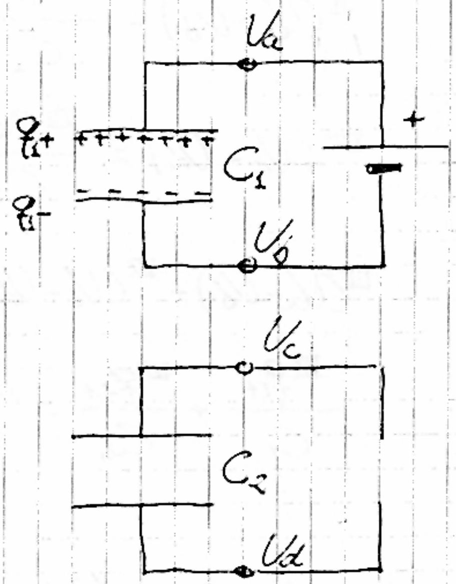
Problemas resueltos del tema 2

PROBLEMA 3

ESTADO I



$^{I}(V_a - V_b) = 800\ V$

$C_1 = 4\mu F = 4 \cdot 10^{-6} F$

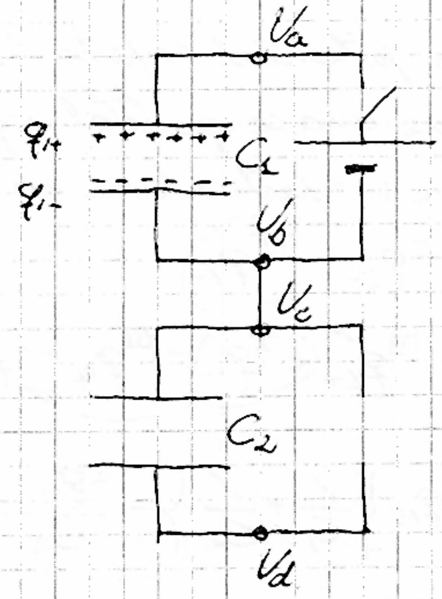
$^{I}q_{1+} = {}^{I}(V_a - V_b) \cdot C_1 = 3{,}2\ mC$

$^{I}(V_c - V_d) = {}^{I}q_{2+} / C_2 = 0\ V$

$C_2 = 6\mu F = 6 \cdot 10^{-6} F$

$^{I}q_{2+} = 0\ C$ (descargado)

ESTADO II



$^{II}q_{1+} = {}^{I}q_{1+} = 3{,}2\ mC$

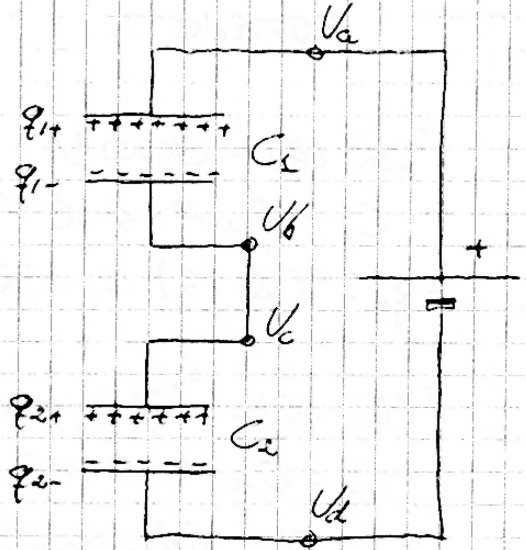
$^{I}(V_a - V_b) = {}^{II}(V_a - V_b) = 800\ V$

$^{II}q_{2+} = {}^{I}q_{2+} = 0\ C$

$^{II}(V_c - V_d) = {}^{I}(V_c - V_d) = 0\ V$

Las cargas $^{I}q_{1+}$ y $^{I}q_{1-}$ permanecen fijas en los electrodos del condensador C_1, el condensador C_2 continúa descargado y, por lo tanto, su diferencia de potencial $^{II}(V_c - V_d) = 0\ V$

