



## Tema 2:



# Condensadores en vacío. Ley de Gauss

1. Introducción
2. Definición de condensador: Propiedades
3. Sistemas de varios conductores: Capacidades parásitas
4. Etapas básicas del cálculo de la capacidad
5. Campo eléctrico en condensadores: Ley de Gauss
6. Capacidad de un condensador plano en vacío

Joaquín Mur Amada



2

## 1- Introducción.

- ◆ Un condensador es un dispositivo que sirve para almacenar carga y energía. Está constituido por dos conductores, aislados el uno del otro, que poseen cargas iguales en módulo pero con signos contrarios.
  - La principal diferencia de un condensador con las baterías acumuladoras es que en el condensador la energía se almacena en forma de campo eléctrico (asociado a las cargas de los electrodos) y en las baterías se almacena en forma de energía química.

3

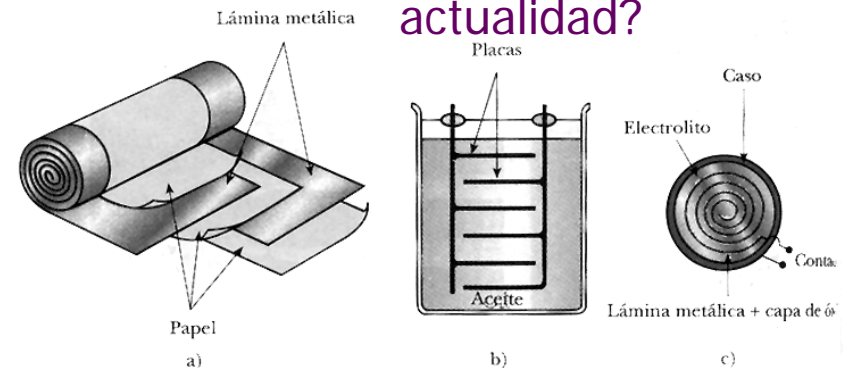
## Un poco de historia...

- ◆ El primer condensador utilizado para almacenar grandes cargas eléctricas fue una botella con una lámina de oro en sus caras interior y exterior que se llamó botella de Leyden (siglo XVIII, Holanda).
- ◆ Benjamín Franklin comprobó que el dispositivo no debía tener necesariamente la forma de botella y utilizó en su lugar vidrios de ventana recubiertos de hojas metálicas, que llamaron vidrios de Franklin.



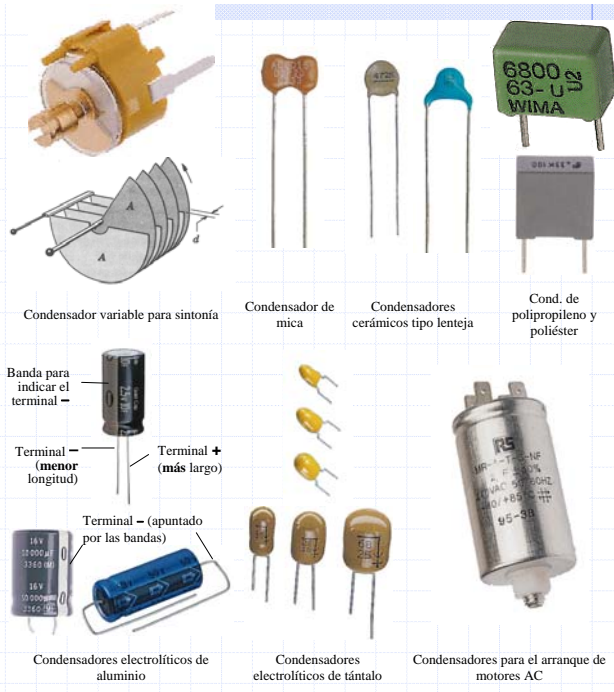
4

## ¿cómo son los condensadores en la actualidad?



Tres diseños de condensadores comerciales: a) Un condensador plano, pero que para ahorrar espacio se enrolla formando un cilindro b) Un condensador para alta tensión compuesto de muchas placas paralelas separadas por aceite aislante. c) Condensador electrolítico (entre el propio electrolito y el metal aparece una fina capa de óxido que es aislante). (Imagen tomada del Serway)

# Algunos condensadores



# Sus aplicaciones son innumerables

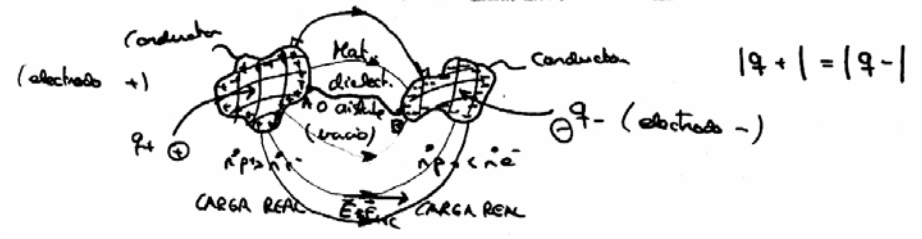
- ◆ Las baterías permiten almacenar mucha energía, pero debido a fenómenos químicos la velocidad de descarga es limitada, algunas presentan efecto memoria (tipo NiMh) y otras no conviene descargarlas profundamente (Pb-ácido)
- ◆ Los condensadores proporcionan corrientes de descarga mucho mayores, no presentan problemas asociados a procesos químicos pero la energía almacenada es bastante menor.
  - por ejemplo, se utilizan para el flash de las cámaras de fotos, para dar picos de corriente a circuitos electrónicos,...
- ◆ El rendimiento de los condensadores es muy alto y en circuitos de sintonía se mide mediante el factor de calidad.

# Algunos ejemplos de utilización

- ◆ para almacenar la energía necesaria para proporcionar un destello súbito de luz en un flash o para suministrar el consumo de componentes electrónicos que funcionan intermitentemente
- ◆ como filtros para suavizar pequeños rizados que surgen cuando la corriente alterna se convierte en continua en un rectificador AC/DC
- ◆ para sintonizar la frecuencia de receptores de radio
- ◆ para eliminar las interferencias emitidas por sistemas electrónicos, cebador de fluorescentes, motores, etc.
- ◆ para limitar sobretensiones cuando desconectamos bruscamente algunos circuitos

# 2- Definición de condensador

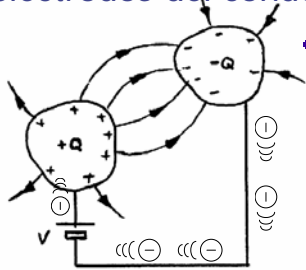
- ◆ Un condensador son dos conductores aislados entre sí, que se encuentran cargados con la misma carga en módulo y distinto signo.



## Carga de un condensador

circuito carga condensador

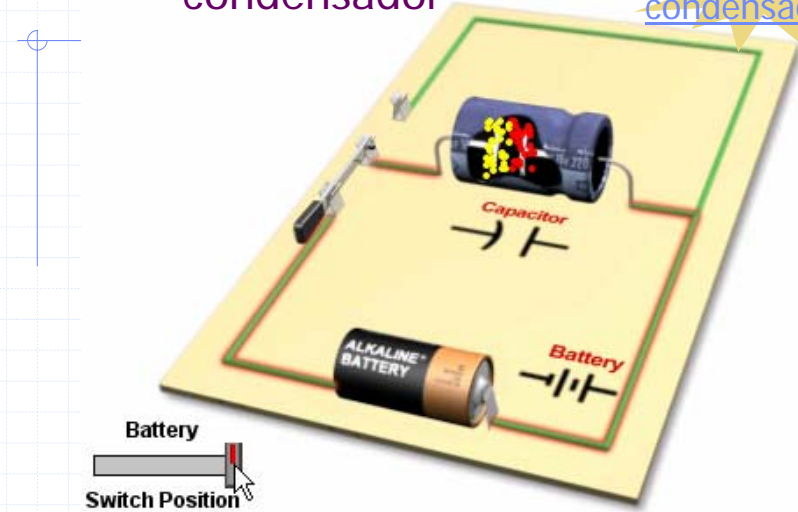
- Para lograr que dos conductores descargados adquieran cargas iguales y de signo contrario se conectan ambos conductores a los terminales de una batería que proporciona una diferencia de potencial  $V$ . Dicha batería origina el paso de carga de un conductor a otro hasta que la d.d.p. entre los electrodos del condensador iguala a la batería.



- Una vez cargado, se puede retirar la batería y la carga queda acumulada en los conductores, que reciben el nombre de ELECTRODOS.

## Animación de la carga de un condensador

circuito carga condensador



<http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/capacitor/index.html>

## Definición de capacidad

- La capacidad de un condensador es el cociente entre la carga almacenada en los conductores dividido por la diferencia de potencial entre ellos.
  - La calculamos de forma que la capacidad sea SIEMPRE POSITIVA:

$$C = \text{capacidad} \equiv \frac{q_+}{V_{\text{electrodo+}} - V_{\text{electrodo-}}} > 0$$

- Unidad: El faradio, F  $1 \text{ F} \equiv 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$

## La capacidad sólo depende de la geometría y del aislante

- Si se aumenta la diferencia de potencial, también aumenta la carga almacenada, de tal modo que la razón  $Q/V$  se mantiene constante
- La capacidad de un condensador es un valor constante que depende de la forma, tamaño y posición de los conductores y del aislante comprendido entre ellos.
  - Esto se debe a que la carga del condensador es proporcional a la d.d.p. aplicada.

## El faradio y sus submúltiplos

- ◆ Un condensador de un faradio de capacidad sería aquel que al someterlo a una d.d.p. de 1 V, adquiere una carga de 1 C en cada uno de sus electrodos.

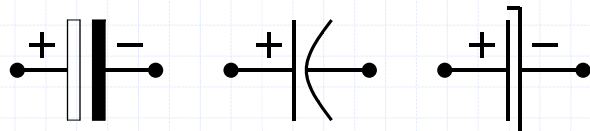
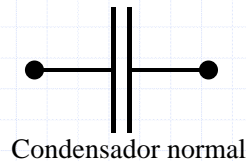
$$1 \text{ F} \equiv 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

- ◆ El faradio es una **unidad muy grande**, para los condensadores utilizados en la práctica, se suelen utilizar submúltiplos:
  - $1 \mu\text{F} = 1 \text{ microfaradio} = 10^{-6} \text{ F}$
  - $1 \text{ nF} = 1 \text{ nanofaradio} = 10^{-9} \text{ F}$
  - $1 \text{ pF} = 1 \text{ picofaradio} = 10^{-12} \text{ F}$



## Símbolo del condensador

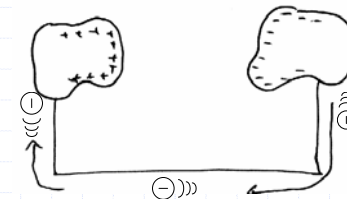
- ◆ En el esquema de un circuito, se utilizan dos líneas paralelas que simbolizan los dos electrodos del condensador.



Tres símbolos para representar condensadores con polaridad (que sólo se pueden utilizar en aplicaciones DC)

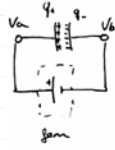
## Energía almacenada en un condensador

- ◆ En un condensador se almacena carga.
- ◆ Estando cargado el condensador, hacemos un cortocircuito, los electrones "observan" un camino libre y salen libremente hasta anular la carga acumulada en el otro electrodo.
- ◆ Se produce un chispazo, disipándose la energía asociada al condensador (en forma de luz, calor, sonido...)



## Los condensadores suelen funcionar...

### ◆ A una d.d.p. constante o "a tensión constante"



$$(V_a - V_b) = cte = \frac{W_{gen} = A}{q}$$

$$|q_+| = |q_-| \Rightarrow \text{se es variable.} \quad \leftarrow \text{cambio en la capacidad.}$$

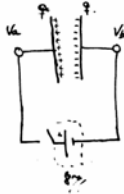
$$C = cte = \frac{q_+}{(V_a - V_b)}$$

si gen. es de cambio de.

*Giancoli T24- Pb.8*

[http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/giancoli3\\_la/chapter24/multiple3/deluxe-content.html](http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/giancoli3_la/chapter24/multiple3/deluxe-content.html)

### ◆ Aislados o "a carga constante"



$$|q_+| = |q_-| = cte.$$

$$(V_a - V_b) \Rightarrow \text{variable} \quad \leftarrow \text{Cambio en la capacidad.}$$

$$C = cte = \frac{q_+}{(V_a - V_b)}$$

si gen. es de cambio de.

*Giancoli T24- Pb.9 y 10*

[http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/giancoli3\\_la/chapter24/multiple3/deluxe-content.html](http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/giancoli3_la/chapter24/multiple3/deluxe-content.html)

## Vídeo condensador variable a $V=cte$



Extracto tomado de "El universo mecánico y más allá".

## T2-Pb. 2 – Transferencia de carga

2.- Un condensador de capacidad  $C_1 = 4 \mu\text{F}$  se carga hasta que su diferencia de potencial es de 800 V. A continuación se desconecta de la fuente y se conecta en paralelo con otro condensador aislado y descargado de capacidad  $C_2 = 6 \mu\text{F}$ . Calcular:

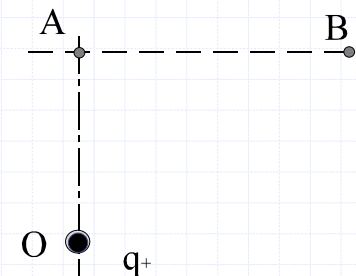
- la carga inicial y final en cada uno de los condensadores, y
- la diferencia de potencial inicial y final de cada condensador.

