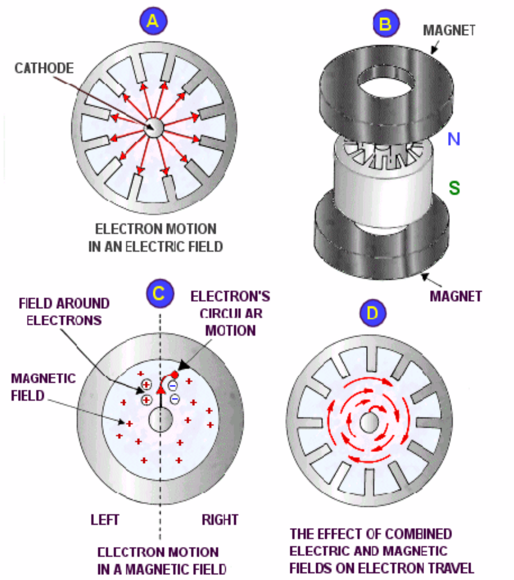


Dibujos extraídos de http:\www:gallawa.com/microtech

- El generador de microondas es un magnetrón
- Las paredes metálicas del horno forman una cavidad resonante.
- No deben introducirse objetos metálicos indiscriminadamente.
- Los recipientes para microondas son un ejemplo práctico de aplicación del calentamiento selectivo
- **Frecuencia de trabajo típica**: 2,5 GHz
- **Potencia** ≈ 1kW

Hornos de Microondas. El Magnetrón

Cortesía
J. Carlton Gallawa:
http://www.gallawa.com/microtech/magnetron.html



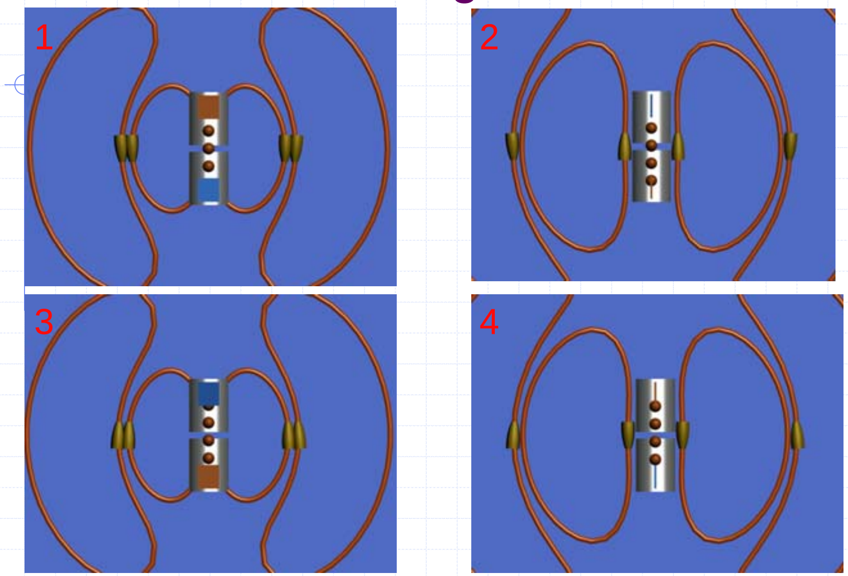
Generación de campos electromagnéticos de alta frecuencia

- Las antenas se utilizan para generar (y también, para detectar) campos electromagnéticos en aplicaciones de telecomunicaciones.
- Las cargas se mueven en una antena → el campo eléctrico dependerá de la posición de las cargas en cada instante.
- Corriente eléctrica = cargas en movimiento → hay una corriente por la antena.
- Corriente eléctrica → se genera un campo magnético
- Los campos eléctrico y magnético se propagan en el espacio a la velocidad de la luz…