ESTADO III



$$^{III}(V_a - V_b) = \frac{^{III}q_{1+}}{C_1}$$

$$^{III}(V_c - V_d) = \frac{^{III}q_{2+}}{C_2}$$

$$^{III}(V_a - V_b) + {}^{III}(V_c - V_d) = 800\ V$$

$$\frac{^{III}q_{1+}}{C_1} + \frac{^{III}q_{2+}}{C_2} = 800\ V\ (*)$$

El electrodo negativo del condensador C_1 está ahora unido al electrodo positivo del condensador C_2, formando un único conductor cuyo potencial respecto de V_d es $V_b = V_c$. Este conductor tiene una carga total negativa igual a $^{I}q_- = -3,2\ mC$, que se reparte ahora en dos

$$^{I}q_{1-} = {}^{III}q_{1-} + {}^{III}q_{2+} \Rightarrow {}^{III}q_{2+} = {}^{I}q_{1-} - {}^{III}q_{1-}$$

$$^{III}q_{2+} = {}^{III}q_{1+} + {}^{I}q_{1-} = {}^{III}q_{1+} - {}^{I}q_{1+}$$

$$(*)\quad \frac{^{III}q_{1+}}{C_1} + \frac{1}{C_2}\left\{ {}^{III}q_{1+} - {}^{I}q_{1+} \right\} = {}^{III}q_{1+}\left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right\} - \frac{^{I}q_{1+}}{C_2} = 800$$

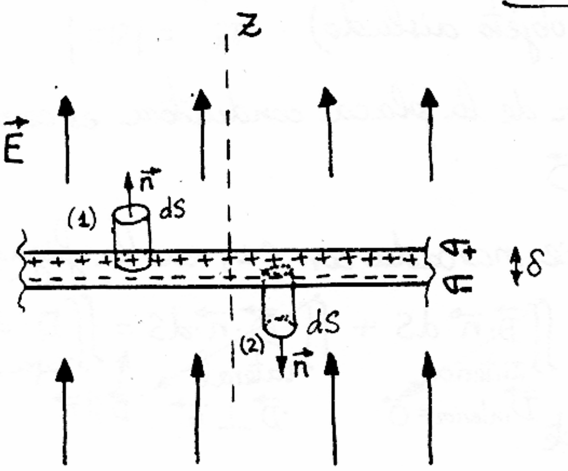
$$^{III}q_{1+}\left\{ \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2} \right\} = 800 + \frac{^{I}q_{1+}}{C_2}\ ;\quad {}^{III}q_{1+} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{24 \cdot 10^{-12}} = 800 + \frac{^{I}q_{1+}}{C_2}$$

$$^{III}q_{1+} \cdot 416,66 \cdot 10^{3} = 800 + \frac{3,2 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-6}} = 1333,33$$

$$^{III}q_{1+} = 3,2 \cdot 10^{-3}\ C = {}^{I}q_{1+} \Rightarrow {}^{III}(V_a - V_b) = {}^{I}(V_a - V_b) = 800\ V$$

$$^{III}q_{2+} = 0\ C = {}^{I}q_{2+} \Rightarrow {}^{III}(V_c - V_d) = {}^{I}(V_c - V_d) = 0\ V$$

PROBLEMA 10



Datos:

lámina conductora plana cuadrada de lado $L = 50\,cm$ y espesor despreciable δ, aislada y descargada inicialmente (por tanto la carga total de la placa permanecerá constante e igual a 0 C).

Campo externo (creado por fuentes ajenas a la placa) $\vec{E} = 8 \cdot 10^4 \, \vec{u_z} \left[\frac{N}{C}\right]$

Solución: Aunque el enunciado dice que el espesor de la lámina es despreciable, la dibujo con cierto grosor para poder distinguir entre la carga que se acumula en la cara superior de la lámina y en la inferior.

Al introducir la placa en el seno de un campo eléctrico exterior, las cargas del conductor se reordenarán hasta conseguir que se anule el campo eléctrico en el interior de la placa (propiedad de los conductores en equilibrio electrostático).