*solución*

## T2-Pb. 12 – Cálculo ddp entre dos puntos

12.- Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B de la figura,  $V_a - V_b$ , cuando :

- la carga es positiva de valor 5 nC
  - la carga es negativa de valor  $-6 \mu\text{C}$
- Datos:  $R_a = 0,5 \text{ m}$ ,  $R_b = 0,8 \text{ m}$



*solución*

## T2-Pb. 13 – Cálculo de la d.d.p.

- 13.- En una región del espacio se observa la existencia de un campo eléctrico, cuyo vector intensidad de campo eléctrico se puede escribir, refiriéndolo a un sistema de proyección rectangular, de la forma

$$\{\vec{E}\}_{xyz} = E_x \cdot \vec{u}_x + E_y \cdot \vec{u}_y ; E_x = 3 \frac{N}{C}, E_y = 5 \frac{N}{C}$$

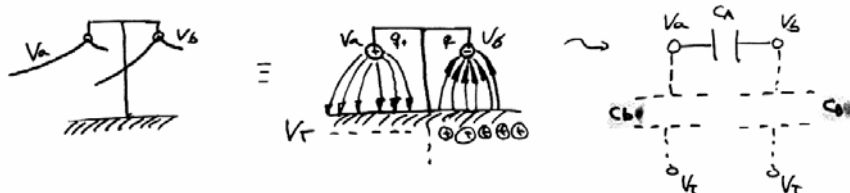
- a) Dibujar las líneas de fuerza asociadas a este campo eléctrico, indicando claramente la dirección, mediante el ángulo que forman con el eje  $XX'$ , y su sentido.
- b) Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A de coordenadas  $(x = 1 \text{ m}, y = 1 \text{ m})$  y B  $(3 \text{ m}, 1 \text{ m})$ ,  $(V_a - V_b)$ , y entre los puntos C  $(3 \text{ m}, 3 \text{ m})$  y D  $(1 \text{ m}, 3 \text{ m})$ ,  $(V_c - V_d)$ .

Visor de  $\vec{E}$ : [webphysics.davidson.edu/Applets/efield4/default.html](http://webphysics.davidson.edu/Applets/efield4/default.html),  
Introducir en  $U(x,y)$ :  $-3*x - 5*y$



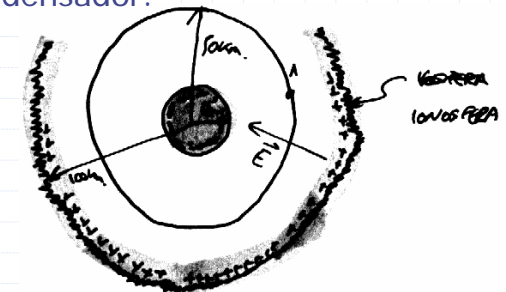
## 3- Capacidades parásitas

- ◆ Son capacidades asociadas a parejas de conductores entre los que se establece voluntaria o involuntariamente una diferencia de potencial
  - La tierra es un conductor. Por tanto, cualquier cable va a tener una capacidad parásita (respecto a tierra)



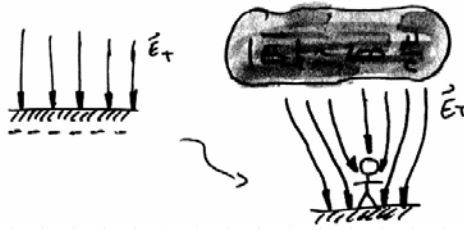
## Otros ejemplos de capacidades parásitas

- En la ionosfera, la atmósfera está enrarecida y se convierte en conductora. La tierra es el otro electrodo
  - ➔ El condensador se carga por efecto de la radiación ionizante que llega a la tierra  $V_{\text{ionosfera}} - V_{\text{tierra}} \sim 300 \text{ kV}$
  - ➔ Los rayos limitan este efecto, descargando parcialmente el condensador.



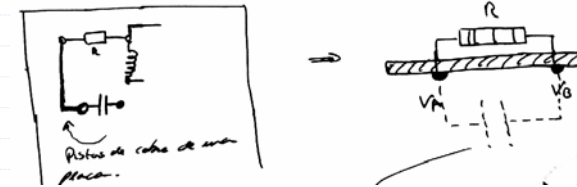
## Campo eléctrico en la sup. terrestre

- En la superficie terrestre, existe un campo eléctrico (alrededor de 100 o 200 V/m).
- Objetos metálicos (como pararrayos, árboles, etc) modifican ese campo eléctrico.

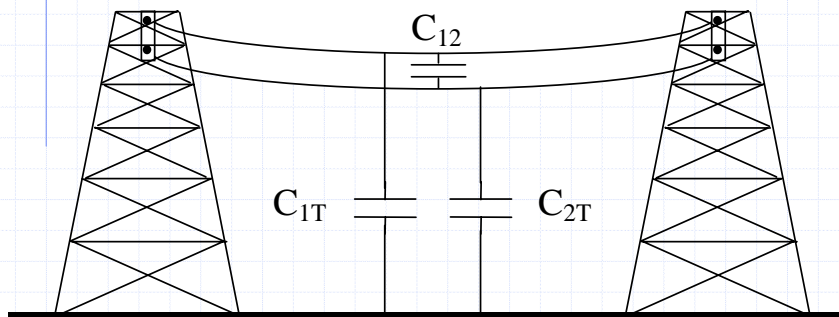


## Capacidad parásita en circuitos

- ◆ Las pistas de cobre de un circuito están a d.d.p.  $\neq 0 \rightarrow$  capacidades parásitas entre pistas
  - $\rightarrow$  parte de la tensión o señal en una parte del circuito se puede transmitir a otra parte del circuito debido al acoplamiento capacitivo
  - $\rightarrow$  este efecto es apreciable funcionando a alta frecuencia, con pistas muy cercanas y componentes electrónicos de bajo consumo



## Capacidades parásitas en una línea de transporte de energía eléctrica



## 4- Procedimiento típico en el cálculo de la capacidad de un condensador

1. Estudio de la geometría del problema
  - $\rightarrow$  Utilizar argumentos de simetría para determinar "a priori" la dirección de  $\vec{E}$
  - $\rightarrow$  Elegir el sistema de coordenadas más adecuado
2. Aplicación de la Ley de Gauss
  - $\rightarrow$  Elegir la superficie gaussiana de forma que podamos calcular fácilmente el flujo:  $|\vec{E}| = \text{cte}$  o  $\vec{E} \perp \vec{S}$
  - $\rightarrow$  Calcular flujo de  $\vec{D}$  a través de la sup.:  $\Phi_D = \oint_{\text{Superficie gaussiana}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$ 
    - ✓ Si la superficie gaussiana se divide en partes, en algunas quizás  $\vec{D} \perp \vec{S}$  y, por tanto, el flujo en dichas zonas será nulo.
  - $\rightarrow$  Calcular la carga real encerrada en la sup.:  $q_{\text{real encerrada}}$
  - $\rightarrow$  Despejar  $\vec{D}$  de la igualdad:  $\Phi_D = q_{\text{real encerrada}}$

## 4- Procedimiento típico en el cálculo de la capacidad de un condensador

3. Calcular la d.d.p. entre los electrodos del cond
  - Obtener  $\vec{E}$  a partir de  $\vec{D}$ :  $\vec{E} = \vec{D} / \epsilon_{\text{dieléctrico}}$
  - Elegir una trayectoria para ir de una placa a otra del condensador
  - Calcular d.d.p.:  $V = V_+ - V_- = - \int_{\text{trayectoria } \rightarrow}^{\leftarrow} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} > 0$
4. Aplicar la definición de capacidad,  $C = q_{\text{cond}}/V$  sustituyendo  $V$  calculada en 3.
  - Si no hemos utilizado  $q_{\text{cond}}$  como parámetro para calcular  $V$ , expresar  $q_{\text{cond}}$  en función de los parámetros.
  - $C$  es POSITIVA e INDEPENDIENTE de la CARGA del condensador (al sustituir  $V$ , se debe simplificar  $q_{\text{cond}}$ ).

30

## 5- Campo eléctrico en condensadores: Ley de Gauss

- ◆ Ley de Gauss
  - Es una formulación alternativa a la Ley de **Coulomb** (ambos reflejan el mismo principio experimental y son matemáticamente **equivalentes**)
  - Permite **calcular  $\vec{E}$**  en objetos con bastante **simetría**, de forma más sencilla que la Ley de Coulomb
  - Esta ley requiere una NUEVA HERRAMIENTA matemática: el **FLUJO**

## 5.1 Propiedades de los conductores ideales en equilibrio electrostático

31

- 1 El campo  $\vec{E}$  en el interior del conductor es cero
  - ◆ Si esto no fuera así, las cargas se moverán hasta crear un campo interno contrario al exterior que lo anule completamente
- 2 Cualquier exceso de carga neta en un conductor se sitúa en su superficie
  - ◆ El exceso de carga es libre de moverse por todo el volumen del conductor. Por repulsión eléctrica, tiende a desplazarse hasta la frontera del mismo (máx. separación), que además cumple que  $E$  en el interior es nulo, tal como exige 1
- 3 El campo  $\vec{E}$ , justo en la superficie (por el lado exterior) es perpendicular a la superficie
  - ◆ Si hubiera componente tangencial ( $E$  no es completamente perpendicular),  $E$  ejercería fuerza sobre las cargas a lo largo de la superficie, haciéndolas girar.

## Propiedades de los conductores ideales en equilibrio electrostático

32

- 4 En un conductor, la carga tiende a acumularse en puntos de menor radio de curvatura, es decir, en puntos afilados.
  - La carga tiende a salirse por las puntas.
  - Además, alrededor de las puntas,  $E$  es mayor.
- 5 En equilibrio electrostático, todo el volumen de un conductor y en particular su superficie es equipotencial
  - ◆ Si  $A$  y  $B$  son dos puntos del conductor, podemos ir  $A \rightarrow B$  por dentro del conductor, donde  $E = 0$  y

$$V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E}_{\text{dentro conductor}} \cdot d\vec{\ell} = - \int_B^A 0 \cdot d\vec{\ell} = 0$$



## Vídeo: los conductores son equipotenciales

Extracto tomado de "El universo mecánico y más allá".



## Vídeo concepto flujo

Extracto tomado de "El universo mecánico y más allá".



35

## 5.2- Flujo de un campo vectorial

- La palabra flujo viene del término latino "fluxus", que significa fluir o manar

### 5.2.1 Flujo de un fluido que se mueve

- El concepto original de flujo fue introducido en la mecánica de fluidos. Estaba ligado al campo de velocidades de un fluido.
- En los dos ejemplos que siguen, el flujo representa el volumen de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo.

$$P. ej.: v = 10 \text{ m/s} \text{ y } S = 1 \text{ cm}^2 \Rightarrow \phi = v \cdot S = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 1 \text{ l/s}$$

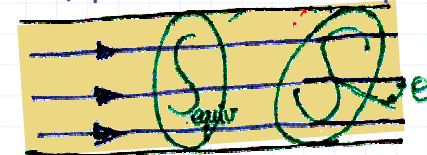
36

### Ejemplo: Flujo a través de una tubería

- El flujo de agua que atraviesa un canal es igual a la velocidad (media) del fluido x superficie perpendicular a la velocidad del fluido:

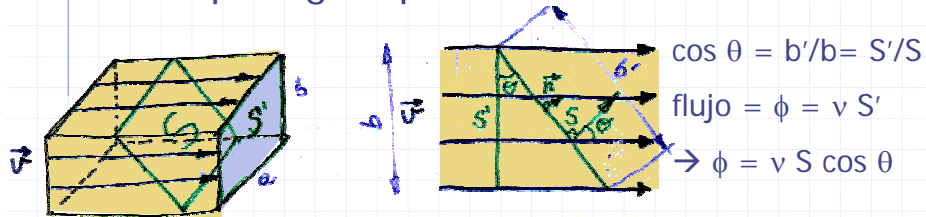


- Cuando no tomamos una sup. perpendicular para calcular el flujo, debemos multiplicar la superficie por un factor  $(\cos \theta)$  para obtener la superficie equivalente:



## 5.2.2- Flujo a través de sup. planas en un campo uniforme (constante)

- ◆ Cuando la sup. no es perpendicular a la velocidad del fluido, el flujo debe definirse de forma que siga representando el caudal.



- ◆ El flujo (caudal) que atraviesa S es el mismo que el que atraviesa S'. Equivalentemente, el número de líneas de campo que atraviesan a S es el mismo que el que atraviesan a S'.

## 5.2.3- Definición del vector superficie

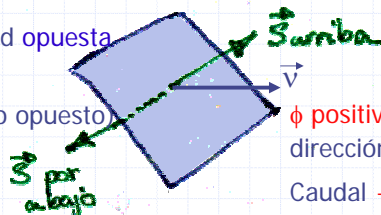
- ◆ Para trabajar más fácilmente con las superficies, se les da carácter vectorial, asociándoles un vector perpendicular a las mismas:
- ◆  $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  = vector unitario perpendicular a la sup)
- ◆  $\vec{S} = \begin{cases} \text{dirección: perpendicular a la superficie} \\ \text{módulo: valor numérico de la superficie} \\ \text{sentido} = \begin{cases} \text{HACIA FUERA en una sup CERRADA} \\ \text{como queramos si la sup es abierta} \end{cases} \end{cases}$
- ➔ El FLUJO se puede expresar como el PRODUCTO ESCALAR del campo (en este caso la velocidad del fluido) por el vector superficie:  $\phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$

## Convenio del sentido de $\vec{S}$

- ◆ El sentido de S es el del flujo que consideramos positivo
- ◆ Cuando tenemos superficies CERRADAS (es decir, aquellas que envuelven completamente un volumen),  $\vec{n}$  y  $\vec{S}$  se toman siempre **HACIA FUERA**.
- ◆ Cuando la superficie es abierta (como las que hemos utilizado en el ejemplo del canal), tomaremos el sentido en la dirección que queramos considerar como "flujo positivo".

