

1.- En un electrodo metálico usado para soldadura, la corriente eléctrica circula axialmente (figura 1). Para calcular de forma aproximada la resistencia eléctrica del electrodo se propone el siguiente procedimiento: se divide este en cuatro partes cilíndricas, en las que la corriente circula paralela al eje y se distribuye uniformemente en cada sección (figura 2). Cada parte puede considerarse de radio constante, proporcional a su distancia al extremo O del electrodo (figura 3).

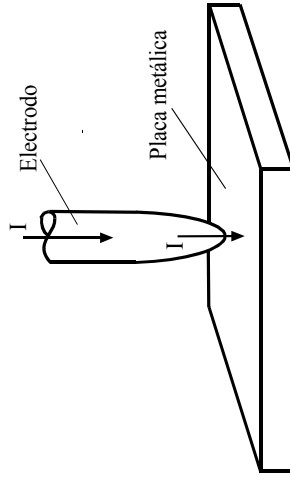


Figura 1

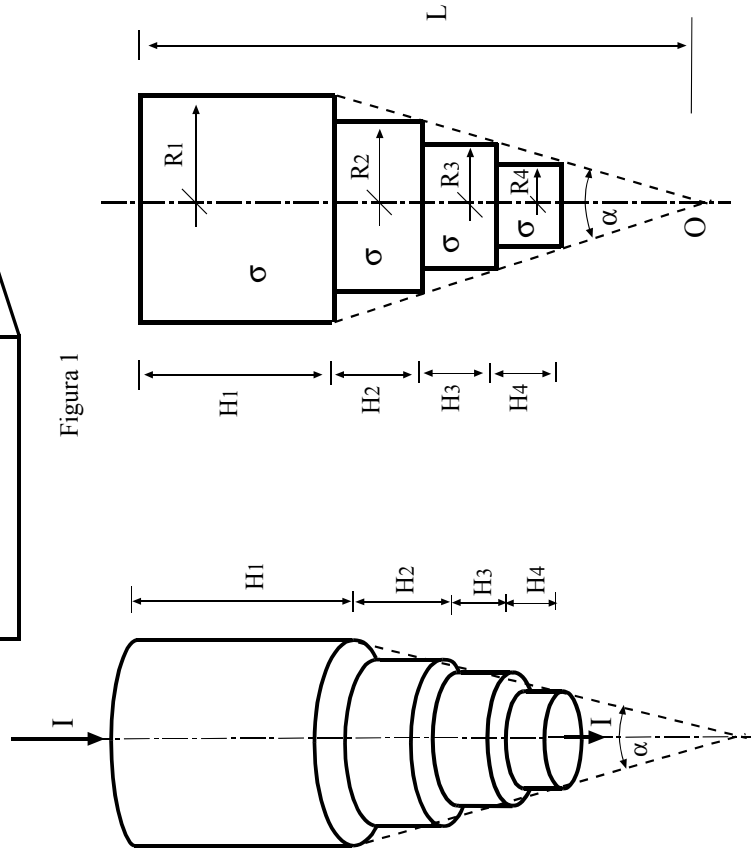


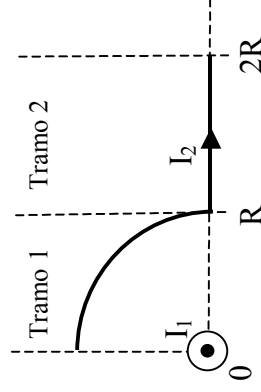
Figura 2

Figura 3

- Calcular la resistencia total del electrodo que se obtiene con este procedimiento.
- Calcular la máxima densidad volumétrica de potencia disipada por efecto Joule, e indicar cuál de las partes en que se ha dividido el electrodo disipa mayor potencia por efecto Joule.

Datos: $L = 10$ cm, $\alpha = \pi/6$, $\sigma = 20 \cdot 10^4$ (Ω m) $^{-1}$, $H_1 = 8$ cm, $H_2 = 0,75$ cm, $H_3 = 0,5$ cm, $H_4 = 0,25$ cm, $I = 50$ A

2.- Tenemos el sistema de conductores representado en la figura formado por un cable rectilíneo e indefinido, recorrido por una corriente I_1 , y un segundo circuito, compuesto de un cuarto de circunferencia y un tramo recto, recorrido por una corriente I_2 .



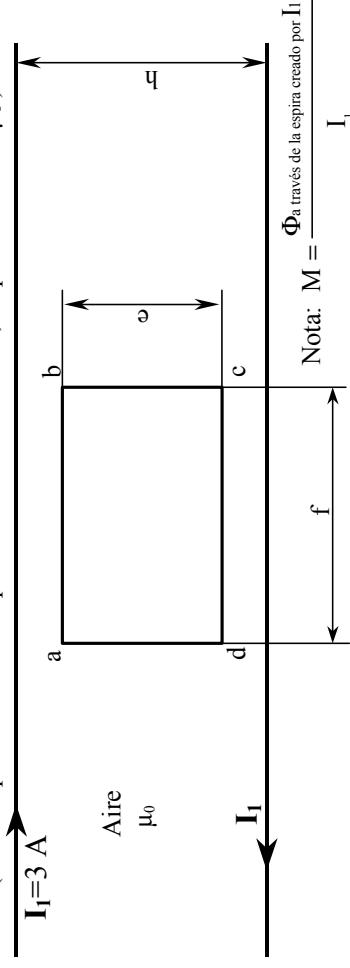
- Calcular la fuerza que ejerce el campo magnético creado por el cable rectilíneo (I_1) sobre cada uno de los tramos del segundo circuito (I_2).
- Indicar como gira el segundo circuito por la fuerza ejercida por el cable especificando la dirección del vector par de fuerzas ejercido, respecto al punto O.

Datos: $R = 1$ cm; $I_1 = 10$ kA; $I_2 = 250$ A; $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ T·m/A.

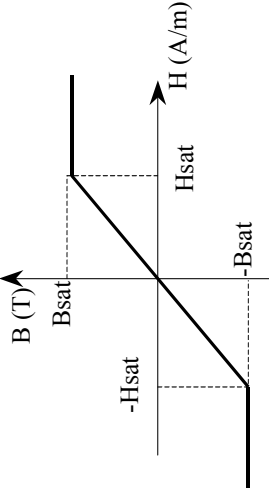


3.- Un sistema está compuesto por dos cables muy largos, uno de ida y otro de vuelta, por los que circula una corriente I_1 . Entre los dos cables se encuentra una espira, en el mismo plano que los cables y centrada.

a) Calcular el flujo a través de la espira debido a I_1 y el coeficiente de inducción mutua (en este apartado todo el espacio está relleno de aire, de permeabilidad μ_0).

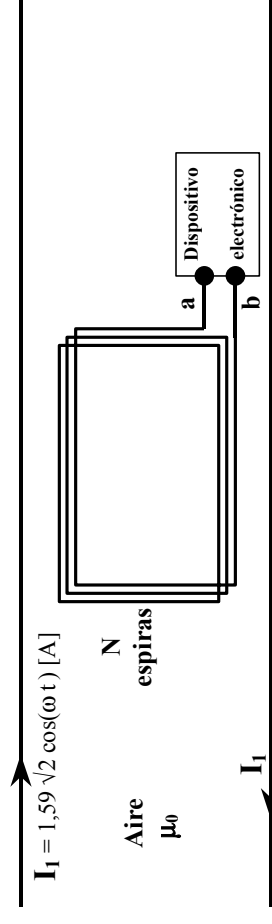


b) Si sustituimos el aire por un material no lineal, con permeabilidad constante μ_m hasta que se alcanza la saturación en B_{sat} (ver curva de magnetización), calcular el flujo sobre la espira cuando $I_1=1000$ A.



Nota: el valor mínimo de $|\vec{B}|$ en la espira se alcanza en la mitad entre los dos cables.

c) Queremos alimentar un dispositivo electrónico de muy bajo consumo con una bobina como la anterior pero con N espiras. Calcular el número aproximado de vueltas N , necesarias para obtener una fem $\mathcal{E}_{eficaz} = 1,5 V_{eficaces}$ cuando $I_1 = 1,59 \sqrt{2} \cos(\omega t)$ [A] y el sistema está relleno de aire. Dibujar la gráfica de $V_a - V_b$ en el rango $0 < t < 2,5 \mu s$.



Datos: Dimensiones: $h = 0,5$ m; $e = 0,3$ m; $f = 0,54$ m;

Material magnético: $B_{sat} = 1,6$ T; $H_{sat} = 1273$ A/m; $\mu_m = 1000 \mu_0$ (zona lineal);

Apartado c) $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ T·m/A; $\omega = 2 \pi \cdot 10^5$ s⁻¹;

Observación: Sistemas similares a éste se utilizan a veces para alimentar dispositivos como pueden ser tarjetas que al acercarlas a una fuente de campo magnético variable, actúan como mando a distancia sin necesidad de pilas o baterías.