Así, en la cara superior de la lámina aparecerá carga positiva uniformemente distribuida σ_+ (despreciamos el efecto de la dimensión no infinita de la placa ya que nos dicen en el enunciado que no consideremos el efecto de curvatura en los bordes y por si queda alguna duda nos dicen que $\delta \ll L$).

Análogamente, en la cara inferior aparece una densidad de carga negativa σ_-, que también será constante a lo largo de la superficie por la simetría del plano y porque el campo exterior no varía con la posición.

Como la placa debe seguir neutra como al principio (por la conservación de la carga en un objeto aislado) $\sigma_+ = |\sigma_-|$

Dado que el campo en el interior de la placa conductora es cero

$\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{D}_{int} = \varepsilon \cdot \vec{E}_{int} = \vec{0}$

Aplicamos Gauss a la superficie marcada con (1) en la figura:

$$\Phi_D = \oint\!\!\!\oint \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS = \iint_{\text{Tapa superior}} \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{Interior}} \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS}}_{\vec{D}_{interior}=\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{lateral}} \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS}}_{\vec{D}\perp\vec{n}} \underset{\vec{D}\parallel\vec{n}}{=} \iint_{\text{Tapa sup.}} D\cdot dS$$

Dado que en la tapa superior $|\vec{D}| = cte$.

$$\Phi_D = D\cdot S_{tapa}$$

Por otra parte, la carga real encerrada por la superficie escogida es:

$$Q_{\text{real encerrada}} = \iint_{\text{sup. encerrada}} \sigma_+ \cdot dS \underset{\sigma_+ = cte \text{ (por simetría)}}{=} \sigma_+ \cdot S_{tapa}$$

Igualamos los dos términos y despejamos:

$$D = \sigma_+ \Rightarrow \boxed{\sigma_+ = \varepsilon_0 E = 708 \ \frac{nC}{m^2}}$$

Repitiendo el proceso para la superficie gausiana (2) tengo

$$\Phi_D = \underbrace{\cancel{\iint_{\text{tapa interior}} \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS}}_{\vec{D}=\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{lateral}} \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS}}_{\vec{D}\perp\vec{n}} + \iint_{\text{tapa inferior}} \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS \underset{\substack{|\vec{D}|=cte \\ \vec{D} \text{ opuesto a } \vec{n}}}{=} D\cdot S_{tapa}\cdot\cos(\pi \, rad) = -D\cdot S_{tapa}$$

$$Q_{\text{real encerrada}} = \sigma_- \cdot S_{tapa} \Rightarrow \sigma_- \cdot \cancel{S_{tapa}} = -\varepsilon_0 E \cdot \cancel{S_{tapa}}$$

Luego $\boxed{\sigma_- = -\varepsilon_0 E = -708 \ nC/m^2}$

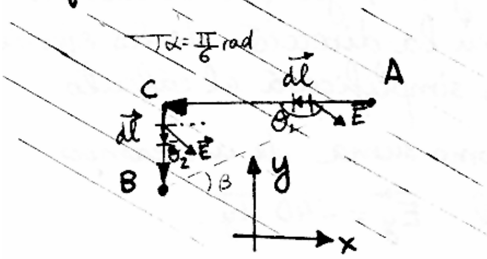
Las cargas totales en las superficies del conductor resultan evidentes de lo anterior

$$Q_{\text{cara superior}} \overset{\sigma_+ = cte}{=} \sigma_+ \cdot S_{placa} = \sigma_+ \cdot L^2 = 177 \ nC = Q_+$$

$$Q_{\text{cara inferior}} \overset{\sigma_- = cte}{=} \sigma_- \cdot S_{placa} = \sigma_- \cdot L^2 = -177 \ nC = Q_-$$

PROBLEMA 14

Para resolver este problema aprovecharé la circunstancia de que el campo $\vec{E}$ es conservativo y por tanto la ddp entre dos puntos sólo depende de la posición de los puntos pero no del camino seguido del inicial al final.