$\phi$  negativo: velocidad opuesta al vector superficie

Caudal - (en sentido opuesto)



$\phi$  positivo: velocidad en la misma dirección que el vector superficie.

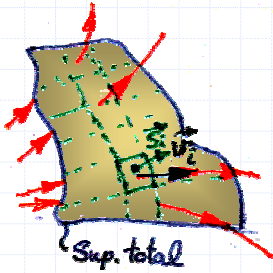
Caudal + (en la misma dirección)

## 5.2.4- Flujo a través de una sup. genérica. Integral de superficie.

- ◆ En un caso general (por ej. campo de velocidades no cte. y sup. cualquiera no plana), podemos necesitar calcular el flujo en superficies curvas en donde, además, el campo (ya sea la velocidad de un fluido o nuestro  $\vec{E}$ ) varía en los puntos de la superficie.
- ➔ Dividimos la superficie en trozos suficientemente pequeños,  $\Delta S$ , que se pueden considerar porciones de sup. planas en donde el campo cuyo flujo queremos calcular es aprox. constante.
  - ◆ Es decir, si nosotros estamos calculando el flujo (caudal) de un río, podríamos calcularlo:
    - a) conociendo  $v_{media} \rightarrow \phi = v_{media} \cdot S_{transversal}$  ¿cómo conocemos  $v_{media}$ ?
    - b) dividiendo la sup. transversal del cauce en trozos en donde v es aprox. cte. y sumando todas las contribuciones, ya que en las orillas  $v_{orillas} < v_{centro}$  (en Electricidad tomamos esta última opción)

Cuando  $\vec{v}$  varía en módulo o dirección, el área se divide en elementos de área pequeños  $\Delta S_i$ .

El flujo total se calcula sumando cada contribución al flujo  $\phi_i = \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$  debido al flujo que pasa por cada subdivisión de la sup.



Flujo en cada ello en que hemos dividido la sup. total

$$\Delta \phi_i = \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$$

$$\phi_{\text{total sup.}} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$$

## Integral de flujo o integral de superficie

- En el límite en que el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma resulta ser una integral.
- Esta integral se denomina integral de flujo o integral de superficie

$$\phi = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \int_{\text{toda la sup.}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- $\phi$  positivo: las líneas de campo en la misma dirección que el vector superficie
- $\phi$  negativo: las líneas de campo opuestas al vector superficie.

## 5.2.5- Relación entre el flujo y sus fuentes (opcional)

Siguiendo con el símil de fluidos, pero esta vez con una tubería de gas.

### ◆ Caso a)

Dentro no hay fuentes ni sumideros

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{salida}} - \phi_{\text{entrada}} = 0$$



### ◆ Caso b)

Dentro hay una fuente de fluido: líquido evaporándose

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{salida}} - \phi_{\text{entrada}} > 0$$



### ◆ Caso c)

Dentro hay un sumidero de fluido: gas licuándose

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{salida}} - \phi_{\text{entrada}} < 0$$



## 5.3 Flujo eléctrico

- Hemos visto que el flujo en un campo vectorial de velocidades dentro de un fluido nos indicaba el caudal que pasaba por una sup.
- Por analogía, se puede definir el flujo de otros campos vectoriales, que no sean la velocidad de un fluido. El significado físico de esta cantidad dependerá de la magnitud a la que se aplique. Pero el TRATAMIENTO MATEMÁTICO es el MISMO.
- Def matemática del flujo eléctrico a través de una sup

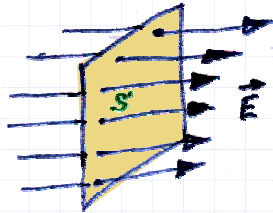
$$\Phi_{\vec{E}} = \int_{\text{Superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Superficie}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

- Sentido físico: El flujo eléctrico  $\phi_E$  es el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie.

$$\text{Unidades: } \left[ \Phi_{\vec{E}} \right] = \frac{N}{C} \text{ m}^2$$

## Observaciones:

- ◆ Tal como se vió en el tema 1, el módulo del campo eléctrico es proporcional al nº de líneas por unidad de superficie perpendicular al mismo.

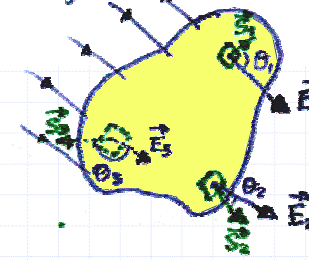


$$|\vec{E}| = E = \frac{\text{n}^\circ \text{ líneas}}{S^\perp} = \frac{\Phi}{S^\perp}$$

Por tanto, el  $\Phi = E \cdot S^\perp$

- ◆ Signo del flujo eléctrico: recordar que en el caso del flujo de un fluido nos salía el flujo + o - dependiendo de si el sentido de la sup. lo tomábamos en la dirección que fluía la sustancia o al contrario.

$\vec{S}_1 \rightarrow$  hacia afuera }  $\Rightarrow \Phi$  positivo porque  $\cos \theta_1 < 90^\circ$   
 $\vec{E}_1 \rightarrow$  hacia afuera }



$\vec{S}_2 \rightarrow$  hacia afuera }  $\Rightarrow \cos \theta_2 > 0 \Rightarrow \Phi_2$  positivo  
 $\vec{E}_2 \rightarrow$  hacia afuera } ( $\theta_2 < 90^\circ$ )

$\vec{S}_3 \rightarrow$  hacia afuera }  $\Rightarrow \cos \theta_3 < 0 \Rightarrow \Phi_3$  negativo  
 $\vec{E}_3 \rightarrow$  hacia adentro } ( $\theta_3 > 90^\circ$ )

## Flujo neto (o total) a través de una sup. cerrada

$$\Phi_{\vec{E} \text{ a través de una sup. cerrada}} = \oint_{\text{Sup.cerrada}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{Sup.cerrada}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

donde el círculo de  $\oint$  se utiliza para indicar que integramos sobre una superficie cerrada (aquella que encierra un volumen).

- En algunos libros, para indicar una integral de superficie se utiliza el símbolo doble  $\iint$ , que indica que la integral se realiza a lo largo de una región bidimensional (las superficies tienen dos dimensiones):

$$\Phi_{\vec{E} \text{ a través de una sup. cerrada}} = \iint_{\text{Sup.cerrada}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- $\Phi$  positivo: las líneas de campo **salen** del volumen.
- $\Phi$  negativo: las líneas de campo **entran** al volumen.

## Signo del flujo a través de una sup cerrada:

- ◆ El flujo total o neto  $\Phi_E$  a través de una superficie cerrada es + o - según  $\vec{E}$  sea predominantemente hacia fuera o adentro de la superficie. Puesto que el flujo es proporcional al número de líneas que entran o salen de la superficie, el **flujo neto** es proporcional al número **neto** de líneas de fuerza que salen de la superficie. Es decir:

$$\Phi_E = \text{n}^\circ \text{ de líneas de } \vec{E} \text{ que salen} - \text{n}^\circ \text{ de líneas de } \vec{E} \text{ que entran}$$

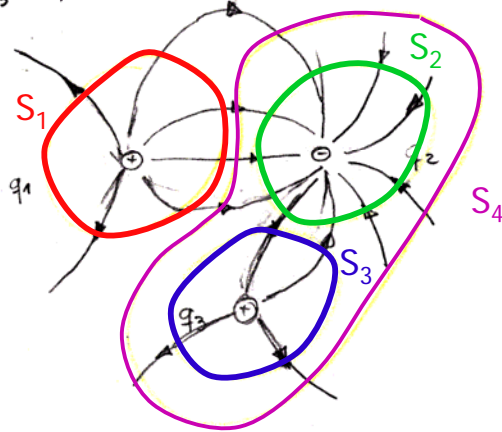
## Ejercicio: cálculo del flujo a través de las líneas de campo.

$$q_1 = 6 \mu\text{C}$$

$$q_2 = -10 \mu\text{C}$$

$$q_3 = 4 \mu\text{C}$$

Ejercicio: calcular el flujo a través de varias superficies en esta distribución de cargas.



## 5.4 La Ley de Gauss

Para enunciar la Ley de Gauss de forma que nos sirva para trabajar con cargas en el vacío y cuando las cargas están rodeadas de materiales dieléctricos, necesitamos utilizar un **nuevo vector**.

Ese nuevo vector (nuevo campo vectorial) será **paralelo a  $\vec{E}$**  pero el módulo estará multiplicado por una cantidad escalar y dimensional que depende del medio.

Por ser el nuevo vector paralelo a  $\vec{E}$ , las **líneas de fuerza** asociadas al nuevo vector serán **iguales** a las que se dibujan para representar el campo eléctrico  $\vec{E}$ .

### 5.4.1 El desplazamiento eléctrico $\vec{D}$

- El nuevo vector lo denominaremos **desplazamiento eléctrico** o densidad de flujo eléctrico. Se escribe  $\vec{D}$ .
- La cantidad escalar que multiplica a  $E$  se conoce como **permitividad del medio,  $\epsilon$**

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\text{Unidades: } [\vec{D}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

- $\vec{D}$  no tiene significado físico directo, simplemente es un vector con unidades de densidad de carga superficial.
- Así como el vector  $\vec{E}$  representa una fuerza sobre la unidad de carga positiva, al vector  $\vec{D}$  no se le puede dar un significado físico directo; lo utilizaremos como herramienta, junto con la ley de Gauss, para calcular el vector  $\vec{E}$ .

### 5.4.2 La permitividad dieléctrica $\epsilon$

La permitividad dieléctrica es una cantidad escalar característica de los materiales dieléctricos o aislantes, incluyendo el vacío. Sus unidades son  $\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$  y sus valores se obtienen experimentalmente:

Vacío	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$
Agua destilada	$\epsilon = 80,1 \cdot \epsilon_0 = 708,08 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$
Polietileno	$\epsilon = 2,3 \cdot \epsilon_0 = 20,33 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$
Titanato de Bario (BaTiO <sub>3</sub> )	$\epsilon = 1200 \cdot \epsilon_0 = 10,62 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$

Nota: en un material,  $\epsilon > \epsilon_0$  (la permitividad aumenta respecto al vacío)

## ¿En qué influye permitividad dieléctrica $\epsilon$ ?

La permitividad eléctrica  $\epsilon$  es una propiedad que afecta, por ejemplo, a la fuerza de atracción entre dos cargas dentro de un dieléctrico:

### Vacío

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

### Dieléctrico

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

Conclusión: como  $\epsilon > \epsilon_0$ , el campo eléctrico y las fuerzas de atracción y repulsión entre cargas son menores al rellenar el espacio con un dieléctrico.

## ¿y en algo más? (opcional)

La permitividad eléctrica  $\epsilon$  también influye en otras propiedades electromagnéticas de los materiales, como es la velocidad que se propagan las ondas electromagnéticas en un dieléctrico.

La velocidad a la que se propaga una onda es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

donde además aparece  $\mu$ , otra propiedad del material que en el 2º parcial veremos que se llama permeabilidad magnética y es el equivalente de la permitividad en magnetismo.

## Permitividad relativa

Por comodidad, la permitividad absoluta que acabamos de ver,  $\epsilon$ , se suele expresar relativa al valor del vacío:

$$\text{Permitividad relativa} = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Por ej., la permitividad relativa del agua destilada pura es 80,1. Esto quiere decir que el campo creado por una carga dentro de este dieléctrico es 80,1 veces más débil que en el vacío.

## 5.4.3 Enunciado de la Ley de Gauss

◆ “El flujo del vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ ,  $\Phi_D$ , a través de una superficie cerrada arbitraria  $S$ , es igual a la carga real encerrada por dicha superficie.”

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = q_{\text{real encerrada por } S}$$

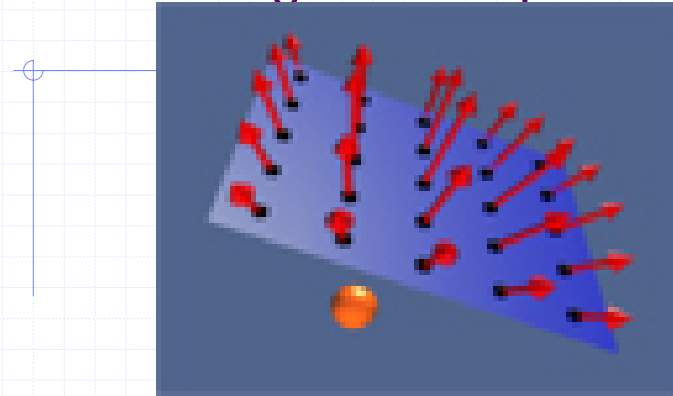
- ◆  $q_{\text{real encerrada}}$  es la carga neta (el número de protones o electrones en exceso que hay en el interior de la superficie); si la superficie encierra dos cargas  $q_+$  y  $q_-$  con  $|q_+| = |q_-|$ , el flujo total será cero.
- ◆  $\vec{n}$  es el vector normal saliente a la superficie cerrada  $S$  ( $\vec{n}$  siempre hacia fuera del volumen encerrado).

## Video de la Ley de Gauss

Extracto tomado de "El universo mecánico y más allá".



