La Ley de Gauss

I. Flujo de un campo vectorial e integral vectorial de superficie.

El flujo de un campo vectorial $\vec{E}$ a través de una superficie S representa el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie. Si el campo vectorial es uniforme ($\vec{E}$ es constante en módulo, dirección y sentido) y S es una superficie plana, el flujo se calcula matemáticamente como el producto escalar de $\vec{E}$ por el vector superficie $\vec{S}$

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{S} = \vec{E}\cdot S\cdot\vec{n} = \left|\vec{E}\right|\cdot S\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos\alpha = \left|\vec{E}\right|\cdot S\cdot\cos\alpha \quad \left[\frac{N\cdot m^2}{C}\right]$$

Cuando el campo vectorial es variable y/o la superficie no es plana, esta se divide en pequeños trozos que se consideran planos y en los que el vector $\vec{E}$ se supone constante. El flujo total será la suma del flujo para cada una de los trozos de superficie. Si, por ejemplo, el número de divisiones de la superficie es de $n = 4$,

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} = \sum_{i=1}^{4}\Phi_i = \sum_{i=1}^{4}\vec{E}_i\cdot\vec{S}_i = \vec{E}_1\cdot\vec{S}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{S}_2 + \vec{E}_3\cdot\vec{S}_3 + \vec{E}_4\cdot\vec{S}_4 =$$

$$= \left|\vec{E}_1\right|\cdot S_1\cdot\cos\alpha_1 + \left|\vec{E}_2\right|\cdot S_2\cdot\cos\alpha_2 + \left|\vec{E}_3\right|\cdot S_3\cdot\cos\alpha_3 + \left|\vec{E}_4\right|\cdot S_4\cdot\cos\alpha_4$$

El valor exacto del flujo se obtiene cuando la superficie se divide en un número *n* muy grande ($n \to \infty$) de trozos muy pequeños de superficie (elementos diferenciales de superficie, ds)

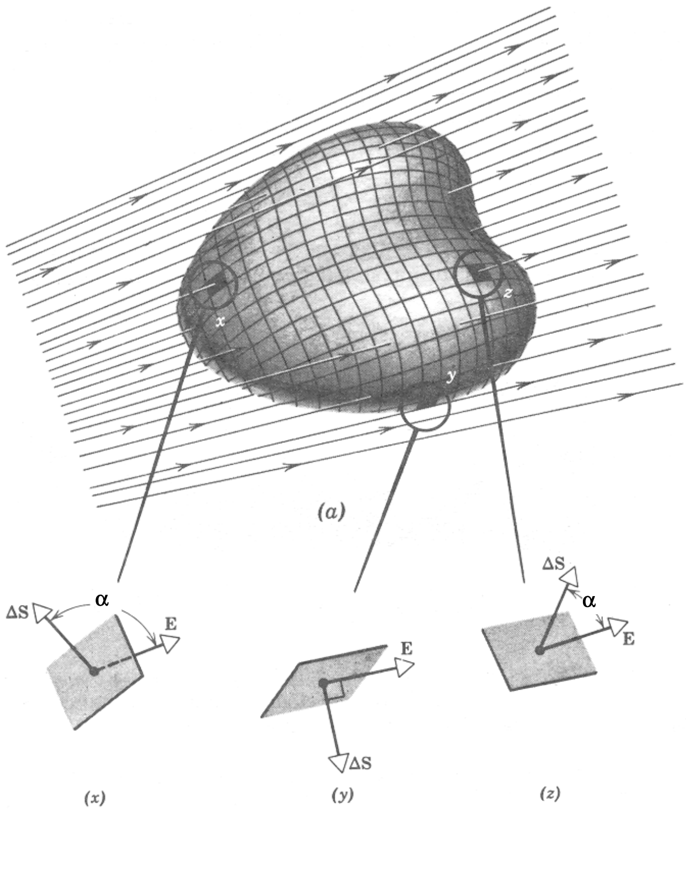
$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n}\Phi_{Ei} = \sum_{i=1}^{n}\left|\vec{E}_i\right|\cdot S_i\cdot\cos\alpha_i$$

$$\text{si } n \to \infty$$

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{\infty}\Phi_{Ei} = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\vec{E}_i\right|\cdot \Delta S_i\cdot\cos\alpha_i =$$

$$= \int_S \left|\vec{E}\right|\cdot ds\cdot\cos\alpha =$$

$$= \int_S \left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot ds\cdot\cos\alpha = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$$



II. Vector Desplazamiento Eléctrico $\vec{D}$.

El vector desplazamiento eléctrico o densidad de flujo eléctrico, $\vec{D}$, se obtiene multiplicando el vector intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ por la permitividad dieléctrica del vacío ε_0,

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \ \frac{C^2}{N \cdot m^2} \qquad \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \ \left[\frac{C}{m^2}\right]}$$

Así como el vector $\vec{E}$ representa una fuerza sobre la unidad de carga positiva, al vector $\vec{D}$ no siempre se le puede dar un significado físico directo. Sus unidades son las mismas que las de la densidad superficial de carga σ_S ; en las superficies de los conductores, el módulo de $\vec{D}$ y el valor absoluto de σ_S coinciden, $|\vec{D}| = |\sigma_S|$. Por ser el vector $\vec{D}$ un vector paralelo al vector $\vec{E}$, las líneas de fuerza asociadas al vector $\vec{D}$ serán iguales a las que se dibujan para representar el campo eléctrico.

III. Enunciado de la Ley de Gauss.

"El flujo del vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ a través de una superficie cerrada arbitraria S, es igual a la carga real encerrada por dicha superficie."

$$\boxed{\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = q_{\text{real encerrada por S}}}$$

- $q_{\text{real encerrada}}$ es la carga neta (el número de protones o electrones en exceso que hay en el interior de la superficie); si la superficie encierra dos cargas q_+ y q_- con $|q_+| = |q_-|$, el flujo total será cero.
- $\vec{n}$ es el vector normal saliente a la superficie cerrada S.
- El hecho de que el flujo sea cero no implica que el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ en todos los puntos de la superficie S sea cero.
- Solo hay que considerar las cargas en el interior de la superficie S, aunque el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ sea debido también a otras cargas (o distribuciones de cargas) que se encuentran en el exterior.

IV. Aplicación al cálculo de $\vec{E}$.

La ley de Gauss se utilizará como herramienta para calcular el módulo de $\vec{E}$, $|\vec{E}|$, cuando podamos plantear la integral de flujo de $\vec{D}$, Φ_D, a través de una superficie cerrada (superficie gaussiana) y calcular la carga real encerrada por esa superficie. Esto solo se podrá hacer en muy pocos casos; se tratarán de flujos asociados a distribuciones infinitas y/o simétricas de carga.

La dirección y sentido del vector $\vec{E}$ y $\vec{D}$ deberán deducirse de un análisis vectorial, aplicando la ley de Coulomb y el ppo. de superposición.