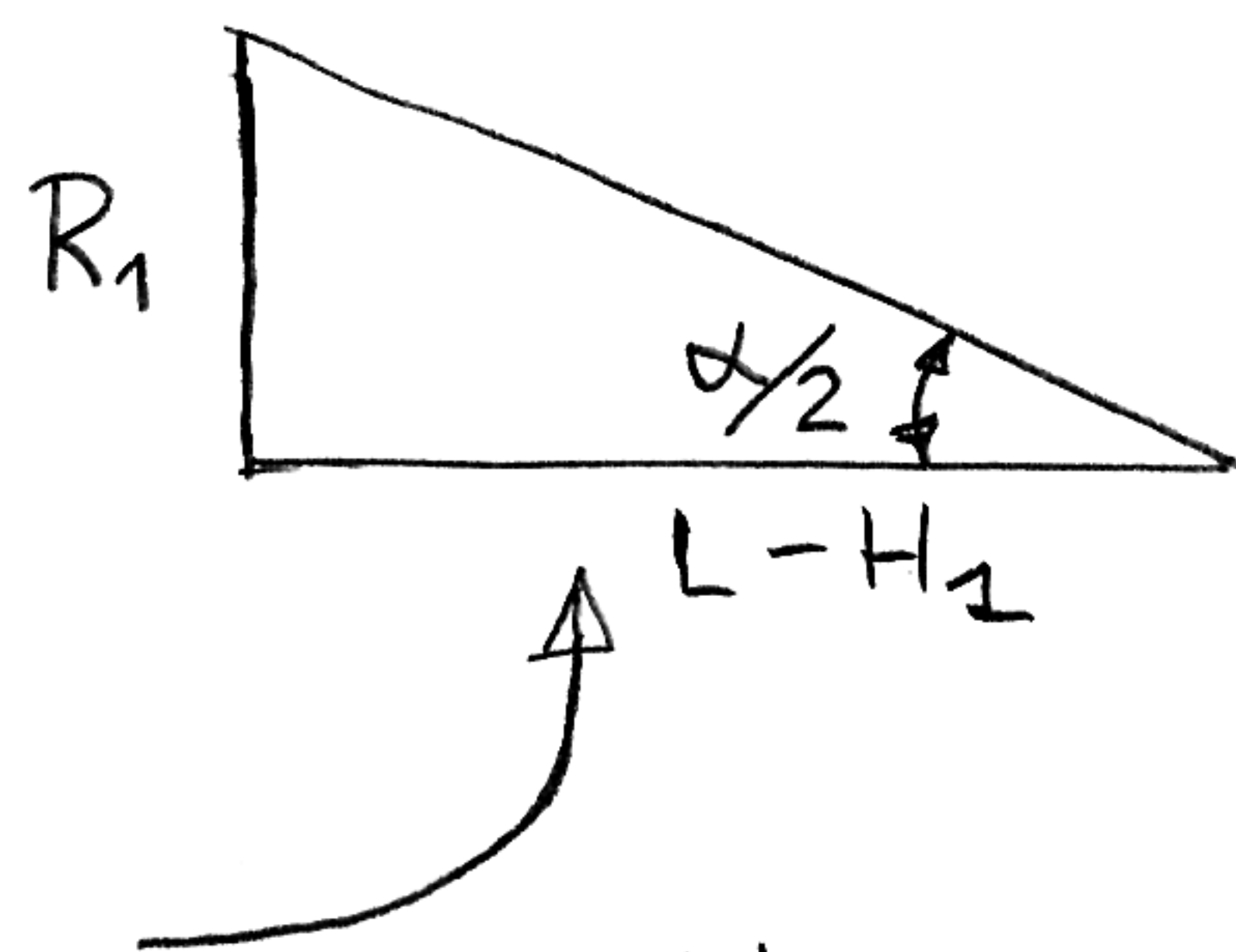
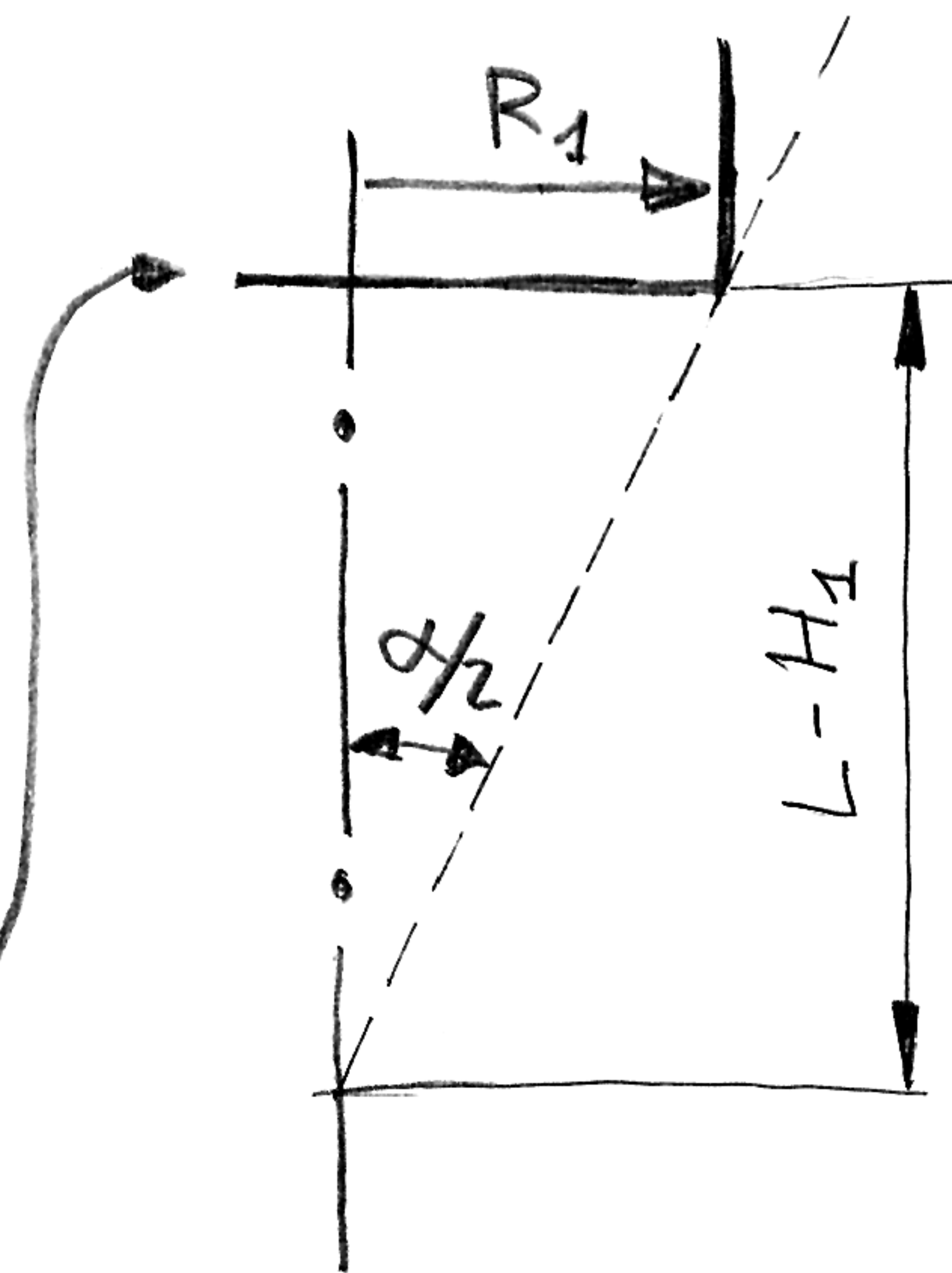
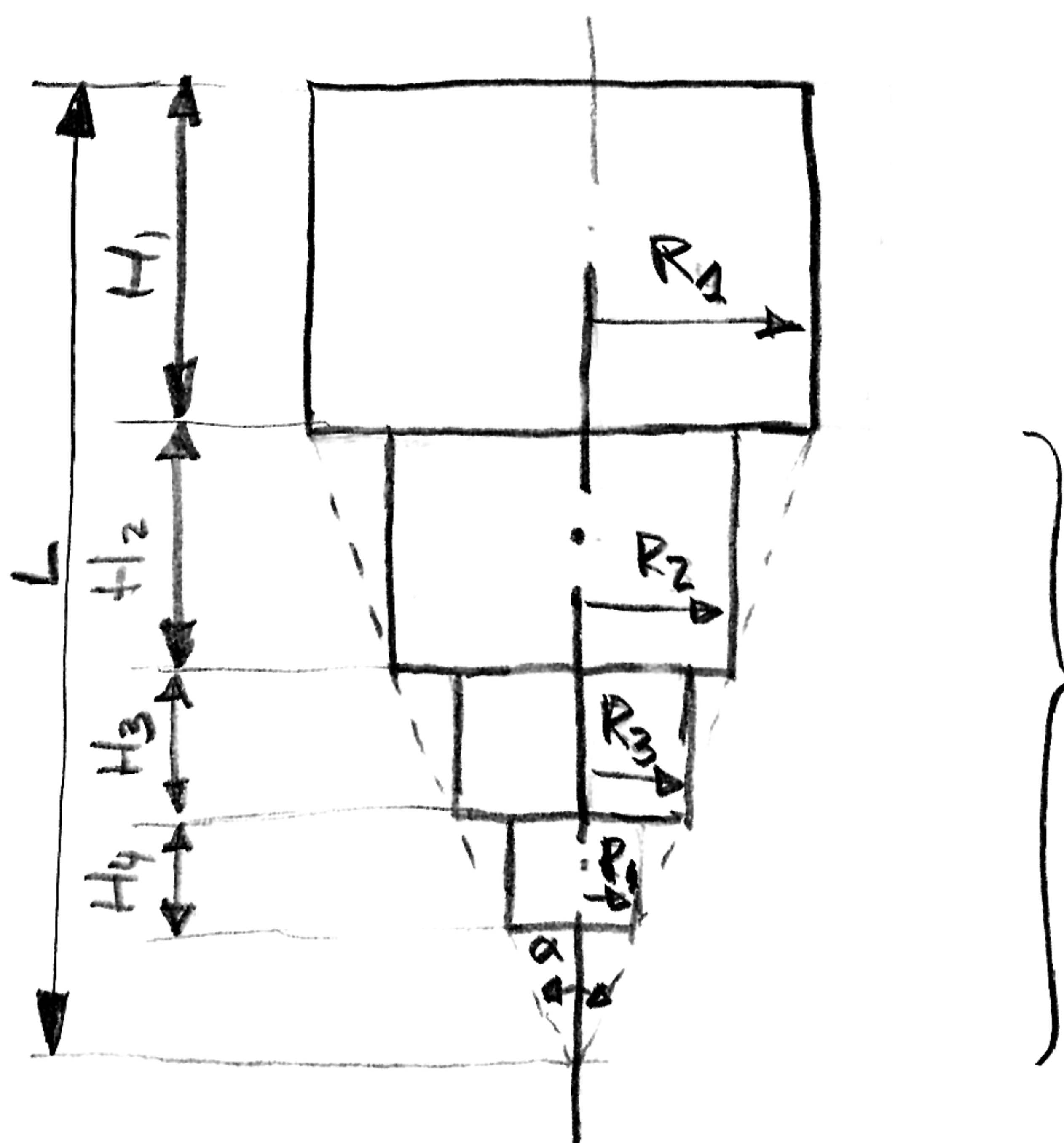
Nota 1: Todos los apartados del examen tienen la misma puntuación. Hacer cada ejercicio en hojas distintas.