## Integral de superficie



### VISUALIZACIÓN INTERACTIVA:

<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/vectorfields/surfaceintegrals/surfaceintegrals.htm>

### Problemas interactivos sobre la ley de Gauss

[http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/giancoli3\\_la/chapter23/multiple3/deluxe-content.html](http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/giancoli3_la/chapter23/multiple3/deluxe-content.html)

## Errores comunes al aplicar Gauss

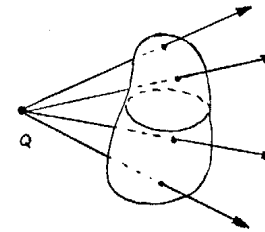
- El hecho de que el flujo sea cero no implica que el vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  en los puntos de la superficie  $S$  sea cero.

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0 \not\Rightarrow \vec{D}_{\text{puntos de la superficie } S} = \vec{0}$$

- Solo hay que considerar las cargas en el interior de la superficie  $S$ , aunque el vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  sea debido también a otras cargas (o distribuciones de cargas) que se encuentran en el exterior.

- Recordad que, aunque el campo  $\vec{E}$  esté creado por cargas afuera de la superficie gaussiana, sólo hay que contabilizar las que están en el interior.

CARGA PUNTUAL UBICADA FUERA DE LA SUPERFICIE GAUSSIANA:



ALGUNAS LÍNEAS DEL CAMPO ENTAN A LA SUPERFICIE Y OTRAS SALEN.

EL NÚMERO DE LÍNEAS QUE ENTAN ES IGUAL AL NÚMERO DE LÍNEAS QUE SALEN. POR LO TANTO, EL FLUJO ELÉCTRICO NETO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE CERRADA QUE NO ABDEA A NINGUNA CARGA ES CERO.

$$\phi_0 = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}} = 0$$

$$\phi = 0$$

## Vídeo flujo (II)

Extracto tomado de "El universo mecánico y más allá".

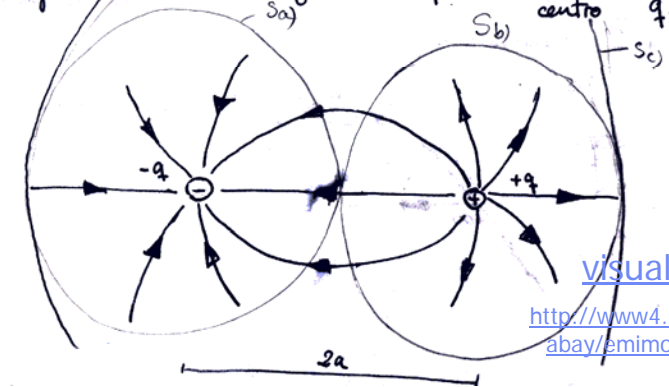


## Ejercicio: flujo en un dipolo

62

Dos cargas de igual valor y signos contrarios  $q_+$  y  $q_-$  se encuentran separadas una distancia  $2a$  formando un dipolo eléctrico. Calcular el flujo del vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de las siguientes superficies cerradas:

- a) Esfera de radio  $a$  y centro  $q_+$     b) esfera de radio  $a$  y centro  $q_-$



visualización 3D

<http://www4.ncsu.edu/~rwch/abay/emimovies/dipole.html>

guss

## Solución:

63

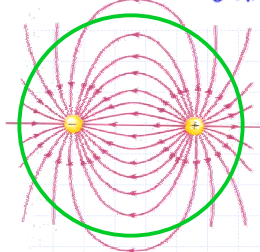
$$a) \phi_0 = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \phi_E = -q$$

$\phi_E = -\frac{q}{\epsilon_0}$  (No es posible calcular  $\vec{E}$  en este caso por falta de simetría)  
( $\vec{E}$  no es radial)

$$b) \phi_0 = \epsilon_0 \phi_E = +q \Rightarrow \phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ \frac{N}{C \cdot m^2} \right]$$

$$c) \phi_D = \epsilon_0 \phi_E = +q - q = 0 \Rightarrow \phi_E = 0$$

Esto no quiere decir que  $\vec{E}$  sea nulo en la esfera de radio  $2a$ , sino que salen tantas líneas <sup>de campo</sup> como entran a la superficie.



## Aplicación al cálculo de $\vec{E}$

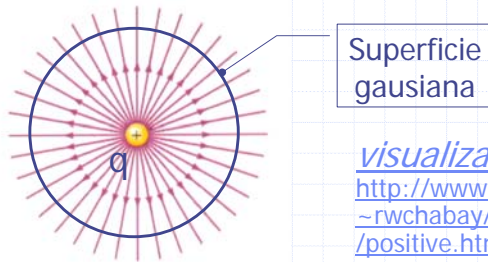
64

- La ley de Gauss se utilizará como herramienta para calcular el *módulo* de  $\vec{E}$ ,  $|\vec{E}|$ , cuando podamos calcular la integral de flujo de  $\vec{D}$ ,  $\phi_D$ , a través de una superficie cerrada (superficie gaussiana). Esto solo se podrá hacer en muy pocos casos; se tratarán de flujos asociados a distribuciones infinitas y/o simétricas de carga.
- La dirección y sentido de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  deberán deducirse de un análisis vectorial aplicando la ley de Coulomb y el ppo. de superposición.



## Ejercicio: flujo a través de una esfera

Calcular el flujo a través de una esfera de radio  $R$ , en cuyo centro se encuentra una carga puntual de valor  $q$ , utilizando la integral de superficie.



*visualización 3D*  
<http://www4.ncsu.edu/~rwchabay/emimovies/positive.html>

Objetivos: Tener un ejemplo de cálculo de  $\Phi_D$  a través de la integral de superficie (pb. 5 y 6). Introducir las coordenadas esféricas.

## Vídeo gauss aplicado a una esfera de carga

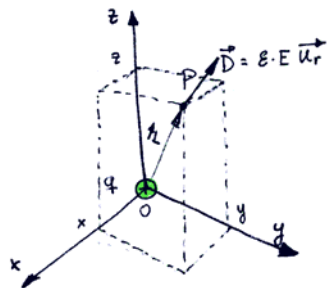


## 1º) Cálculo de $\vec{D}$

### 1º) Calcular $\vec{D}$

- Dirección y sentido de  $\vec{D}$ : paralelo a  $\vec{E}$  y mismo sentido. (RADIAL)
- Módulo: - En el vacío  $|\vec{D}| = \epsilon_0 \cdot |\vec{E}| \equiv \epsilon_0 \cdot E = D$   
 - Rodeado de un dieléctrico  $|\vec{D}| = D = \epsilon \cdot |\vec{E}| = \epsilon \cdot E$

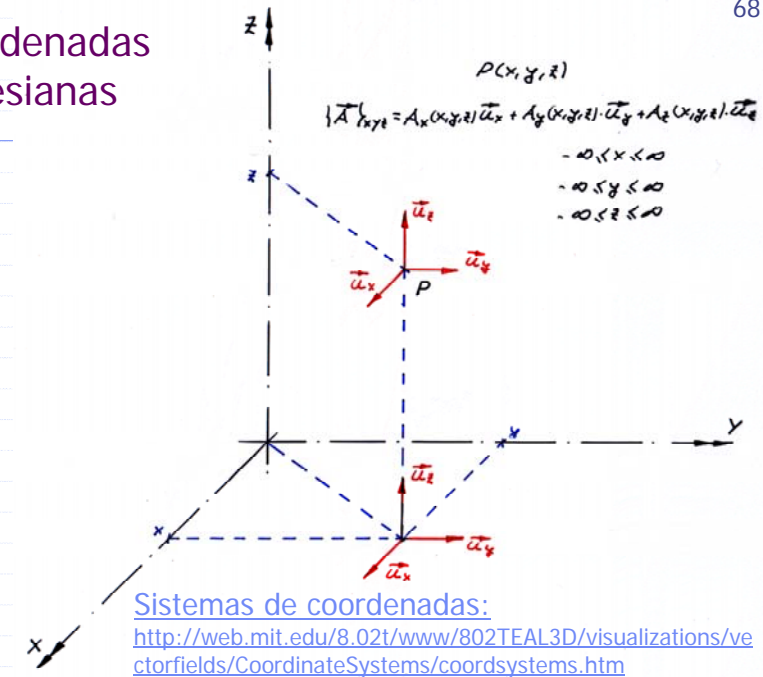
coordenadas cartesianas (utilizar TRANSPARENCIAS de los sist. coordenada



$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$|\vec{r}|$  = distancia del origen de coordenada al punto  $P$  = radio de la esfera =  $R$   
 $\vec{r}$  = vector posición del punto  $P$ , que en coordenadas rectangulares es  
 $\vec{r} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$   
 $|\vec{r}| = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

## Coordenadas cartesianas



## 1º) Cálculo de $\vec{D}$

Expresión del vector desplazamiento en el sistema cartesiano

$$\vec{D} = D \cdot \vec{u}_r = D \cdot \left( \frac{x}{R} \vec{u}_x + \frac{y}{R} \vec{u}_y + \frac{z}{R} \vec{u}_z \right)$$

Sup. esfera: aquellos puntos que satisfacen la ecuación  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

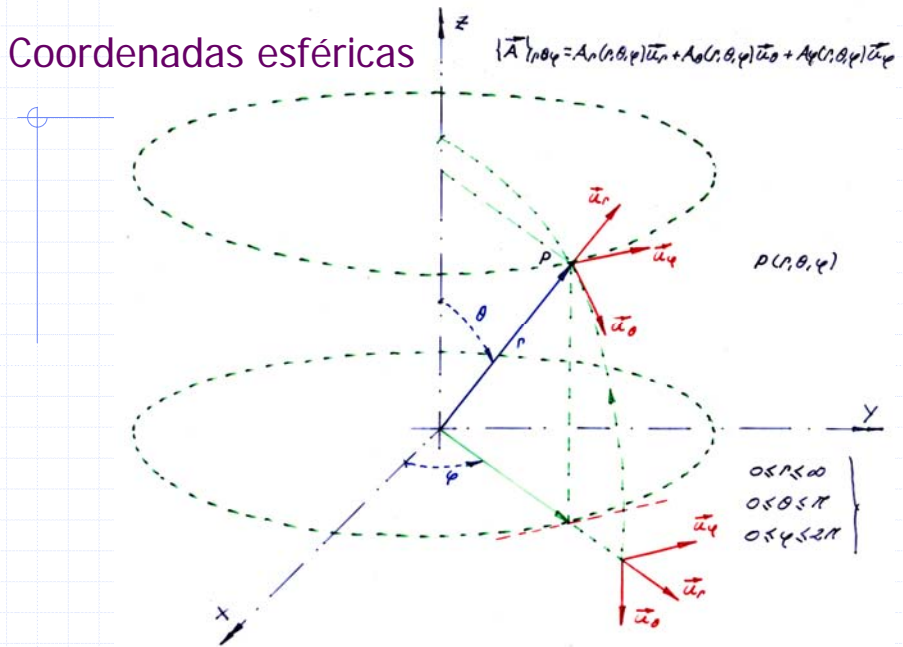
Si utilizamos el sistema de coordenadas esférico, el cálculo de la integral de flujo se simplifica mucho porque podemos expresar  $\vec{D}$  y la sup. de la esfera de una forma simple.

$$\vec{D} = D \cdot \vec{u}_r$$

Sup. esfera: aquellos puntos con la coordenada esférica  $r = R$  y cualquier valor de  $\varphi$  y  $\theta$ . Es decir

$$\begin{cases} r = R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ (todo el rango de } \theta) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ (todo el rango de } \varphi) \end{cases}$$

## Coordenadas esféricas



## Analogía entre coordenadas esféricas y latitud, longitud y distancia al centro de la tierra

Las coordenadas esféricas son similares al sistema de coordenadas geográficas.

Para identificar un punto de la Tierra, es necesario indicar la longitud, latitud y altura respecto al mar.

En el sist. coord. esférico, se utiliza la longitud  $\varphi$ , que varía entre 0 y  $2\pi$  rad, El análogo a la latitud se indica con la letra griega  $\theta$ , pero empezándola a medir en el polo N en vez. del ecuador

$$\begin{cases} \theta = 0 \text{ rad} \rightarrow \text{polo N} \\ \theta = \pi \text{ rad} \rightarrow \text{polo S} \\ \theta = \pi/2 \text{ rad} \rightarrow \text{ecuador} \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{en geografía } -\pi/2 < \text{latitud} < \pi/2 \\ \text{sur} \quad \text{norte} \end{array} \right)$$

## Parámetros $r$ , $\varphi$ y $\theta$

En las coord. esféricas, en vez de utilizar la altura sobre el nivel del mar, se utiliza la distancia al centro de la tierra (ambas son equivalentes, ya que se diferencian en una cte: la distancia del nivel del mar al centro de la tierra).

Por tanto, en el sistema de coordenadas esféricas un punto en el espacio está determinado por tres parámetros: (equivalentes a  $x, y, z$  de coord. cartesianas)

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ rad}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$$

} los ángulos deben expresarse en radianes para no cometer errores al calcular la integral.

## Vectores directores en coordenadas esféricas

Otro aspecto a resaltar de estas coordenadas es que los vectores directores ( $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$ ,  $\vec{u}_\phi$ ) no son fijos respecto de una referencia absoluta sino que varían según el punto P en donde nos encontremos.

Esto sucede tb. en la Tierra: la dirección hacia arriba o hacia el cielo (es decir,  $\vec{u}_r$ ) es diferente (vista desde un espectador absoluto) si está en España o en Australia. Análogamente,  $\vec{u}_\theta$  sería equivalente al Este y  $\vec{u}_\phi$  al Norte (vectores unitarios que apuntan al Este y al Norte).