Así, iré primero de A → C y luego de C → B

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} =$$

$$= -\int_A^C E\cos\theta_1\, dl - \int_C^B E\cos\theta_2\, dl \underset{*}{=} \quad \begin{matrix}\cos\theta_1 = -\cos\alpha \\ \cos\theta_2 = \text{sen}\,\alpha\end{matrix}$$

$$= \int_A^C E\cos\alpha\, dl - \int_C^B E\,\text{sen}\,\alpha\, dl =$$

$$= \int_{x=0'02}^{x=-0'01} E\cdot\cos\alpha\,(-dx) - \int_{y=0'02}^{y=0'01} E\cdot\text{sen}\,\alpha\,(-dy) \underset{\substack{\uparrow \\ E \text{ y } \alpha \\ \text{son ctes}}}{=} -E\cdot\cos\alpha\cdot(-0'03) + E\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot(0'01)$$

$dl = -dx$ porque x decrece $dl = -dy$ porque y decrece

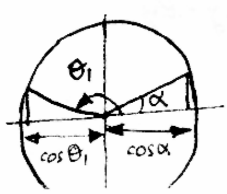
$$= 15'56\text{ V} - 3\text{ V} = \boxed{12'56\text{ V} = V_B - V_A}$$

Podemos comprobar este resultado calculando $V_B - V_A$ a través de la línea recta que une ambos puntos. La distancia entre A y B en línea recta es $d = \sqrt{0'03^2 - 0'01^2} = 0'0316$ m. El ángulo que forma la trayectoria con el campo es $\beta = \alpha + \text{arctg}\,\frac{0'01}{0'03} = \frac{\pi}{6} + 0'3218$

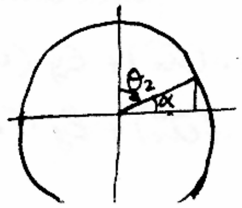
$$V_B - V_A \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{E} = cte \\ \beta = cte}}{=} E\cdot d\cdot\cos\beta = 600\,\frac{V}{m}\cdot 0'0316\,m\cdot\cos(0'845\text{ rad}) = 12'56\text{ V}$$

Nota: esta comprobación sólo es válida cuando $\vec{E} = cte$ en módulo, dirección y sentido y la trayectoria AB es una recta

*

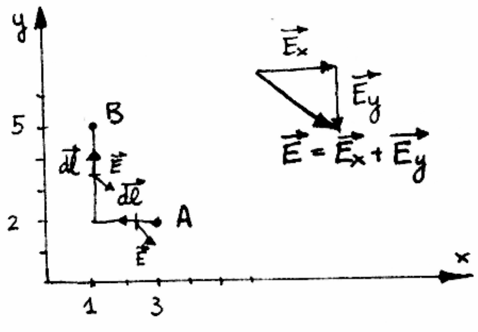


$\cos\theta_1 = -\cos\alpha$



$\cos\theta_2 = \text{sen}\,\alpha$

PROBLEMA 15



Puesto que el campo $\vec{E}$ está definido a partir de fuerzas conservativas, puede elegirse cualquier trayectoria entre A y B sin que se altere la ddp entre ambos puntos.

Elegiré una trayectoria en ángulo recto como la dibujada, ya que el discurrir en tramos en la dirección de los ejes de coordenadas simplificará el cálculo.

Para este cálculo consideraré $\vec{E}$ como suma de un campo horizontal $\vec{E}_x = 75\,\vec{u}_x$ y uno vertical $\vec{E}_y = -40\,\vec{u}_y$.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} = \underbrace{-\int_A^C \vec{E}\,d\vec{l}}_{\text{TRAMO 1}} \underbrace{-\int_C^B \vec{E}\,d\vec{l}}_{\text{TRAMO 2}}$$

$$\text{TRAMO 1} = -\int_A^C \vec{E}\,d\vec{l} \underset{\vec{E}_y \perp d\vec{l}}{=} -\int_A^C \vec{E}_x \cdot d\vec{l} \underset{\vec{E}_x \text{ opuesto } d\vec{l}}{=} \int_A^C |\vec{E}_x|\,|d\vec{l}| \underset{\substack{|d\vec{l}| = -dx \\ \text{porque } x \text{ decrece de } A \to C}}{=} -\int_A^C |\vec{E}_x| \cdot dx = -|\vec{E}_x| \int_{x=3}^{x=1} dx = 2|\vec{E}_x|$$