Nota 2: Los alumnos que se presentan a los dos parciales, deben realizar únicamente los apartados marcados con

Ejercicio 1, 2º Parcial

Antes de comenzar a calcular los parámetros eléctricos, debemos calcular los radios R_1, R_2, R_3 y R_4 .

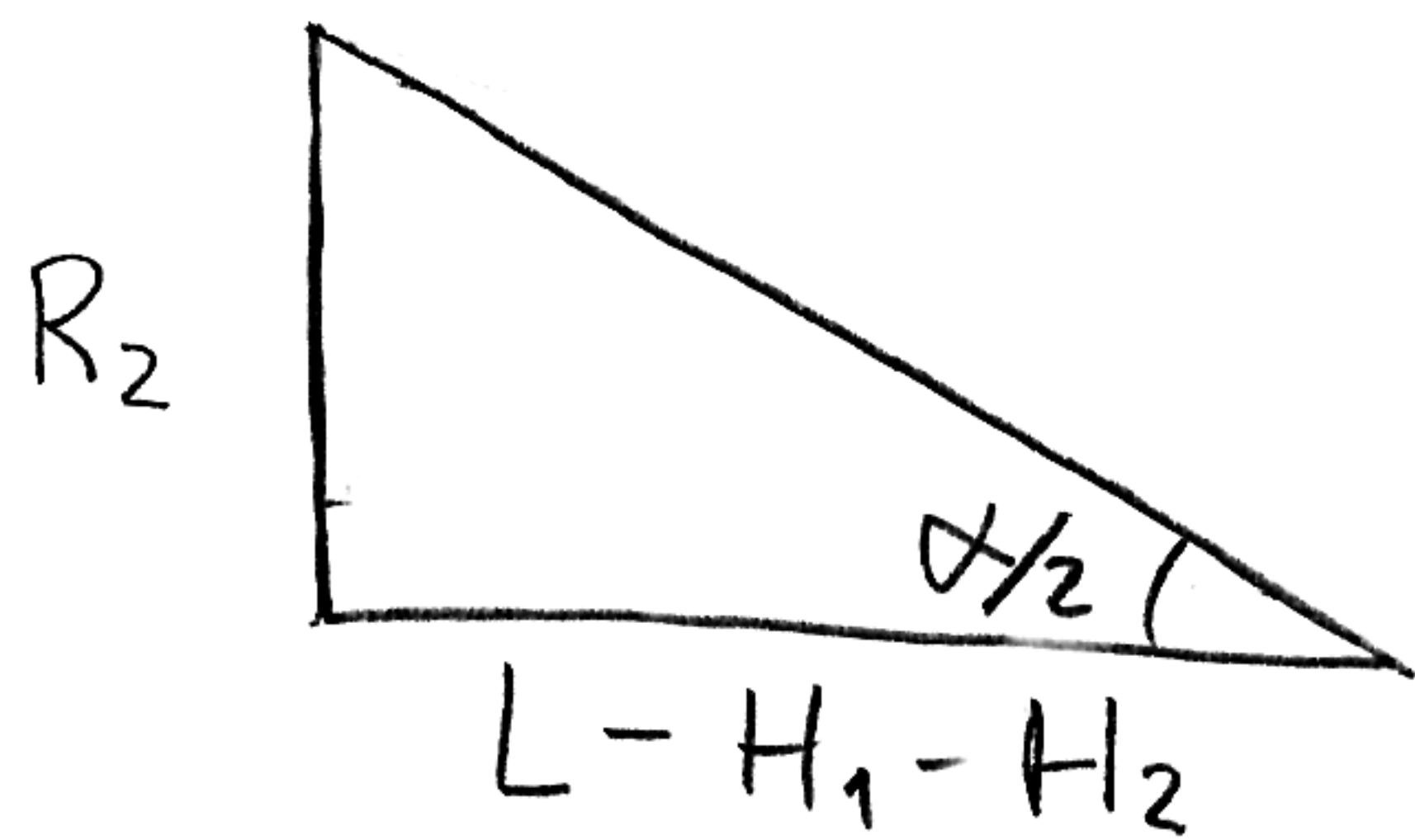
* Cálculo de los radios



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

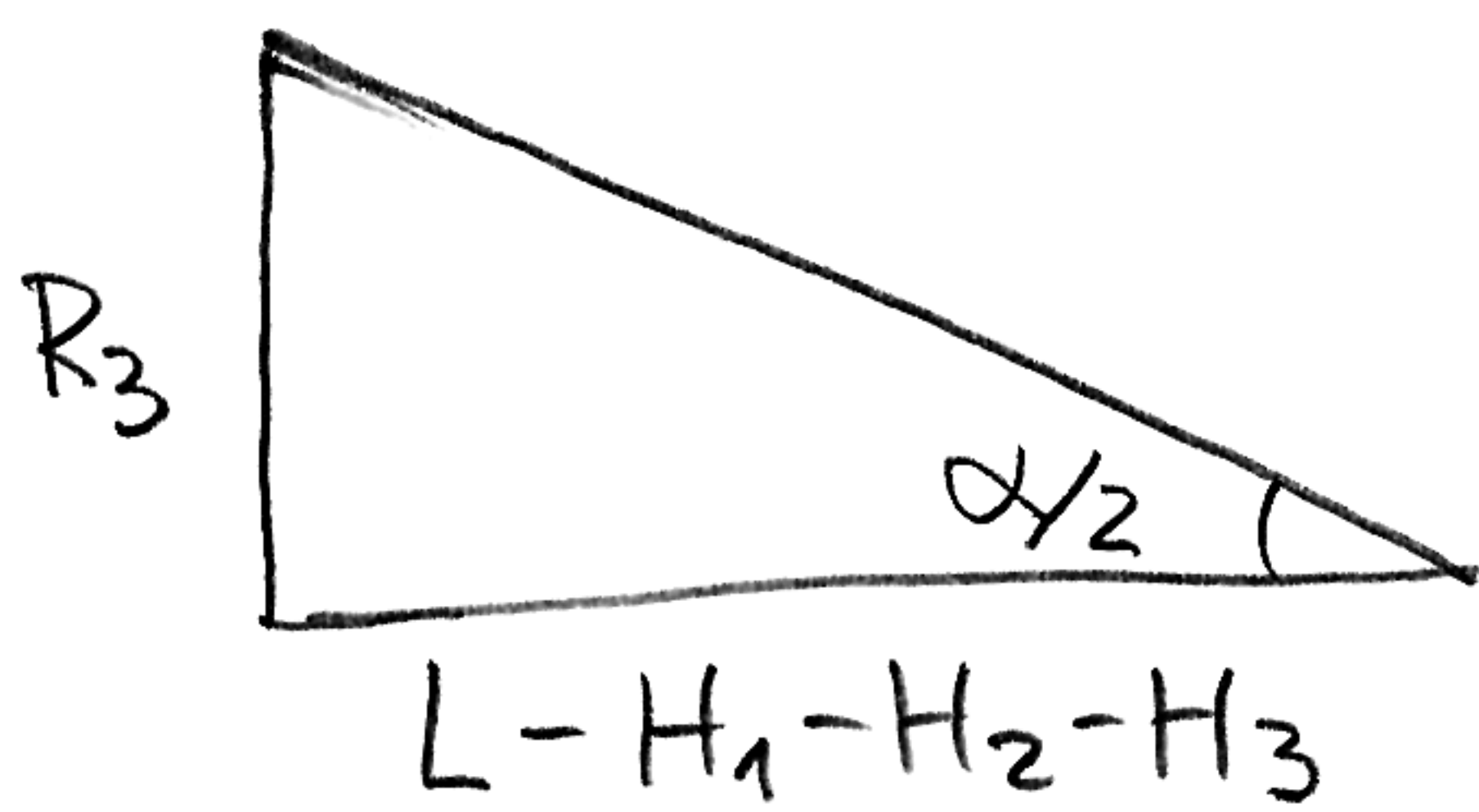
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R_1}{L - H_1}$$

$$\Rightarrow R_1 = (L - H_1) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5,36 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