## Flujo a través de un diferencial de área de la esfera



• La integral queda:

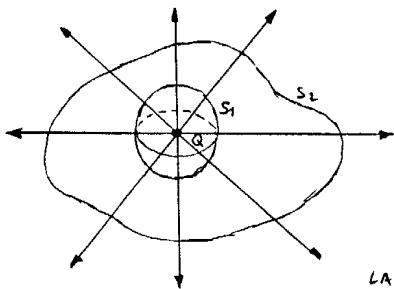
$$\Phi_D = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{D} \cdot \vec{u}_r \cdot dS \cdot \vec{u}_r = \oint D \cdot dS \cdot \underbrace{|\vec{u}_r|}_{1} \cdot \underbrace{|\vec{u}_r|}_{1} \cdot \underbrace{\cos(0 \text{ rad})}_{1} = \oint D dS$$

$$\Phi_D \stackrel{D=|\vec{D}|=\text{cte en } S_{\text{esfera}}}{=} D \oint_{\text{Sup esfera}} dS = D S_{\text{esfera}} = D 4 \pi R^2$$

$\Phi_D$  es un resultado independiente del radio de la esfera. Sólo depende de la carga que encierra.

## Moraleja...

SI CONSIDERAMOS UNA SUPERFICIE CUALQUIERA CERRADA TAL QUE CONTENGA UNA ESFERA EN SU INTERIOR, ÉSTA ÚLTIMA CONCÉNTRICA CON LA CARGA, EL NÚMERO DE LÍNEAS QUE ATRAVIESAN AMBAS SUPERFICIES SERÁN LAS MISMAS.



$$\Phi_1 = \Phi_2$$

SEGÚN HEMOS VISTO EN EL PROBLEMA:

$$\Phi_1 = \oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \text{ POR LO TANTO:}$$

$$\Phi_2 = \oint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

LA CONCLUSIÓN ES QUE EL FLUJO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL A TRAVÉS DE CUALQUIER SUPERFICIE CERRADA ES INDEPENDIENTE DE LA FORMA DE LA SUPERFICIE.

## Cálculo de la integral de flujo en casos sencillos

En el resto de ejercicios que hagamos, siempre podremos calcular el flujo de manera **simplificada**, ya que  $\vec{D}$  será **perpendicular** o **tangente** a la superficie.

Además, los problemas que hagamos tendrán suficiente simetría de forma que podremos encontrar algunas superficies en las cuales  $|\vec{D}| = \text{cte}$ .

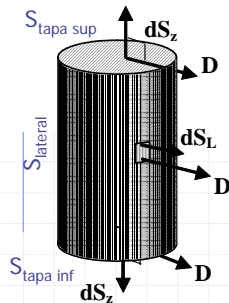
En estos casos, el **flujo** a través de una superficie se podrá calcular como  $|\vec{D}|$  en esa superficie **por S** (si  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie en cada pto,  $\vec{E} \parallel \vec{n}$ ) o bien 0 (si  $\vec{E}$  es tangente a la superficie,  $\vec{E} \perp \vec{n}$  y por tanto no hay flujo).

Si la superficie cerrada que hemos escogido está compuesta por varias simples, tendremos que calcular el flujo individualmente a través de cada parte (aplicando las reglas anteriores) y sumar los flujos parciales.

## Cálculo del flujo a través de superficies compuestas

77

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} = \int_{S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}} |\vec{D}| \cdot |\vec{n}| \cdot 1 \cdot dS + \int_{S \text{ con } \vec{E} \perp \vec{n}} |\vec{D}| \cdot |\vec{n}| \cdot 0 \cdot dS =$$



$$= \underset{\substack{\text{Normalmente } D=|\vec{D}|=\text{cte} \\ \text{en la parte de } S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}}}{D} \int_{S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}} dS = D S_{S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}}$$

Por ejemplo, en un cilindro habrá que sumar el flujo de la tapa superior, inferior y lateral para obtener el flujo total.

### Ejercicio: Cálculo del flujo a través de un cilindro con campo radial

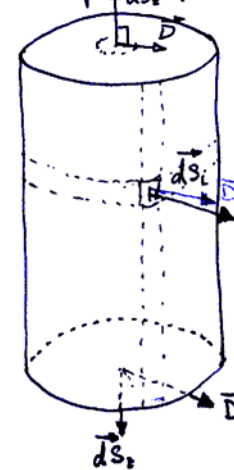
Calcular el flujo  $\Phi_D$  a través de un cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$ . El campo de esta región del espacio es en dirección radial respecto del eje  $z$  del cilindro y constante en módulo en puntos equidistantes al eje:  $\vec{D} = |\vec{D}| \cdot \vec{u}_r = D \cdot \vec{u}_r$

La sup. cilíndrica puede dividirse en las dos tapas (superior e inferior), y la pared lateral. En las tapas,  $\vec{D}$  es perpendicular a  $d\vec{S}$  y en la pared lateral  $\vec{D}$  es paralelo a  $d\vec{S}$ , en todos los puntos que la componen. (Luego el flujo a través de las tapas es 0).

Además, todos los puntos de la pared lateral equidistan del eje y por tanto, en ellos, el módulo de  $\vec{D}$  es constante

$$\Rightarrow \Phi_D = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{sup. cilindro} \\ \text{lateral}}} D \cdot dS = D_{\text{sup. lateral}} \cdot S_{\text{lateral cilindro}}$$

$$\Phi_D = 2\pi R L \cdot D \quad (r=R)$$



## 5.5 Aplicación de la ley de Gauss al cálculo de campos eléctricos

79

La Ley de Gauss se cumple siempre. No obstante, sólo nos será útil para calcular el campo eléctrico cuando el problema tenga **simetría suficiente**.

Si el problema tiene simetría suficiente, utilizando únicamente criterios geométricos se puede conocer la dirección y sentido de  $\vec{D}$  (y si su módulo es cte. o no en la superficie considerada), ya que es paralelo y con el mismo sentido que  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ )

Después de estudiar la geometría, tenemos que elegir una **superficie cerrada** o **gausiana** que cumpla los siguiente criterios:

- 1) Que el campo  $\vec{D}$ , a estudiar, sea paralelo o perpendicular al diferencial de superficie en todos los puntos, de cada una de las secciones, en que pueda dividirse la superficie total.
- 2) Que el módulo del campo  $\vec{D}$  sea constante en todos los puntos de la superficie en los que  $\vec{D} \parallel d\vec{S}$ .
- 3) Que la superficie pase por el punto donde queremos calcular  $\vec{E}$ .

80

En estas condiciones la integral de flujo de  $\vec{D}$ ,  $\Phi_D$ , se puede calcular con facilidad:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} = \int_{S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}} |\vec{D}| \cdot |\vec{n}| \cdot 1 \cdot dS + \int_{S \text{ con } \vec{E} \perp \vec{n}} |\vec{D}| \cdot |\vec{n}| \cdot 0 \cdot dS =$$

$$= \underset{\substack{\text{Normalmente } D=|\vec{D}|=\text{cte} \\ \text{en la parte de } S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}}}{D} \int_{S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}} dS = D S_{S \text{ con } \vec{E} \parallel \vec{n}}$$

Por ello, aplicando Gauss se tiene que  $D = Q_t/S_n$  siendo  $Q_t$  la carga total encerrada por la superficie gaussiana.

- Si en vez de disponer del dato  $Q_t$ , se tiene la densidad de carga en el interior de la superficie gaussiana, es preciso integrar a la línea, superficie, o volumen que contiene la distribución de carga para obtener la carga total.

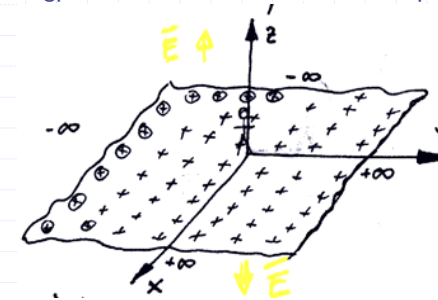
Por último, aplicando la relación entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ , que en vacío vale  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ , se despeja el valor del campo eléctrico.

Recordad que, aunque el campo  $E$  esté creado por cargas afuera de la superficie gaussiana, sólo hay que contabilizar las que están en el interior.

### 5.5.1 Ejemplos de cálculo de $\vec{E}$ a través de Gauss

4.- Una placa de PVC de  $623,7 \text{ cm}^2$  se carga fácilmente por rozamiento con un paño. Se observa que la densidad superficial de carga del plástico es  $\sigma_{s+} = 28,76 \text{ nC/cm}^2$ .

- Aplicar la ley de Gauss para calcular el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  en puntos del espacio muy próximos al centro de la placa (la superficie vista desde esos puntos puede considerarse infinita).
- Si la densidad de carga no fuera constante ¿podría calcularse el valor de  $\vec{E}$  mediante la ley de Gauss?
- Si los puntos donde quiere calcularse  $\vec{E}$  estuviesen alejados de la placa o en sus extremos ¿podría calcularse el valor de  $\vec{E}$  aplicando la ley de Gauss?



#### PROCEDIMIENTO

1º) Estudio de la geometría del problema.

→ Estudio de la simetría. Determinar la dirección de  $\vec{E}$

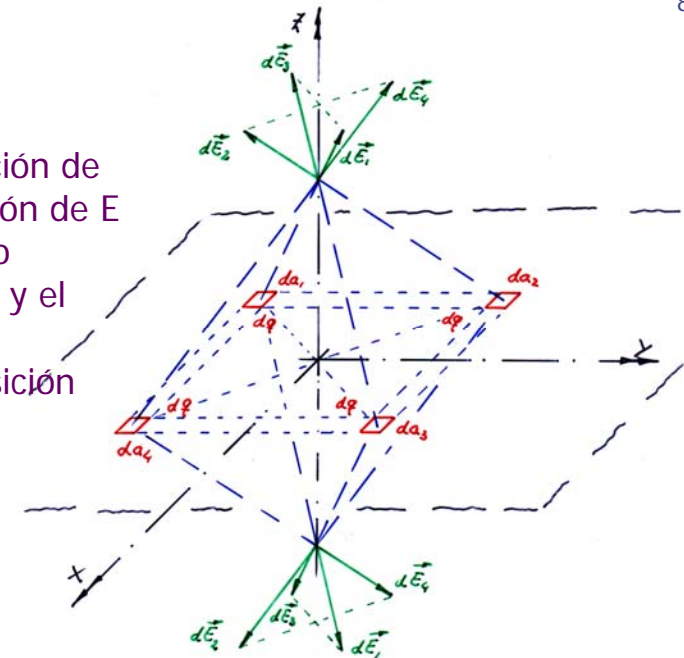
Por simetría, el campo  $\vec{E}$  en un punto arriba es igual que en un punto simétrico abajo pero de sentido contrario. Cogiendo las contribuciones de varios trozos de plano y viendo que las componentes  $x$  e  $y$  se anulan (UTILIZAR TRANSPARENCIAS). ⇒  $\vec{E} = E \cdot \vec{u}_z$

→ Estudio de la simetría: superficies en las que  $|\vec{E}| = \text{cte.}$   
Viendo que si desplazamos el plano de carga una cantidad

El campo  $\vec{E}$  es  $\perp$  al plano, hacia arriba en la parte superior y hacia abajo en la inferior (SUPUESTO  $\sigma_s$  POSITIVO). cualquiera en el eje  $x$  o  $y$ , la situación es equivalente a la inicial, ya que el plano de carga se extenderá igualmente de  $-\infty$  a  $+\infty$  en los ejes  $x$  e  $y$ . De esto deducimos que  $\vec{E}$  no puede depender de  $x$  o de  $y$ ; por lo que, como mucho dependerá de  $z$ .

⇒ Como conclusión, de los primeros dos puntos tenemos que  $\vec{E} = E(z) \cdot \vec{u}_z$ . Por tanto,  $|\vec{E}|$  es  $\text{cte}$  en planos horizontales, donde  $z = \text{cte}$ . Además  $E(z) = -E(-z)$

Justificación de la dirección de  $E$  utilizando Coulomb y el ppio. de superposición



→ Elección del sistema de coordenadas más adecuado.

En este problema nos conviene utilizar algún sistema de coordenadas que posea eje z, tal como el cartesiano o el cilíndrico.

Si estamos pensando en tomar una superficie gaussiana cúbica o prismática, el sistema a elegir es el cartesiano, que además es el más sencillo.

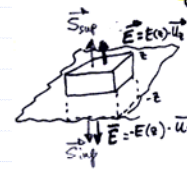
Si quisiéramos tomar un cilindro como superficie gaussiana, las coordenadas a tomar serían las cilíndricas.

→ Elegimos el sistema cartesiano.

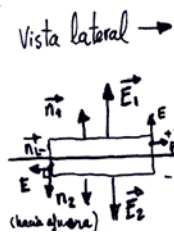
Como colofón al estudio de la geometría del problema, podemos afirmar que el problema presenta suficiente simetría para calcular  $\vec{E}$  (se cumplen las 3 condiciones).

2º) Aplicación de la Ley de Gauss.

→ Elegir la superficie gaussiana, utilizando los criterios geométricos y de simetría



Utilizamos un (cubo) prisma de sección cuadrada, de superficie  $1 \text{ m}^2$  y de altura desde  $-z$  a  $+z$ . ( $h=2z$ )  
 (Hemos elegido esta superficie porque en los laterales del prisma el flujo es nulo por ser  $\vec{E} \parallel$  a la  $S$ . Por tanto solo tenemos flujo a través de las tapas superior e inferior y  $|\vec{E}| = E(z) = -E(-z)$  en dichas superficies).