Vídeo dipolo oscilante
(~ antena ½ onda)

http://web.mit.edu/jbelcher/www/anim.htm

Acumulación de carga en antena ¼λ



Q máxima, I mínima

Q mínima, I máxima

Vista de las líneas de E generadas por una antena

http://web.mit.edu/jbelcher/www/anim.htm

Travelling: Líneas 3D de E generadas en el espacio por una antena en un instante determinado

http://web.mit.edu/jbelcher/www/anim.htm

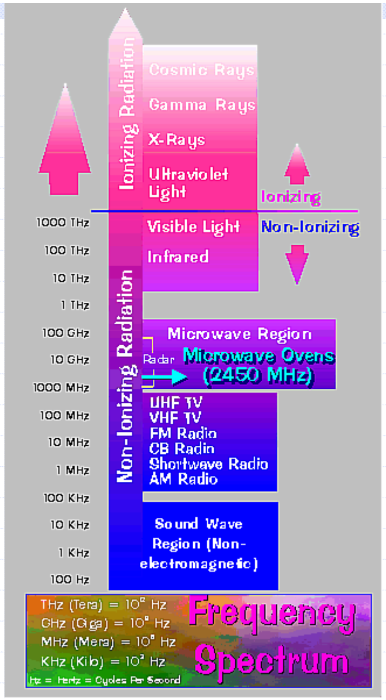
Campo emitido por una antena tipo dipolo en el espacio

http://web.mit.edu/jbelcher/www/anim.htm

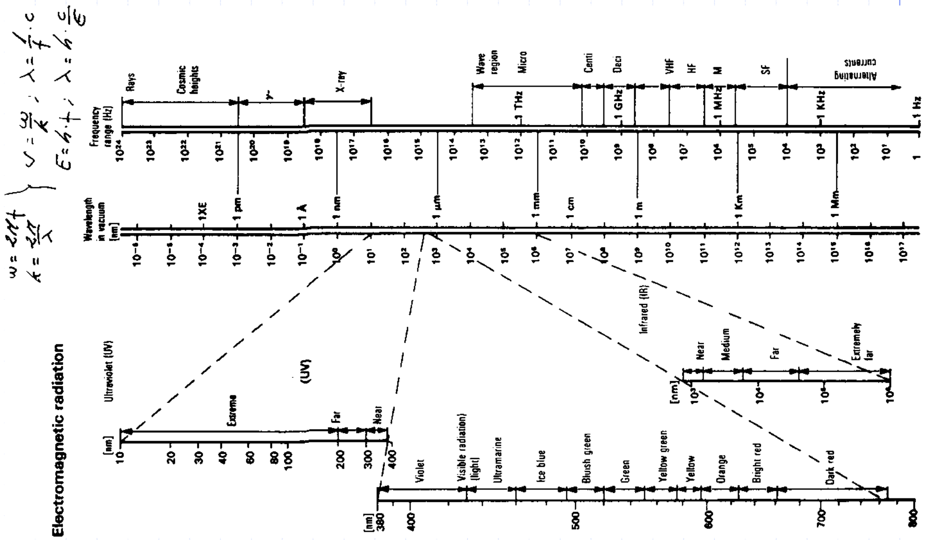
Onda electromagnética

http://web.mit.edu/jbelcher/www/anim.htm

Espectro electromagnético de frecuencias



Espectro electromagnético de frecuencias



Enlaces a animaciones

- Carga constante en movimiento:
  http://webphysics.davidson.edu/Applets/Retard/Retard.html
- Ver una onda electromagnética propagándose
  http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/index.html
  http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/electromagnetic/index.html
  webphysics.davidson.edu/physletprob/northpark/EMWaveLWM.html
  http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/waveType/waveType.html
  http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/emWave/emWave.html
- Principio básico del funcionamiento de la radio
  http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/radiowavetuner/index.html
- Movimiento de una partícula en un campo electromagnético uniforme
  http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- Campo eléctrico y magnético dentro de un condensador:
  http://webphysics.davidson.edu/physletprob/ch9_problems/ch9_8_emwave/emwave9_8_2.html

Resumen

- Un campo variable sobre un dieléctrico produce absorción de energía en el mismo
- El tratamiento matemático de este fenómeno se simplifica si se utiliza notación compleja
- La densidad volúmica de potencia absorbida es proporcional a la **frecuencia**, a la ε_i del dieléctrico para esa frecuencia y a la amplitud del **campo eléctrico** aplicado **al cuadrado**
- Este tipo de calentamiento tiene algunas ventajas respecto a otras técnicas clásicas
- Este fenómeno tiene aplicaciones en diversos procesos industriales