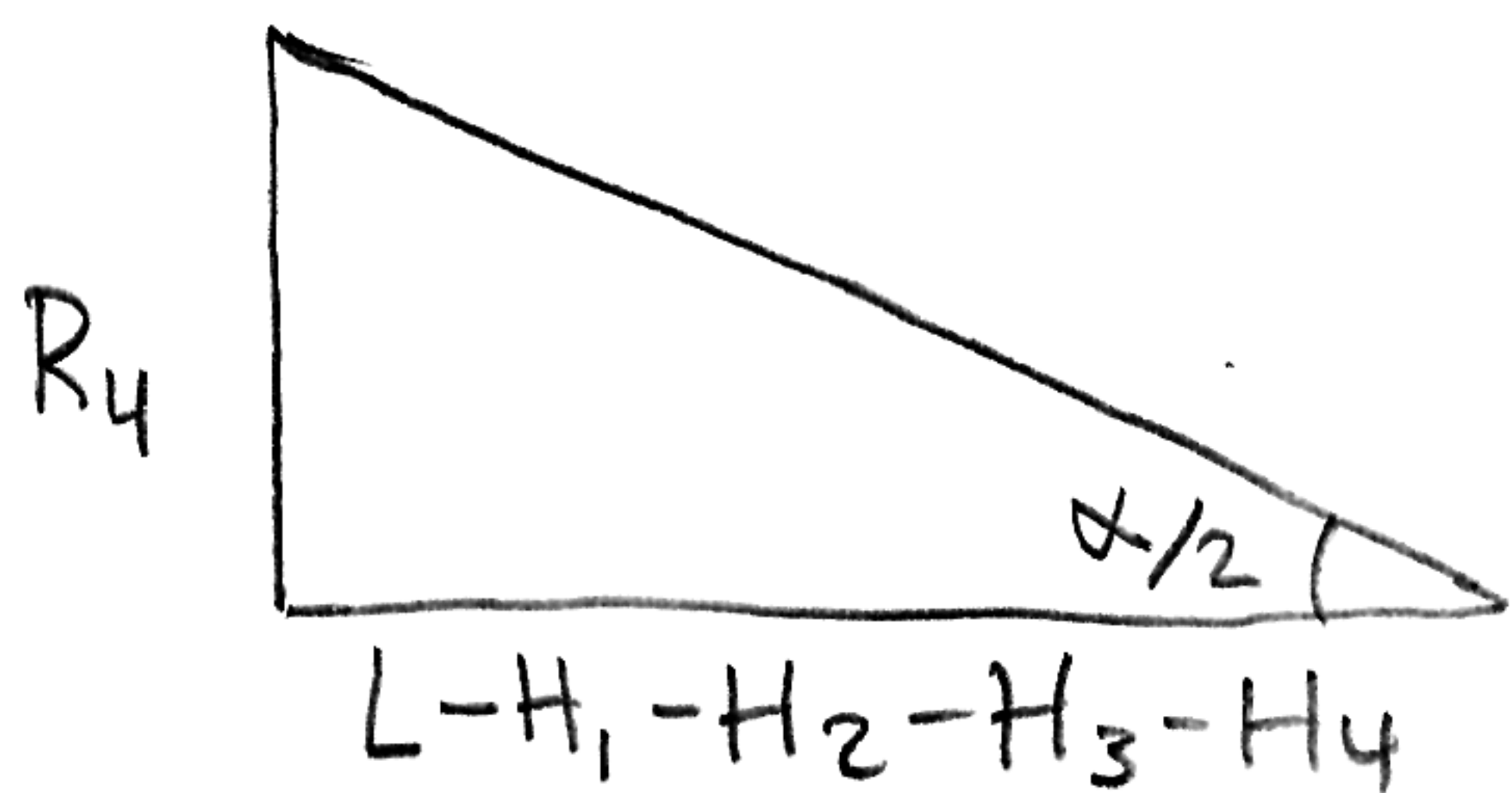
$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R_2}{L - H_1 - H_2}$$

$$\Rightarrow R_2 = (L - H_1 - H_2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3,35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R_3}{L - H_1 - H_2 - H_3}$$

$$R_3 = (L - H_1 - H_2 - H_3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

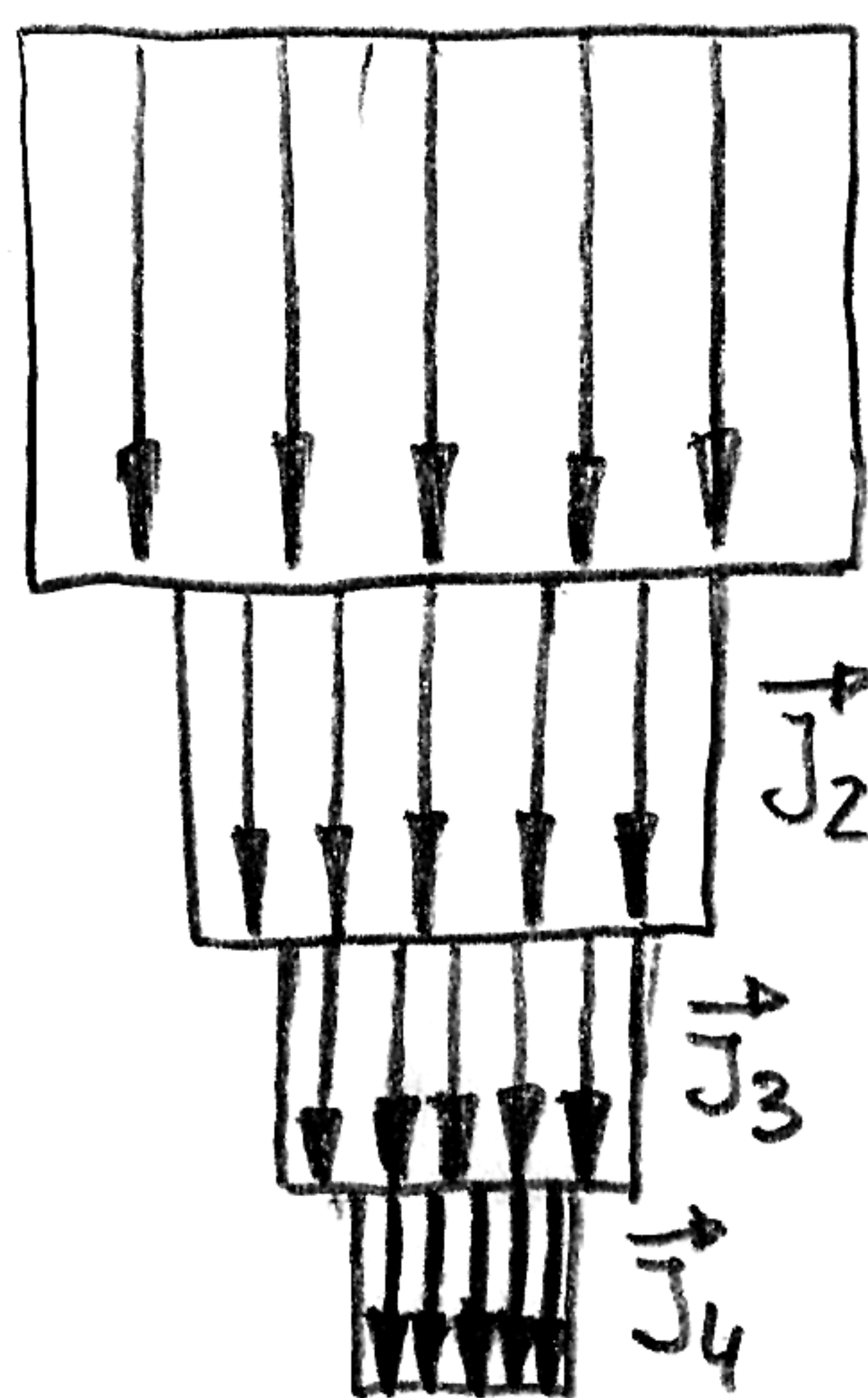


$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R_4}{L - H_1 - H_2 - H_3 - H_4}$$

$$R_4 = (L - H_1 - H_2 - H_3 - H_4) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

* Cálculo de las densidades de corriente

La corriente que circula por el electrodo es I , independientemente de la sección que estemos analizando. Teniendo en cuenta las simplificaciones que nos indica el enunciado (la corriente circula paralela al eje y se distribuye uniformemente en cada sección), llegamos al siguiente resultado:



$$I = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = J_1 \pi R_1 \Rightarrow |\vec{J}_1| = J_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

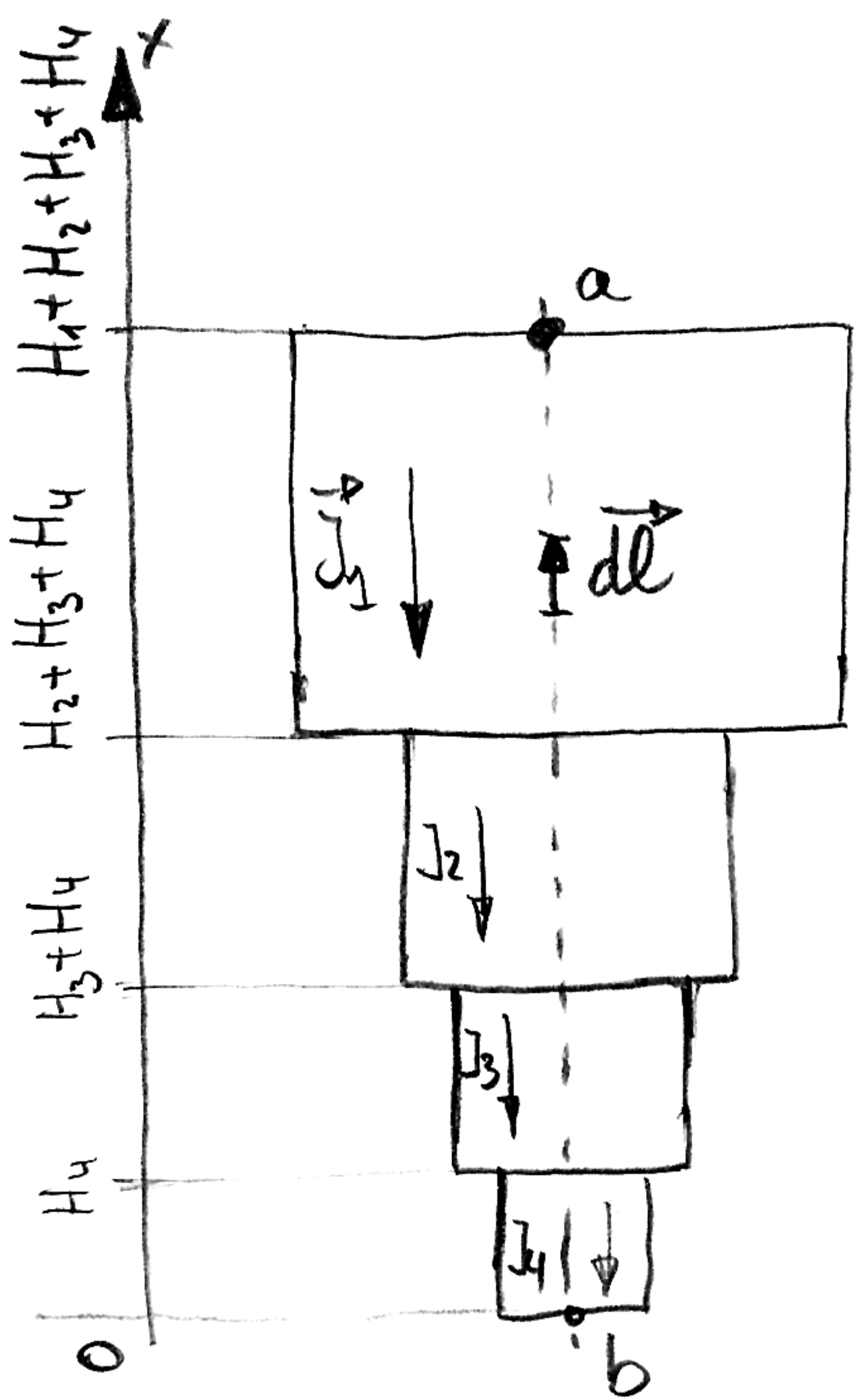
$\vec{J}_1 = \text{cte}$
 $\vec{J}_1 \parallel d\vec{S}$

$$I = \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} = J_2 \pi R_2 \Rightarrow J_2 = \frac{I}{\pi R_2^2}$$