pto C ($x=1$); valor en A ($x=3$)

$$\text{TRAMO 1} = 2|\vec{E}_x| = 150\,V$$

$$\text{TRAMO 2} = -\int_C^B \vec{E}\,d\vec{l} \underset{\vec{E}_x \perp d\vec{l}}{=} -\int_C^B \vec{E}_y \cdot d\vec{l} \underset{\vec{E}_y \text{ opuesto a } d\vec{l}}{=} \int_C^B |\vec{E}_y| \cdot |d\vec{l}| \underset{\substack{|d\vec{l}| = dy \\ \text{porque } y \text{ crece de } C \to A}}{=} \int_C^D |\vec{E}_y|\,dy \underset{|\vec{E}_y| = cte}{=} |\vec{E}_y| \int_{y=2}^{y=5} dy = 3|\vec{E}_y|$$

Valor de Y en B ($y=5$); Valor de y en C ($y=2$)

$$\text{TRAMO 2} = 3|\vec{E}_y| = 120\,V$$

Por tanto $V_B - V_A = \text{TRAMO 1} + \text{TRAMO 2} = 150\,V + 120\,V = 270\,V$

Observación: en este caso que $\vec{E} = cte$ se puede comprobar el resultado fácilmente

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \overset{\vec{E}=cte}{=} -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = -\vec{E} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (-75, +40)\left[(1,5) - (3,2)\right] =$$

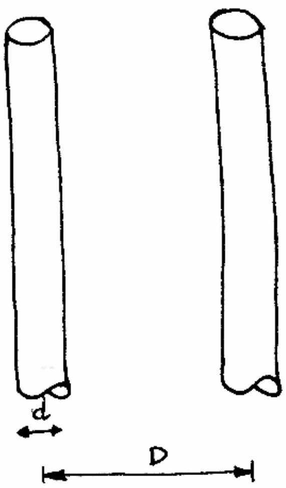
$$= \underbrace{(-75, +40) \cdot (-2, 3)}_{\text{producto escalar}} = 270\,V = \underbrace{\{E_x, E_y\} \cdot \{l_x, l_y\}}_{\text{producto escalar de dos vectores}} =$$

$$= E_x \cdot l_x + E_y \cdot l_y$$

$$\{\vec{E}\}_{xy} = E_x \cdot (\vec{u}_x) + E_y \cdot (\vec{u}_y)$$

$$\{\vec{l}\}_{xy} = l_x\,(\vec{u}_x) + l_y \cdot (\vec{u}_y)$$

PROBLEMA 22

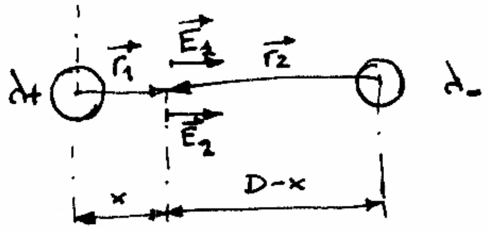


$D << d$

Vista desde arriba

$|\lambda_-| = \lambda_+ = \lambda$

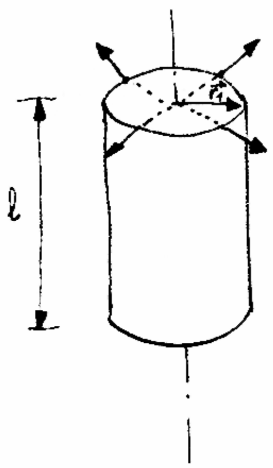
$\lambda_- = -\lambda_+$



Al considerar $R >> d$, los cables pueden considerarse hilos, en cuanto a su distribución de cargas, con densidad lineal de carga constante e igual a λ_+ y λ_- respectivamente.