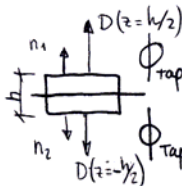
→ Calcular el flujo eléctrico en la sup. elegida

Como se ha comentado anteriormente, el flujo a través de las superficies laterales es nulo, ya que  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie ( $\vec{E}$  y  $\vec{n}_{lateral}$  perpendiculares).

→ Cálculo del flujo a través de las tapas y sup. lateral

Por tanto, el flujo a través de la sup. cerrada o gaussiana será la suma del flujo en la tapa superior + inferior ( $\phi_{lateral}=0$ )

$$\phi_{sup. cerrada} = \phi_{tapa sup.} + \phi_{tapa inf.} + \phi_{lateral}$$



$$\phi_{tapa sup.} = S \cdot |D(z=h/2)| \cdot \cos(0 \text{ rad}) = S \cdot D(z=h/2)$$

$$\phi_{tapa inferior} = S \cdot |D(z=-h/2)| \cdot \cos(0 \text{ rad}) = S \cdot D(z=h/2)$$

$$\phi_{sup. cerrada} = 2 \cdot S \cdot D(z=h/2)$$

→ Calcular la carga total encerrada

$$q_{real enc} = \text{Superficie del plano dentro de la caja} \times \text{densidad sup. carga} = \sigma_s \cdot S$$

→ Aplicar la igualdad de la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{real encerrada} \quad \text{Poner mejor en piramita } \phi_D = q_{real enc.}$$

$$2 \cdot S \cdot D(z=h/2) = \sigma_s \cdot S$$

$$\Rightarrow D(z=h/2) = \frac{\sigma_s}{2} \Rightarrow \text{Como el parámetro h no aparece en la expresión, D no depende de h.}$$

$$\Rightarrow D(z=-h/2) = -D(z=h/2) = -\frac{\sigma_s}{2}$$

$$\begin{cases} \forall 0 < z \leq \infty & \vec{D} = \frac{\sigma_s}{2} \vec{u}_z \quad [C/m^2] \\ \forall -\infty \leq z < 0 & \vec{D} = -\frac{\sigma_s}{2} \vec{u}_z \quad [C/m^2] \end{cases}$$

3º) Calcular E en función de D

3º) Calcular  $\vec{E}$  a través de  $\vec{D}$  (si este fuera un problema de calcular la C de un condensador, en este apartado calcularíamos la ddp entre las placas).

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$\{\vec{E}\}_{xyz} = \begin{cases} + \frac{\sigma_s}{2\epsilon} \vec{u}_z & \forall z > 0 \\ - \frac{\sigma_s}{2\epsilon} \vec{u}_z & \forall z < 0 \end{cases}$$

( $\vec{E}$  expresado en coordenadas cartesianas o rectangulares).

comentar que en  $z=0$  hay una singularidad (salto del valor de  $\vec{E}$ ) de valor  $E_{z=0^+} - E_{z=0^-} = \frac{\sigma_s}{\epsilon}$ .

Sustituyendo valores en S.I., obtengo  $|\vec{E}| = 16,2 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$

Segundo apartado del problema

b) Si  $\sigma_s \neq \text{cte}$  ¿podría calcularse el valor de  $\vec{E}$  mediante la ley de Gauss?

$$\text{Si } \sigma_s = \frac{dq}{dS} \neq \text{cte} \Rightarrow dq_1 \neq dq_2 \neq dq_3 \neq dq_4$$

$$\Rightarrow |d\vec{E}_1| \neq |d\vec{E}_2| \neq |d\vec{E}_3| \neq |d\vec{E}_4|$$

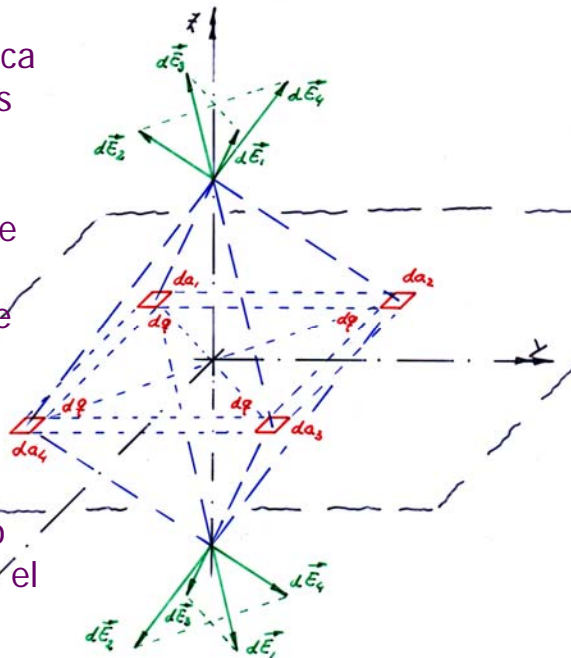
$\vec{E}$  dependería de las coordenadas del punto del espacio y tendría componentes en las tres direcciones  $x, y, z$ .

Es decir, en lenguaje matemático

$$\{\vec{E}\}_{xyz} = E_x(x, y, z) \vec{u}_x + E_y(x, y, z) \vec{u}_y + E_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

$\Rightarrow$  En este caso solo podríamos calcular el flujo.

Si estamos cerca de las esquinas no podemos tomar diferenciales de área situados simétricamente  $\rightarrow$  El campo eléctrico va a tener componente horizontal y no puedo calcular el flujo "a priori"



Tercer apartado del problema

c) Si el plano fuera finito ¿podría calcularse el valor de  $\vec{E}$  aplicando la ley de Gauss?

No, solo tendríamos simetría en puntos del eje del plano.

$$\vec{E} = E(z) \cdot \vec{u}_z \text{ sólo cuando } x=0, y=0 \quad \forall z$$

A grandes distancias  $\rightarrow$  se vería como una carga puntual de valor  $q = S \cdot \sigma_s$

[visualización 3D \(corte\)](#)

<http://www4.ncsu.edu/~rwchabay/emimovies/images/fmovies/edkmf2.mov>

[visualización 3D \(completa\)](#)

<http://www4.ncsu.edu/~rwchabay/emimovies/images/fmovies/edkaf2.mov>

[Descargar películas](#) (requiere visor [Quick Time](#))

## Otro ejemplo de cálculo de $\vec{E}$ a través de Gauss (cilindro cargado)

5.- Calcular el vector intensidad de campo eléctrico,  $\vec{E}$ , en todos los puntos del espacio, creado por una superficie cilíndrica de longitud infinita, de radio  $R$ , cargada uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma_s$ .

[visualización](#)

<http://webphysics.davidson.edu/Applets/poisson4/ShellCharge.html>

## Otro ejemplo de cálculo de $\vec{E}$ a través de Gauss (hilo cargado)

Encuéntrese el campo eléctrico a una distancia  $r$  de un hilo muy largo cargado uniformemente con  $\lambda > 0$ ;  $\lambda = ct\epsilon$ .

1º) Estudio de la geometría del problema

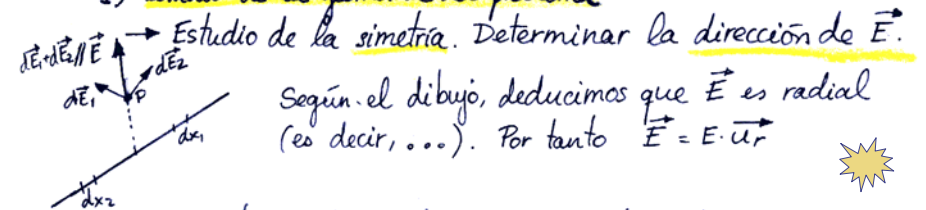
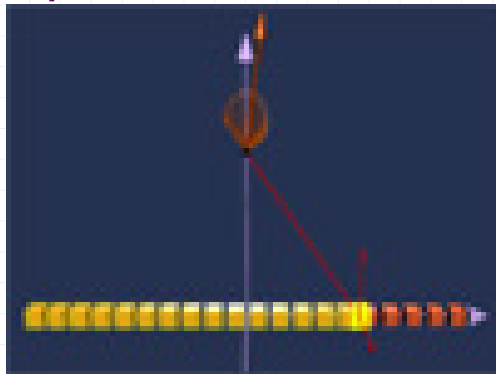


Gráfico 2D:

[http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo\\_electrico/linea/linea.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_electrico/linea/linea.htm)

## $\vec{E}$ creado por una varilla cargada



**VISUALIZACIÓN INTERACTIVA:**

<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/electrostatics/LineIntegration/LineIntegrationFullScreen.htm>

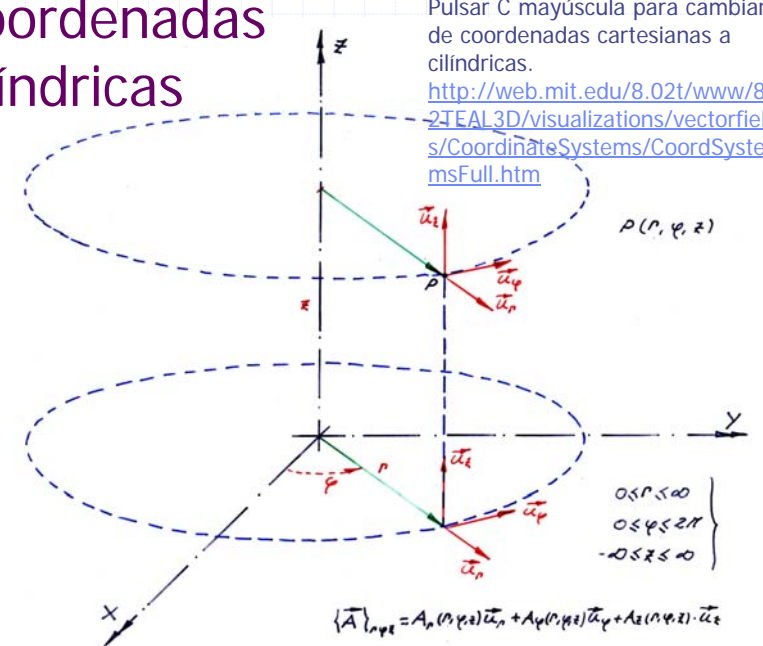
**VISUALIZACIÓN INTERACTIVA:**

<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/electrostatics/LineField/LineFieldFullScreen.htm>

## Coordenadas cilíndricas

Sistemas de coordenadas:

Pulsar C mayúscula para cambiar de coordenadas cartesianas a cilíndricas.  
<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/vectorfields/CoordinateSystems/CoordSystemsFull.htm>





### Estudio de la geometría y elección de la superficie gaussiana

#### → Sistema de coordenadas más adecuado

Elegiremos el sistema cilíndrico por la simetría del problema.

Por tanto, colocaremos el eje  $z$  en el hilo, y empezaremos a contar  $\theta$  desde la horizontal o vertical (depende de dónde pongamos el eje  $x$ ).

#### → Superficies en las que $|\vec{E}| = \text{cte.}$

→ Para detectar las superficies con  $|\vec{E}| = \text{cte}$  utilizaremos la simetría

### Deducción de la dirección y sentido de $\vec{E}$

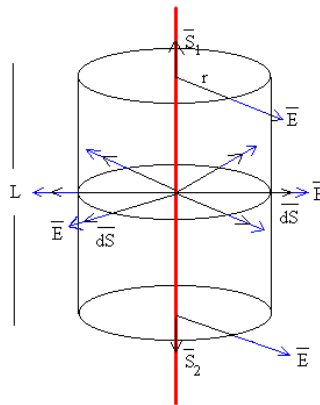
• Si suponemos que el hilo es infinitamente largo, podemos trasladar el origen a lo largo del hilo y obtendremos un problema equivalente (un hilo <sup>cargado</sup> que se extiende indefinidamente a derecha e izquierda).

• Si giramos los ejes de coordenadas utilizando como eje de giro el hilo, también obtendremos el mismo problema. <sup>en ángulo cualquiera</sup>

Por tanto  $|\vec{E}|$  no puede depender de  $\theta$  ni  $z$ . Es decir

$$\{\vec{E}\}_{r,\theta,z} = E(r) \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \{\vec{D}\}_{r,\theta,z} = D(r) \cdot \vec{u}_r$$

### Elección de la superficie gaussiana



### 2º) Aplicación de la Ley de Gauss

→ Elegir la sup. cerrada o gaussiana.

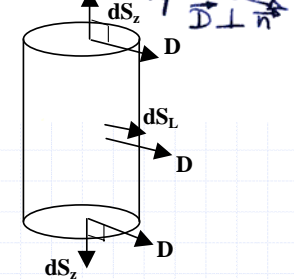
Utilizaremos un cilindro cuyo eje coincide con el hilo, y de altura  $h \leq l$  m. El radio es  $r$ , la distancia del punto en dónde queremos conocer  $\vec{E}$  al hilo.