$\vec{J}_2 = \text{cte}$
 $\vec{J}_2 \parallel d\vec{S}$

$$I = \int_{S_3} \vec{J}_3 \cdot d\vec{S} = J_3 \pi R_3 \Rightarrow J_3 = \frac{I}{\pi R_3^2}$$

$$I = \int_{S_4} \vec{J}_4 \cdot d\vec{S} = J_4 \pi R_4 \Rightarrow J_4 = \frac{I}{\pi R_4^2}$$



$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{material óhmico}}{=} - \int_b^a \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} =$$

\vec{J} opuesto a $d\vec{l}$

$$= - \int_b^a \frac{|\vec{J}|}{\sigma} |d\vec{l}| \cdot \cos \pi = \int_b^a \frac{J}{\sigma} dl =$$

$$= \int_0^{H_4} \frac{J_4}{\sigma} dl + \int_{H_4}^{H_3+H_4} \frac{J_3}{\sigma} dl + \int_{H_3+H_4}^{H_2+H_3+H_4} \frac{J_2}{\sigma} dl + \int_{H_2+H_3+H_4}^{H_1+H_2+H_3+H_4} \frac{J_1}{\sigma} dl =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left(J_4 H_4 + J_3 H_3 + J_2 H_2 + J_1 H_1 \right) =$$

$$= \frac{I}{\pi \sigma} \left(\frac{H_4}{R_4^2} + \frac{H_3}{R_3^2} + \frac{H_2}{R_2^2} + \frac{H_1}{R_1^2} \right)$$

$$\Rightarrow R_{\text{TOTAL}} = \frac{V_a - V_b}{I} = \frac{1}{\pi \sigma} \left(\frac{H_4}{R_4^2} + \frac{H_3}{R_3^2} + \frac{H_2}{R_2^2} + \frac{H_1}{R_1^2} \right) = 9,7 \text{ m}\Omega$$

b.1 Calcular la máxima densidad volumétrica de potencia disipada por efecto Joule.

$$\text{Densidad volumétrica de potencia} = \frac{dP}{dz} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\sigma}$$

material
ohmico

$\Rightarrow \frac{dP}{dz}$ es máxima cuando J es máxima \Rightarrow tramo del electrodo de R_4

$$\left. \frac{dP}{dz} \right|_{\text{máx}} = \frac{J_4^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma \pi^2 R_4^2} = 8,87 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$$

b.2 Indicar cuál de las partes en las que se ha dividido el electrodo disipa mayor potencia por efecto Joule.

Ahora hablamos de potencia de cada tramo, no de densidad de potencia. Por tanto podríamos calcular la potencia disipada de varias formas:

$$P_{\text{tramo}} = \begin{cases} = I \cdot \Delta V_{\text{tramo}} \\ = I^2 \cdot R_{\text{tramo}} \\ = \int_{\text{volumen del tramo}} \frac{dP}{dz} \cdot dz = \int_{\text{volumen del tramo}} \frac{J^2}{\sigma} dz \stackrel{J = \text{cte en cada tramo}}{=} \frac{J^2}{\sigma} \int_{\text{volumen tramo}} dz = \frac{J^2}{\sigma} \text{Volumen} \end{cases}$$

Por ejemplo, si utilizamos el último método obtenemos

$$R_1 \Rightarrow P_1 = \frac{J_1^2}{\sigma} \cdot (\pi R_1^2 H_1) = 11,08 \text{ W}$$

volumen cilindro

$$R_2 \Rightarrow P_2 = \frac{J_2^2}{\sigma} (\pi R_2^2 H_2) = 2,66 \text{ W}$$

$$R_3 \Rightarrow P_3 = \frac{J_3^2}{\sigma} (\pi R_3^2 H_3) = 4,93 \text{ W}$$

$$R_4 \Rightarrow P_4 = \frac{J_4^2}{\sigma} (\pi R_4^2 H_4) = 5,54 \text{ W}$$

Máximo P_1

Observaciones:

Es conveniente hacer notar que la densidad de potencia $\frac{dP}{d\tau}$ es máxima donde J es máxima porque $\frac{dP}{d\tau} = \frac{J^2}{\sigma}$.

Por ello, $\left. \frac{dP}{d\tau} \right|_{\max}$ se produce en la punta del electrodo (H_4).

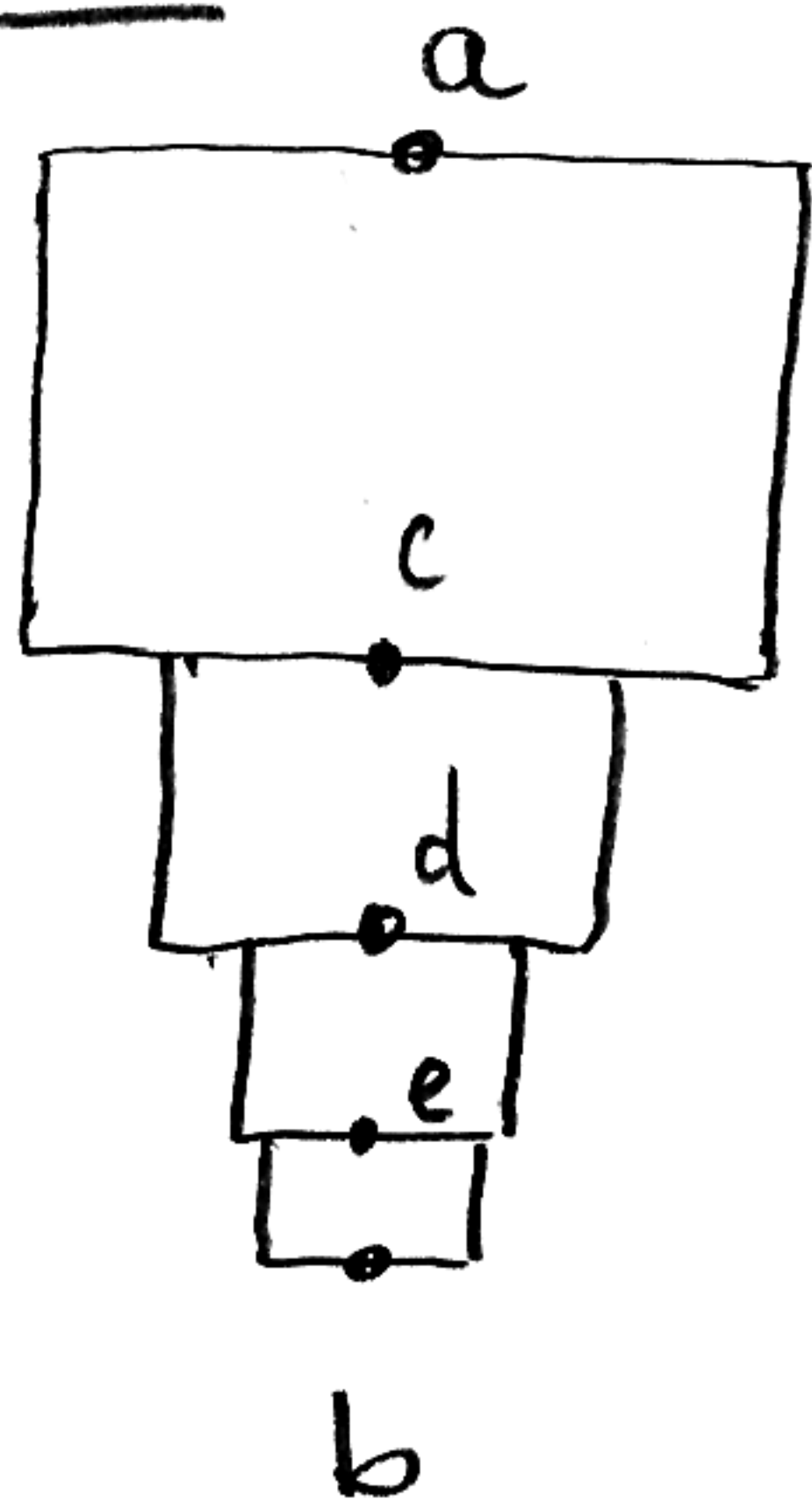
Pero ese tramo tiene también un volumen más pequeño que el resto. Por esto, para saber el tramo en donde se disipa más potencia hay que calcular irremediablemente la potencia disipada en cada tramo.

Haciendo cuentas llegamos al resultado de que el tramo donde se disipa más potencia es el H_1 , donde la densidad de potencia $\frac{dP_1}{d\tau}$ es mínima pero que compensa con su volumen notablemente mayor que el resto.