Para cada uno de estos hilos por separado puede aplicarse simetría cilíndrica y calcularse el campo mediante la ley de Gauss

Hilo 1



- Obtenemos dirección de $\vec{D}$ y superficies con $|\vec{D}|$=cte utilizando razonamiento de simetría
  $\vec{D_1}$ tiene dirección radial (de coord. cilíndricas)
  $|\vec{D_1}|$= cte para r=cte.
- Tomo como superficie gausiana un cilindro coaxial a la distribución de carga.

$$\Phi_D = \oiint \vec{D_1}\cdot\vec{n}\cdot dS \underset{\substack{\vec{D_1} \perp \vec{n} \text{ en las tapas} \\ \vec{D_1} \parallel \vec{n} \text{ en el lateral}}}{=} \iint_{lateral} D_1 \cdot dS \overset{D_1 = cte}{=} D_1 \cdot 2\pi r_1 l$$

$$Q_{\text{real encerrada}} = \int_0^l \lambda_i dl \underset{\lambda_i = cte}{=} \lambda_i l = \lambda \cdot l$$

Igualando ambas expresiones obtengo $\vec{D_1} = \frac{\lambda}{2\pi r_1}\vec{u_{r1}} \Rightarrow \vec{E_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_1}\vec{u_{r1}}$

donde r_1 es la distancia al eje del hilo 1 y $\vec{u_{r1}}$ es la dirección radial respecto al hilo 1.

Análogamente, para el hilo 2

$\vec{E_2} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2}\vec{u_{r2}}$, con r_2 la distancia al eje del hilo 2 y $\vec{u_{r2}}$ la dirección radial respecto al hilo 2.

- En la línea perpendicular a los ejes de los hilos y que los une, que llamaremos dirección x (ver figura), los campos eléctricos creados por ambos hilos llevan la misma dirección y sentido.

$\vec{E_1}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\vec{u_x}$; $\vec{E_2}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{D-x}\vec{u_x}$; $\vec{E_{Total}}(x) = \vec{E_1}(x) + \vec{E_2}(x)$

conocido el campo en el eje x es posible calcular la ddp entre los cables en función de λ.

- Para calcular la ddp no despreciamos el radio de los cables d, ya que en su interior $E=0$. Además si extiendo la integral hasta los ejes de los hilos con los campos anteriormente calculados, éstos tienden a ∞ en sus ejes, tendiendo su integral a ∞ también. Por tanto:

$$V_0 = V(x{=}d) - V(x{=}D{-}d) = -\int_{x=D-d}^{x=d}\vec{E}_{Total}(x)\cdot\vec{dl} \underset{\vec{E_T}\text{ opuesto a }\vec{dl}}{=} \int_{D-d}^{d} E_{total}(x)\cdot dl \underset{|\vec{dl}|=-dx \text{ porque x decrece}}{=} -\int_{D-d}^{d} E_{total}\cdot dx$$

$$-\int_{D-d}^{d} E_1\,dx = -\int_{D-d}^{d}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}dx = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{D-d} \underset{\text{prop. logaritmos}}{=} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-d}{d}$$

$$-\int_{D-d}^{d} E_2\,dx = -\int_{D-d}^{d}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{D-x} \underset{\text{cambio de variable}}{=} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{d}^{D-d}\frac{dy}{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-d}{d}$$

Cambio de variable $D - x = y \Rightarrow -dx = dy$, límite superior $= d$, límite inferior $= D-d$

Por simetría las dos integrales deben dar lo mismo (con calcular una hubiera sido suficiente).

Luego $V_0 = 2\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-d}{d} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-d}{d}$

la carga total en un trozo de cable es: $Q = \int_0^L \lambda\cdot dl \underset{\lambda=cte}{=} \lambda\cdot L$

y por fin la capacidad es $C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-d}{d}} = \frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{D-d}{d}} \underset{d \ll D}{\simeq} \frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{D}{d}}$

Por tanto, la capacidad por unidad de longitud es $\boxed{C_\ell = \frac{C}{L} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D}{d}}}$