→ Calcular el flujo en la sup. elegida

$$\Phi_D = S_{\text{lateral cilindro}} \cdot D(r) \cdot \cos(0) + \Phi_{\text{tapas del cilindro}}$$

$\vec{D} \perp \vec{n}$

$$\Phi_D = 2\pi r h \cdot D(r)$$



→ Calcular la carga total encerrada

$$q_{\text{real encerr.}} = \lambda \cdot h$$

→ Aplicar la igualdad de la ley de Gauss. →

$$\Phi_D = q_{\text{real encerrada}} \Rightarrow 2\pi r \cdot \lambda \cdot D(r) = \lambda \cdot h \Rightarrow D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\{\vec{D}\}_{r,\theta,z} = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{u}_r$$

3º) Obtener  $\vec{E}$  a partir de  $\vec{D}$

$$\{\vec{E}\}_{r,\theta,z} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r$$

El campo creado por un hilo infinito cargado es directamente proporcional a la densidad de carga  $\lambda$  e inv. proporcional a la distancia (en vez de in al cuadrado, como en la esfera o carga puntual, o ser indep. de la distancia como en el caso del plano infinito).

## Otro ejemplo de cálculo de $\vec{E}$ a través de Gauss

6.-Un globo esférico de radio  $a = 14$  cm se encuentra cargado con una carga de  $5 \mu\text{C}$  distribuida uniformemente en su superficie. Calcular el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  en:

- los puntos que se encuentran a una distancia de  $r = 10$  cm del centro del globo y
- los puntos que se encuentran a una distancia de  $r = 20$  cm del centro del globo.

Esto equivale al siguiente problema formulado académicamente:

Calcular  $\vec{E}$  en un cascarón esférico de radio "a", que tiene una carga total  $Q_+$  distribuida uniformemente sobre su superficie (por tanto,  $\sigma_s = \frac{Q_+}{S_{\text{esfera}}} = \frac{Q_+}{4\pi a^2}$  en la esfera). Determinése el campo eléctrico en los puntos tanto interiores como exteriores al cascarón.

## Obtención de $\vec{E}$ en puntos exteriores ( $r > a$ )

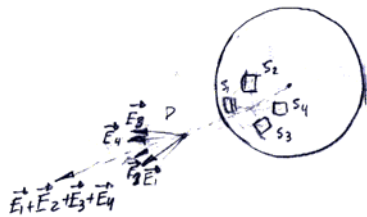
Estudio para  $r > a$

1º) Estudio de la geometría del problema

→ Estudio de la simetría. Determinar la dirección de  $\vec{E}$

PONER TRANSPARENCIA → Deducir que  $\vec{E}$  ha de ser radial

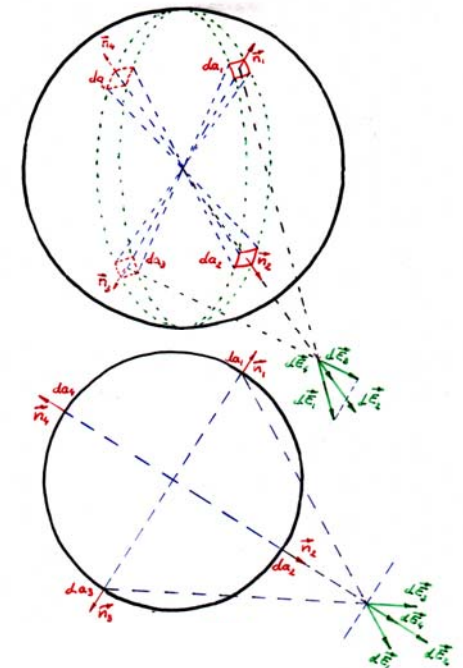
( $\vec{E}$  tiene la dirección de un radio, es decir, desde el centro de la esfera hasta el punto estudiado).



→ Sistema de coordenadas más adecuado.

Dado que estamos tratando con un cascarón esférico, utilizaremos las coordenadas esféricas.

Justificación de la dirección radial de  $\vec{E}$  utilizando Coulomb y el ppio. de superposición



## Elección de una superficie gaussiana donde podamos calcular $\Phi$

→ Superficies en las que  $\vec{E}$  es cte.

Por la geometría podemos afirmar que  $\vec{E}$  no va a depender de  $\varphi$  ni de  $\theta$ , ya que podemos girar los ejes en cualquier sentido y el problema sería equivalente. Por tanto  $\vec{E}$  sólo dependerá de  $r$ .

Conclusión del estudio de la geometría:  $\{\vec{E}\}_{r\varphi\theta} = E(r)\vec{u}_r$

Por tanto  $\{\vec{D}\}_{r\varphi\theta} = \epsilon \{\vec{E}\}_{r\varphi\theta} = \epsilon \cdot E(r)\vec{u}_r$

## 2º) Aplicación de la Ley de Gauss

### 2º) Aplicación de la ley de Gauss

→ Elegir la superficie cerrada o gaussiana, utilizando criterios de simetría

Tomamos una esfera de radio  $r > a$

→ Calcular el flujo eléctrico en la superficie elegida.

Dado que en todos los puntos de la esfera el vector perpendicular a la superficie  $\vec{n}$  y  $\vec{E}$  son paralelos, podemos calcular el flujo a través de la esfera como

$$\Phi_0 = S_{\text{esfera}} \cdot D(r) \cdot \cos 0 \text{rad} = 4\pi r^2 \cdot D(r)$$

→ Calcular la carga total encerrada en la sup. gaussiana

Dado que estamos en  $r > a$ , la carga encerrada es la carga total del cascarón esférico

$$q_{\text{real encerrada}} = Q$$

→ Aplicar la igualdad de la ley de Gauss

$$\Phi_0 = q_{\text{real encerrada}} \Rightarrow Q = 4\pi r^2 D$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \vec{D} = D \cdot \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

3º) Obtener  $\vec{E}$  a partir de  $\vec{D}$

Aplicamos la definición de desplazamiento ( $\vec{D} \equiv \epsilon \vec{E}$ )

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \forall r > a$$

en el vacío  $\epsilon = \epsilon_0$

Por tanto, hemos comprobado que, en un punto afuera del cascarón de carga, la distribución de carga, se comporta como una carga puntual de la misma magnitud situada en el centro.

## Obtención de $\vec{E}$ en puntos interiores ( $r < a$ )

1º) Estudio de la geometría del problema

→ Estudio de la geometría: determinar la dirección de  $\vec{E}$



$\vec{E}$  es radial (hacia adentro)  $\Rightarrow \vec{E} = -E(r)\vec{u}_r$

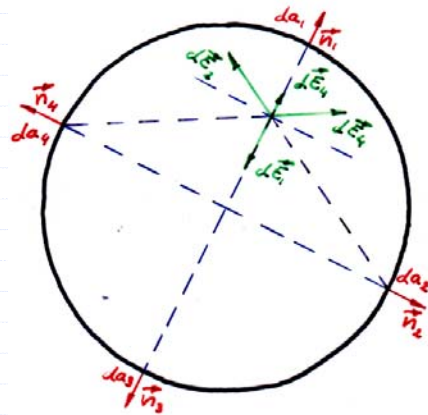
→ Sistema de coordenadas más adecuado:

El esférico

→ Superficies en las que  $|\vec{E}| = \text{cte}$

Esferas concéntricas al cascarón de  $r < a$

Justificación de la dirección radial de  $\vec{E}$  utilizando Coulomb y el ppio. de superposición



## 2º) Aplicación de la Ley de Gauss

### 2º) Aplicación de la ley de Gauss

→ Elegir la superficie gaussiana  
Esferas concéntricas

→ Flujo en la sup. gaussiana

$$\Phi_D = S_{\text{esfera}} \cdot D(r) \cdot \cos(\pi \text{ rad}) = -4\pi r^2 D(r)$$

→ Calcular la carga total encerrada.

$$q_{\text{real encerrada}} = 0$$

→ Aplicar la igualdad de la Ley de Gauss

$$\Phi_D = q_{\text{enc.}} \Rightarrow -4\pi r^2 D(r) = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$$

## 3º) Obtener $\vec{E}$ a partir de $\vec{D}$

### 3º) Obtener $\vec{E}$ a partir de $\vec{D}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \vec{0}$$

Por tanto, dentro del casquete esférico el campo eléctrico es nulo.

Si hubiéramos escogido otros  $dS_1, dS_2, dS_3$  y  $dS_4$  y hubiéramos dibujado a escala podríamos haber llegado a este resultado.

Obs: El resultado de este ejercicio se puede aplicar a un dieléctrico cuya sup. exterior estuviera cargada o a un conductor cuya sup. carga se encuentra en la superficie.

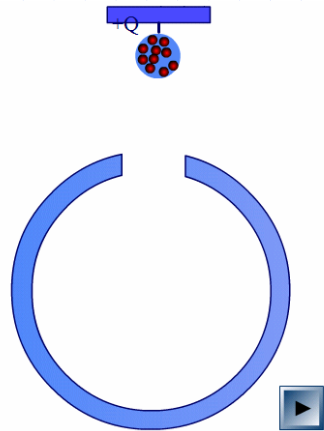
## Otro ejemplo de cálculo de $\vec{E}$ a través de Gauss

8.- Una esfera conductora,  $C_1$ , de radio  $R_1$ , se encuentra cargada con una carga  $Q > 0$ . Se dispone de una segunda esfera conductora hueca,  $C_2$ , de radio interior  $R_2$  y radio exterior  $R_3$  ( $R_1 < R_2$ ) aislada eléctricamente y sin carga, con un orificio circular por donde puede introducirse la esfera  $C_1$ .

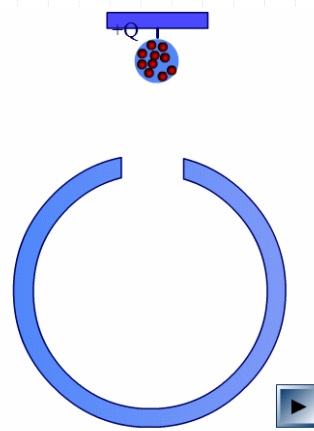
a) Si introducimos  $C_1$ , sin tocar en ningún momento la esfera  $C_2$ , hasta que queda concéntrica con ella, calcular el vector intensidad de campo eléctrico en cualquier punto del espacio y las densidades superficiales de carga en los conductores  $C_1$  y  $C_2$ .

b) Si a continuación ponemos en contacto  $C_1$  con el fondo del conductor  $C_2$ , sacamos  $C_1$ , la volvemos a cargar y la introducimos hasta que vuelve a tocar el fondo de  $C_2$ , determinar el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto del espacio y las nuevas densidades superficiales de carga en los conductores  $C_1$  y  $C_2$ .

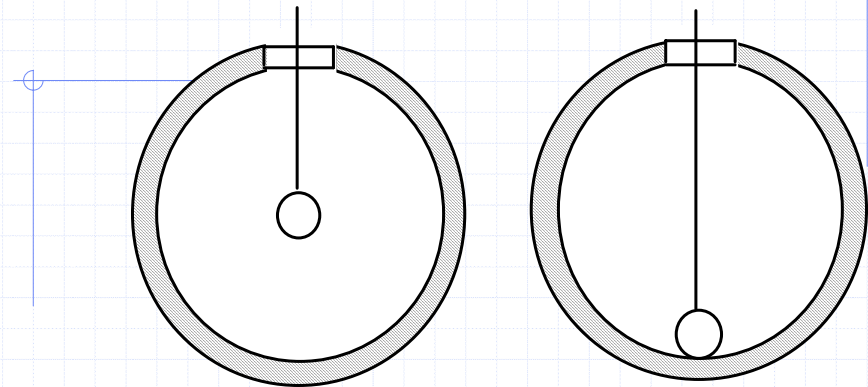
### Apartado a)



### Apartado b)



Para comenzar las animaciones, pulsa los botones



apartado a)

apartado b)

Solución paso a paso


Animación interactiva del curso interactivo de Física,

© Ángel Franco: [http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo\\_electrico/cubeta/cubeta.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_electrico/cubeta/cubeta.htm)

## 6- Capacidad de un condensador plano en el vacío

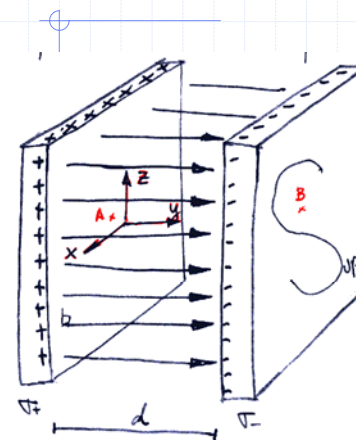
Los condensadores más utilizados son de tipo plano, por lo que estudiaremos a fondo este dispositivo.

En la práctica, estos condensadores se arrollan o apilan para compactar el dispositivo y ahorrar espacio. No obstante, su principio de funcionamiento es el que vamos a ver en este apartado del tema.

Por ejemplo, el condensador cuyo corte es , se puede considerar que el condensador comercial se compone de varios condensadores elementales planos, conectados en paralelo.