La mayor temperatura se obtendrá en la punta del electrodo y es donde se comenzará a fundir el electrodo ($\frac{dP}{d\tau}$ máxima)

Nota 1: Dado que la corriente se reparte uniformemente en la sección, que es constante para cada tramo, se cumple que la resistencia de cada tramo es $\text{Resistencia}_{\text{tramo}} = \frac{\text{Longitud tramo}}{\sigma \text{ Sección transversal tramo}}$

Nota 2: El circuito equivalente del electrodo es



El diagrama muestra un circuito equivalente con cuatro resistencias en serie conectadas entre los puntos 'a' y 'b'. Las resistencias están etiquetadas como Resist₁, Resist₂, Resist₃ y Resist₄. Los puntos de conexión entre resistencias están etiquetados como 'c' y 'd'.

$$\text{Resist}_1 = \frac{H_1}{\sigma \pi R_1^2} = 4,4 \text{ m}\Omega$$
$$\text{Resist}_2 = \frac{H_2}{\sigma \pi R_2^2} = 1 \text{ m}\Omega$$
$$\text{Resist}_3 = \frac{H_3}{\sigma \pi R_3^2} = 2 \text{ m}\Omega$$
$$\text{Resist}_4 = \frac{H_4}{\sigma \pi R_4^2} = 2,2 \text{ m}\Omega$$

SEGUNDO PARCIAL

②

$$a) \text{ TRAMO } \overline{AB}; \quad d\vec{F}_{AB} = I_2 \cdot d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \vec{0} \quad N$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \cdot \vec{u}_\varphi$$

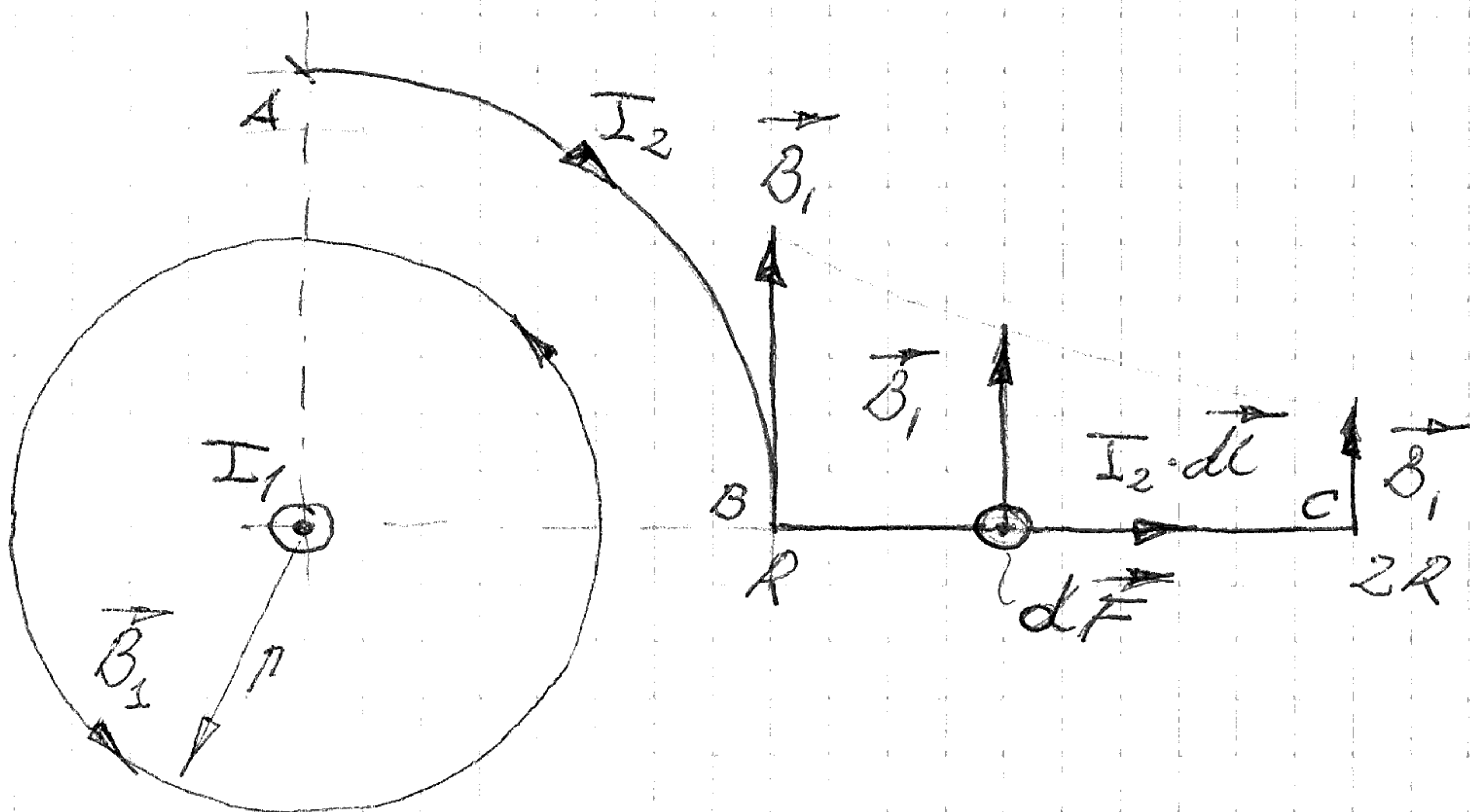
$$I_2 d\vec{l}_2 = I_2 \cdot R \cdot d\varphi (-\vec{u}_\varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{B}_1 \text{ forma un} \\ \text{ángulo de } \pi \end{array} \right\}$$

radianes con $I_2 \cdot d\vec{l}_2$

$$\text{TRAMO } \overline{BC}; \quad d\vec{F}_{BC} = I_2 \cdot d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot \vec{u}_\varphi \quad \left. \begin{array}{l} \forall R < r < 2R \end{array} \right\}$$

$$I_2 \cdot d\vec{l}_2 = I_2 dr \cdot \vec{u}_r$$

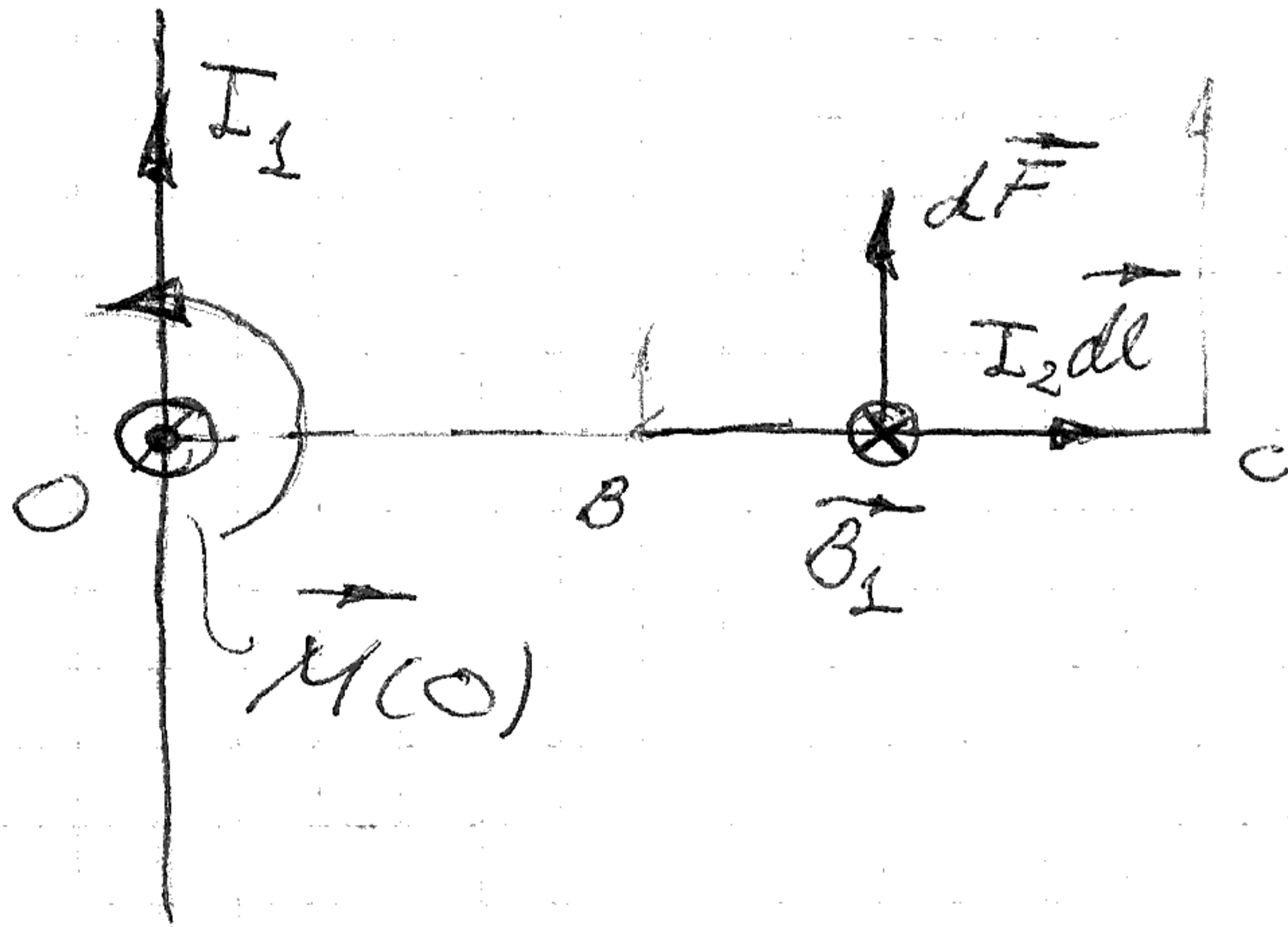


$$d\vec{F}_{BC} = I_2 \cdot dr \cdot |\vec{B}_1| \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{BC} = \int_R^{2R} d\vec{F}_{BC} = \int_R^{2R} I_2 \cdot dr \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi} \left[\frac{dr}{r} \right]_R^{2R} \vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{BC} &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{2R}{R} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln 2 \vec{u}_z = \\ &= \left\{ 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 250}{2\pi} \cdot \ln 2 \right\} \vec{u}_z = \\ &= 347,5 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{u}_z \text{ [N]} \end{aligned}$$

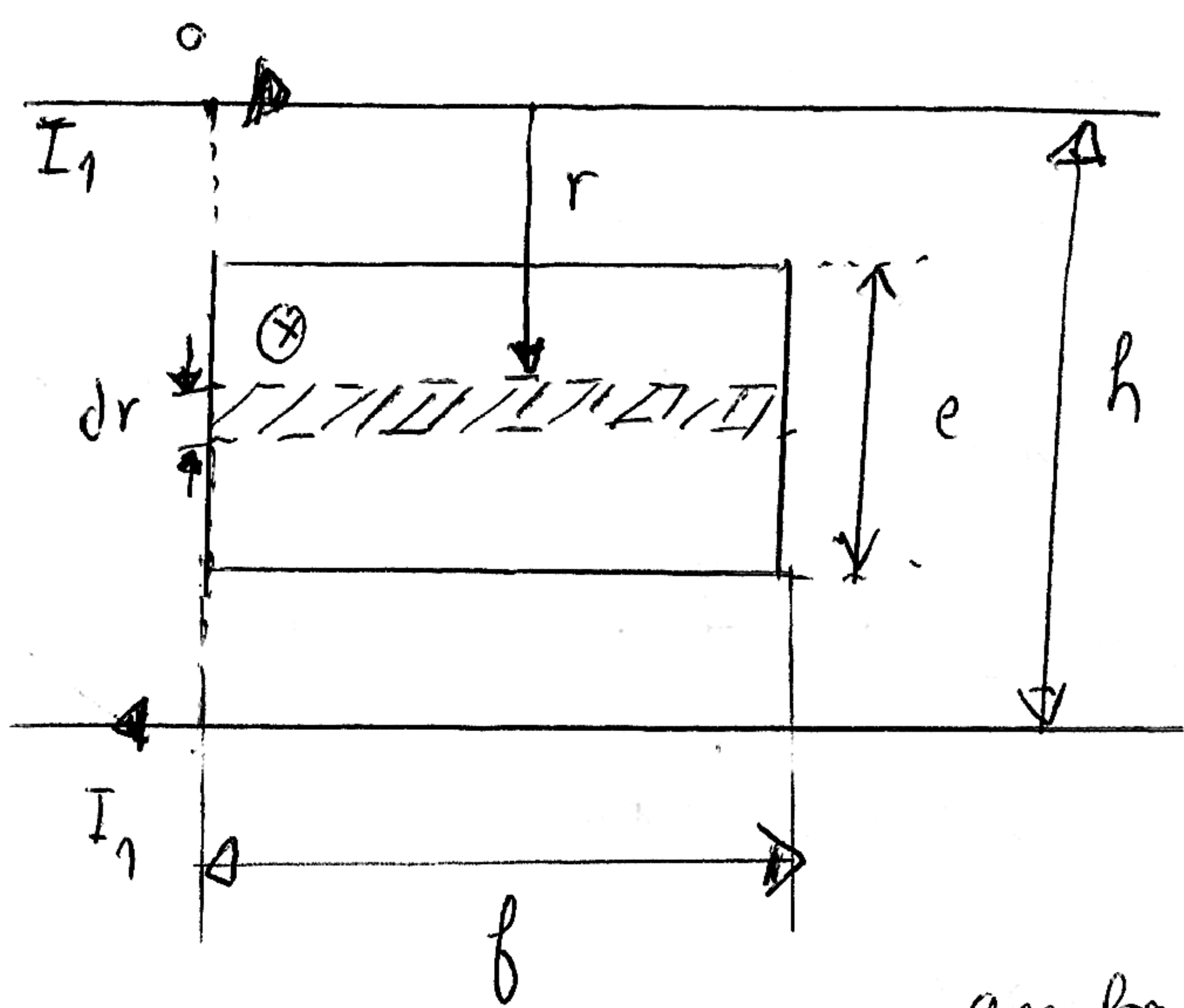
6/



El circuito ABC tendería a girar en sentido antihorario, acercándose hacia el cable por el que circula la corriente I_1

Ej 3:

a) calcular el flujo a través de la espira.



Vemos por simetría, que tanto el campo creado por el cable superior como el inferior en la zona de la espira tienen dirección hacia adentro del dibujo.

Vemos, también por simetría que ambos cables crean el mismo flujo sobre la espira. Por tanto, es suficiente calc el flujo de uno de los cables sobre la espira y multiplicar por 2.

El campo creado por un cable rect e indefinido se obt fácilmente usando Ampere, obteniéndose $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{u}_r$

donde r es la distancia del pto en el que calculamos al cable. Si planteamos el calc del flujo para el cable de arriba

$$\text{tenemos; } \phi_s = \iint_{\text{Espira}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_s B ds = \iint_s \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} ds$$

(Tomamos dS en la espira hacia adentro del papel)

Si dividimos la superficie de la espira en trozos como el rayado tengo que: $ds = b dr$

$$\Rightarrow \phi_s = \int_{\frac{(h-e)}{2}}^{\frac{(h-e)}{2} + e} \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln r \Big|_{\frac{(h-e)}{2}}^{\frac{(h-e)}{2} + e} = \frac{\mu_0 b I_1}{2\pi} \ln \frac{h+e}{h-e} = 1,5 \cdot 10^{-7} I_1 \ln \frac{h+e}{h-e}$$

El flujo total pedido será:

$$\phi_t = 2\phi_s = 3 \cdot 10^{-7} I_1 \ln \frac{h+e}{h-e}$$

y la inducción mutua será:

$$M = \frac{\Phi_r}{I_1} = \frac{2 \cdot \mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{h+e}{h-e} = 0,3 \mu H$$

b) En los datos para este apartado hace un error, μ_m debiera valer $\mu_m = 1000 \mu_0$, para que se cumpla $B_{sat} = \mu H_{sat}$.
Utilizando el dato de que $|B|$ es mínimo en $h/2 \Rightarrow |H|$ también calcularé en primer lugar cuanto vale \bar{H} en el pto mínimo, para saber si el material está ya saturado allí.

$$H_r(r=h/2) = 2H_1 = \frac{2I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(h/2)} = 1273 \text{ A/m}$$

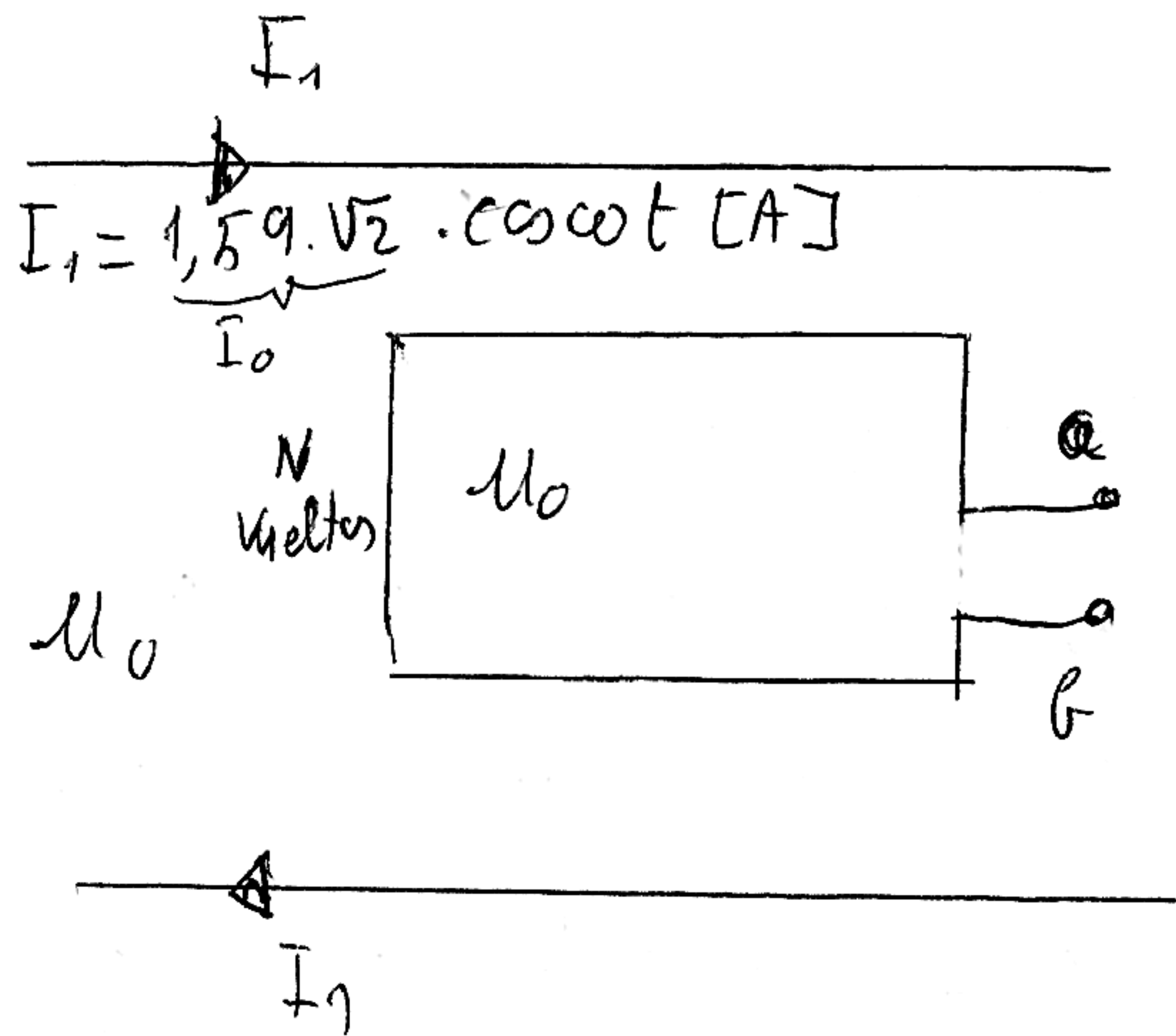
Esta expr se obtiene usando la ley de Ampere generalizada.

Vemos, pues, que si H_r iguala el valor de saturación en el punto donde es mínimo, lo superará en todos los demás. Por ello podemos concluir que en este caso, para todos los pto de la espira $|H| \geq H_{sat} \Rightarrow |B| = B_{sat}$

Por tanto el flujo de \vec{B} a través de la espira vale
ahora: $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S B_{sat} \cdot d\vec{s} = B_{sat} \cdot S = B_{sat} \cdot e \cdot f = 0,26 \text{ WR}$

Segundo parcial cono Julio

Ej 3: (1) Calc el nº de vueltas necesario para obt una f.e.m. eficaz de $E_{ef} = 1,5 V$.