Curso interactiva de física, EUITI Eibar, © Ángel Franco  
[http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo\\_electrico/plano/plano.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_electrico/plano/plano.htm)

Justificación de la dirección y sentido de  $\vec{E}$



Intuitivamente, podemos ver que  $\{\vec{E}\}_{xyz} = |\vec{E}| \cdot \vec{u}_y$  ya que  $\vec{E}$  debe ser  $\perp$  a las superf. conductoras y saliendo de la placa cargada +

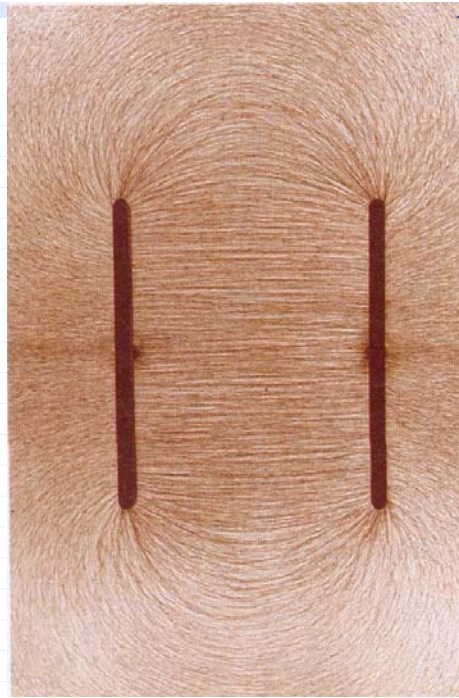
Recordemos que la C

$$C = \frac{q_+}{V_a - V_b} = f(\text{Sup.}, d, \text{medio}^{\uparrow} \text{dieléctrico})$$

Bueno, comencemos el estudio riguroso

### Distribución real del campo eléctrico entre placas de un condensador plano

Imagen extraída de Tipler p. 692



### Elección de la trayectoria para calcular la d.d.p. entre placas

Para calcular  $V_A - V_B$  debo calcular el campo eléctrico dentro del condensador, ya que

$$V_A - V_B = \frac{W_{B \rightarrow A}}{q_{\text{test}}} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



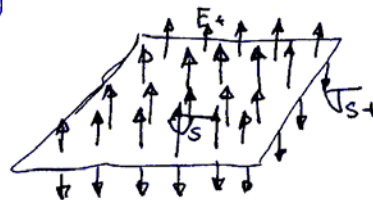
A su vez,  $\vec{E}$  depende de la carga de las placas del condensador que supondré que es  $\sigma$  (el valor concreto no importa, ya que cuando calculemos  $C$  se nos simplificará AL FINAL DEL TODO). (A y B son cualquier punto en cada una de las placas del condensador, ya que cada uno de los conductores son volúmenes EQUIPOTENCIALES).

### Condensador plano visto como superposición de un plano cargado con $\sigma_{s+}$ y otro cargado con $\sigma_{s-} = -\sigma_{s+}$

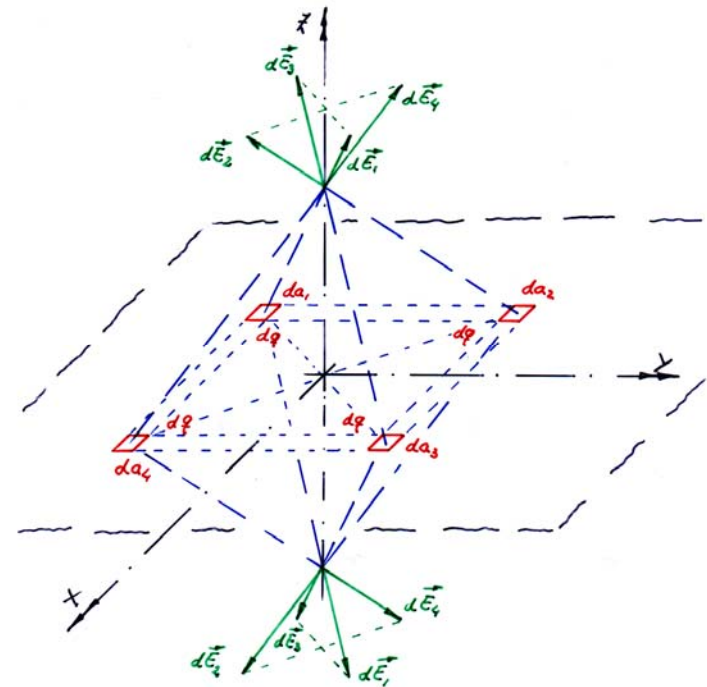
#### 6.1) Estudio de la geometría del problema

→ Estudio de la simetría: determinar la dirección de  $\vec{E}$  (utilizar las transparencias de simetría en el plano).  
 Por una parte, hemos visto que un plano infinito cargado positivamente, crea un campo uniforme con sentido "hacia el infinito"

Electrodo positivo



$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma_s+}{2\epsilon} \vec{u}_z & z < 0 \\ \frac{\sigma_s+}{2\epsilon} \vec{u}_z & z > 0 \end{cases}$$

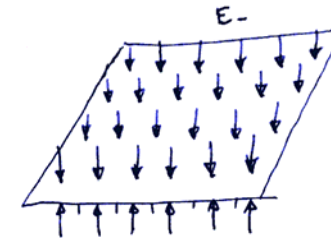


## Electrodo positivo

En la transparencia se veía que las contribuciones de varios trozos de plano  $dS$ , tomadas simétricamente se compensaban en las componentes horizontales ( $x$  e  $y$ ). Por tanto,  $\vec{E}$  (resultante de la suma de las contribuciones de todos los  $dS$ ) debía ser vertical (hacia arriba para  $z > 0$  y hacia abajo para  $z < 0$ ).

Por otra parte, el campo creado por un plano infinito cargado negativamente uniforme, crea un campo igual al expuesto anteriormente pero de sentido contrario.

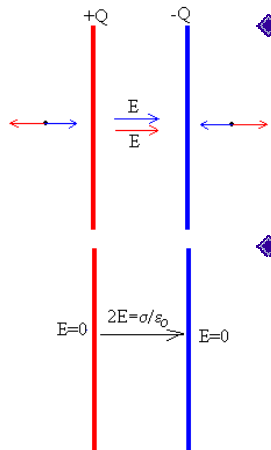
## Electrodo negativo



$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma_-}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z < 0 \\ \frac{\sigma_-}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z > 0 \end{cases}$$

$\vec{E}$  es hacia abajo para  $z > 0$  y hacia arriba para  $z < 0$  (justo al revés que con  $\sigma_+$ ).

## Campo creado por dos placas planas cargadas con cargas iguales y opuestas. Superposición.

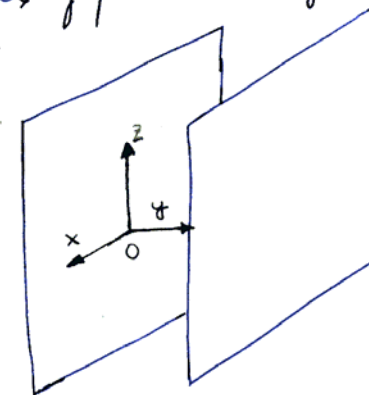


- ◆ Supondremos infinitamente grandes las placas o bien, que la separación entre las placas es pequeña comparada con sus dimensiones. En la figura, se muestra en rojo el campo  $\vec{E}$  creado por la placa roja (+) y en azul el campo  $\vec{E}$  generado por la placa azul (-).
- ◆ Conclusión: en un condensador formado por dos placas iguales de área  $S$ , separadas una distancia  $d$ , pequeña en comparación con las dimensiones de las placas. El campo se cancela en la región del espacio situado fuera de las placas, y se suma en el espacio situado entre las placas. Por tanto, solamente existe campo entre las placas, siendo despreciable fuera de las mismas.

## Seguimos el procedimiento estándar...

→ Elección del sistema de coordenadas.

Escogemos el sistema cartesiano (porque estamos más familiarizados con él) y ponemos el origen en el centro de la placa positiva.

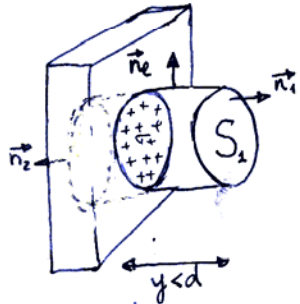


$\vec{E}$  depende de la coordenada  $z$  y (de si estamos dentro o fuera del condensador).

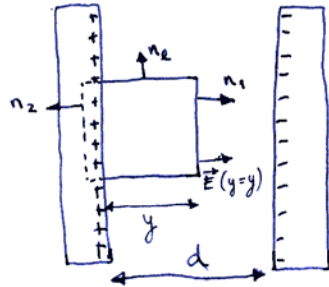
2º) Aplicación de la ley de Gauss

→ Elegir la sup. gaussiana

la superficie gaussiana será una lata, que tendrá una de sus tapas dentro del conductor ( $\vec{E} = \vec{0}$ ) para evitarnos una integral (la lata puede ser cilíndrica o prismática -octaedro).



vista en perspectiva (sin placa-)



Vista de perfil

→ Calcular el flujo eléctrico en la sup. elegida

$$\Phi_D = \Phi_{\text{tapa dentro conductor}} + \Phi_{\text{sup. lateral}} + \Phi_{\text{tapa entre las dos placas}} = S_1 \cdot D(y=y) \cdot \cos 0$$

$\vec{E} = \vec{0}$        $\vec{E}$  tangente a la superficie

$$\Phi_D = S_1 \cdot D(y=y)$$

→ Calcular la carga total encerrada  
(señalar dibujo en perspectiva)

$$q_{\text{real encerrada}} = \sigma \cdot S_1$$

→ Aplicar la igualdad de la ley de Gauss

$$\Phi_D = q_{\text{encerrada}} \Rightarrow S_1 \cdot D(y=y) = \sigma \cdot S_1$$

$$\Rightarrow D(y=y) = \sigma \Rightarrow \left\{ \vec{D} \right\}_{xyz} = \sigma \cdot \left[ \frac{C}{m^2} \right] \alpha y < d$$

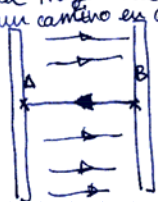
3º) Calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

1º) → obtener  $\vec{E}$  a partir de  $\vec{D}$  ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ )

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$$

$$\left\{ \vec{E} \right\}_{xyz} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[ \frac{N}{C} \right] \quad 0 < y < d$$

2º) Elegir una trayectoria para ir de la placa - a la placa + del condensador, utilizando un camino en donde conozcamos  $\vec{E}$  (p. que  $\vec{E}$  lo hubiere salido o mismo si el camino hubiera sido  $\vec{E}$ ).



¿Y si hubiéramos tomado otros puntos del conductor?

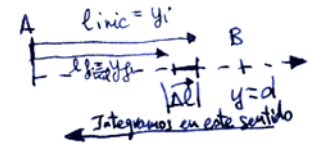
Cálculo de la ddp entre electrodos

3º) Calcular  $V$  ( $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ )  $V$  debe depender linealmente de la carga  
( $V_A - V_B$ )<sub>CS</sub> =  $-\int_B^A |\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos(\vec{E}; d\vec{l}) = - \int_B^A |\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos(\pi \text{ rad})$

¿Cuánto vale  $|d\vec{l}|$ ?

$$d\vec{l} \approx \Delta \vec{l} = |\Delta \vec{l}| \cdot (-\vec{u}_y)$$

$\vec{u}_y$



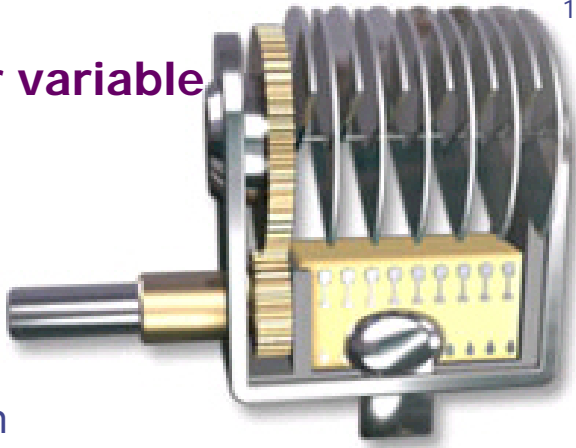
$$V_A - V_B = + \int_B^A |\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| = - \int_{y=d}^{y=0} |\vec{E}| \cdot dy = - \int_{y=d}^{y=0} E_y \cdot dy = - \int_{y=d}^{y=0} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dy$$

$$= - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{y=d}^{y=0} dy = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \{0 - d\} = + \frac{\sigma}{\epsilon_0} d > 0$$



## Condensador variable

Formado por varias placas planas conectadas en paralelo, con superficie común variable



Capacitance

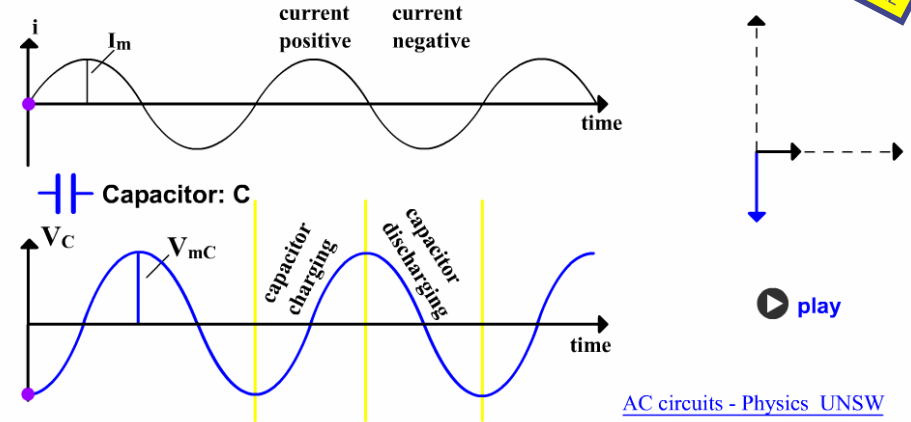


50 pF

<http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/varcapacitor/index.html>

## Condensador conectado fuente AC

OPCIONAL



[AC circuits - Physics UNSW](http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/AC.html)

El área bajo la gráfica de la intensidad es la carga almacenada en cada instante. La mitad del tiempo, el condensador se carga (área en azul claro) y la otra mitad se descarga (área azul oscuro). La corriente es máxima  $\frac{1}{4}$  de ciclo antes que la tensión.

<http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/AC.html#capacitors>