Dibujar grafica de $V_a - V_b$ en el rango $0 < t < 2,5 \mu s$

Para calc la f.e.m. usaremos la ley de Faraday $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$

salvo el nº de vueltas N

La expr del flujo la hemos calc en el apartado a); así que tenemos: $\mathcal{E} = - \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot \beta \cdot \ln \frac{h+e}{h-e} \cdot N \cdot \frac{dI_1}{dt}}{\pi} = \frac{\mu_0 N \cdot \beta \cdot \ln \frac{h+e}{h-e} \cdot \omega \cdot I_0 \sin \omega t}{\pi}$

Podría $I_1 = I_0 \cos \cot$ con $I_0 = 1,59 \cdot \sqrt{2}$

Nos piden el nº de vueltas necesario para que el valor ef de

\mathcal{E} sea $1,5 V \Rightarrow$ su amplitud debe ser $\mathcal{E}_0 = E_{ef} \cdot \sqrt{2}$

igualando esta expresión a la amplitud de la ecuación para \mathcal{E} , obt antes, tengo:

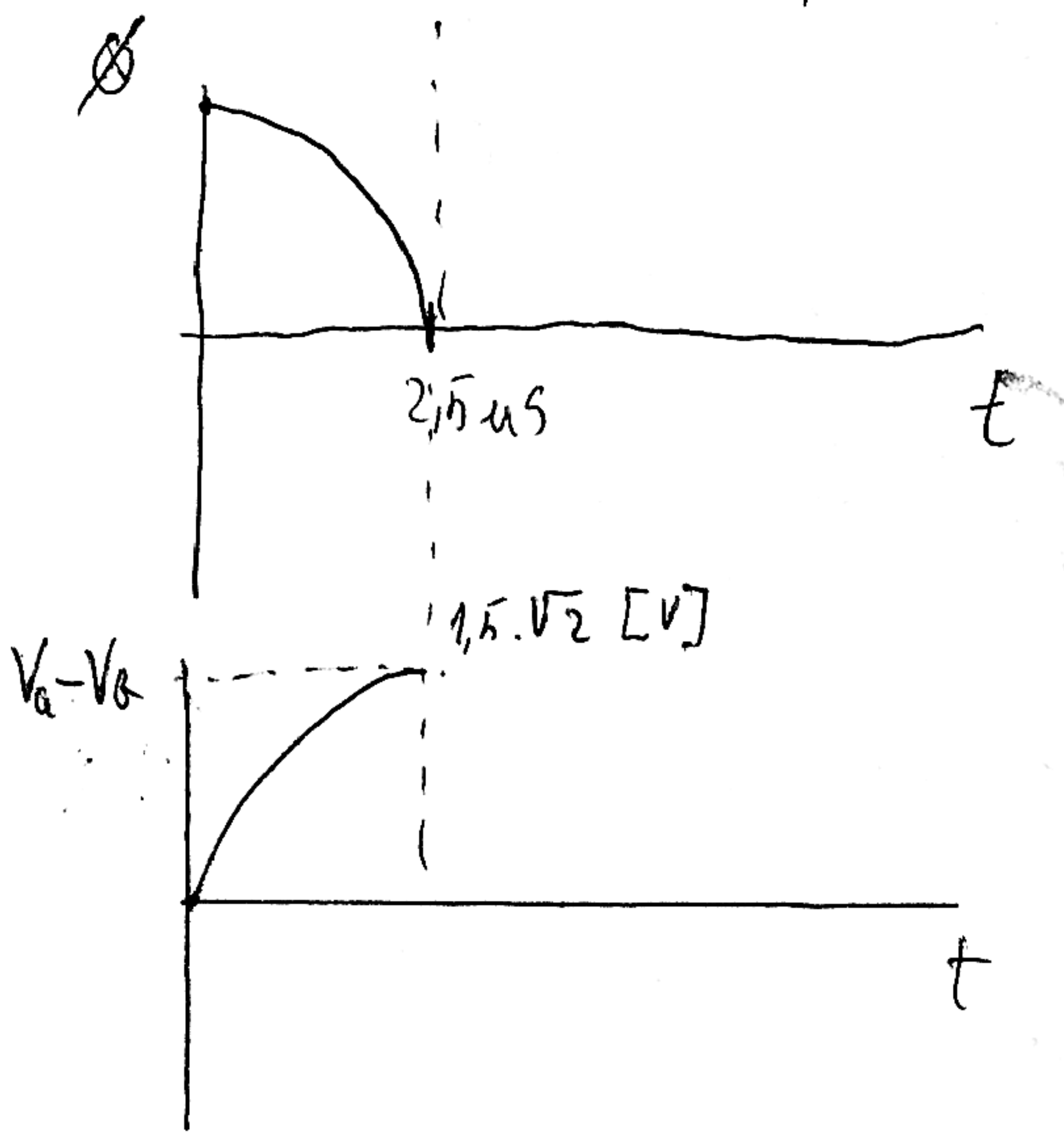
$E_{ef} \cdot \sqrt{2} = \frac{\mu_0 N \cdot \beta \cdot \ln \frac{h+e}{h-e} \cdot \omega \cdot I_0}{\pi}$ y de aquí despejo N .

$$N = \frac{\pi \cdot E_{ef} \cdot \sqrt{2}}{\mu_0 \cdot \beta \cdot \omega \cdot I_0 \cdot \ln \left(\frac{h+e}{h-e} \right)} = 5$$

Para representar graficamente $V_a - V_b$ tengo que reflexionar sobre el sentido de la corriente. Para ello, en primer lugar observaré que tanto B como el flujo a través de la espira son cantidades senoidales en fase con la corriente

Como el principio que rige el sentido de la corriente inducida es la ley de Lenz, es decir que se opone a la variación de flujo, dibujaré el flujo y $V_a - V_b$.

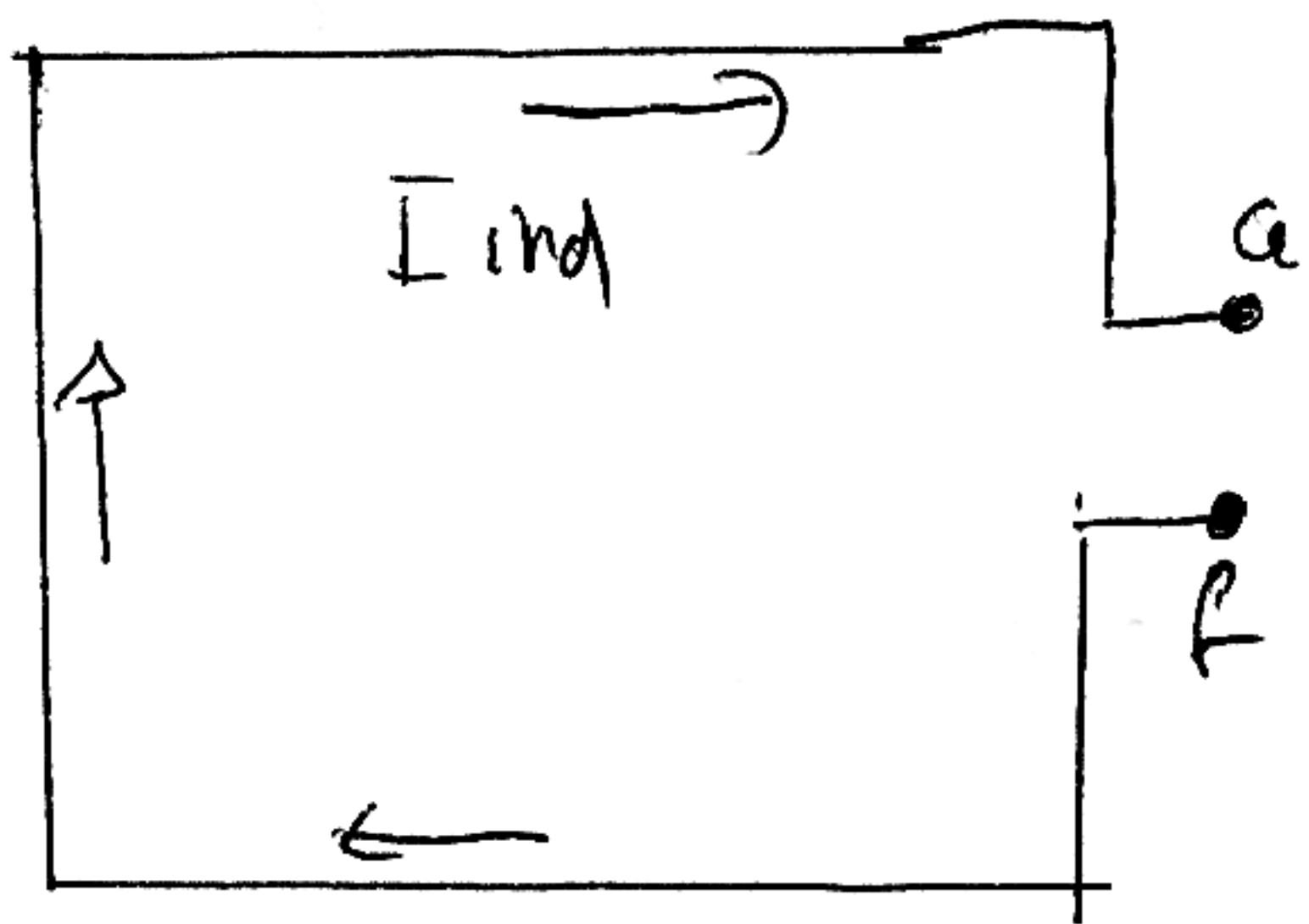
Como la frecuencia es de $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10^5 \text{ Hz} \Rightarrow$ su periodo vale $T = \frac{1}{f} = 10 \mu\text{s}$, por tanto nos piden que dibujemos únicamente lo que ocurre en el primer cuarte del periodo.



Vemos que en la parte que nos ocupa el flujo Φ hacia adentro del papel y parte de un valor máx en $t=0$ decreciendo hasta 0 en $t=2,5 \mu\text{s}$.

La reacción en la espira es crear flujo que se oponga a la variación. En este caso crear flujo hacia adentro del papel.

Para que esto ocurra la I inducida en la espira tiende a circular en el sentido dibujado $\Rightarrow V_a - V_b > 0$.



Como el circuito es de muy bajo consumo sepondremos que deja la espira prácticamente en circuito abierto y, por tanto;

$V_a - V_b = \mathcal{E}$. Su representación será la mostrada en la correspondiente gráfica.