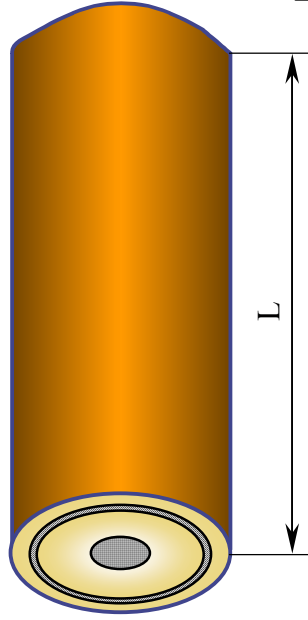


1.- Se ha enterrado un cable de alta tensión en el terreno. Dicho cable coaxial está compuesto por un conductor central de radio R_1 , recubierto de polietileno y una malla exterior de radio interior R_2 y radio R_3 , que se encuentra desconectada. La malla se encuentra a su vez protegida con una cubierta de polietileno, con lo que el radio exterior del cable es R_4 .



Material óhmico
(conductividad σ)

Aluminio ($\sigma_{Al} \approx \infty$)

Tierra húmeda alrededor
del cable ($\sigma_{Tierra} \approx \infty$)

Debido a un proceso de envejecimiento, el material dieléctrico absorbe humedad y se vuelve ligeramente conductor (material óhmico de conductividad σ). La malla se mantiene en todo momento desconectada.

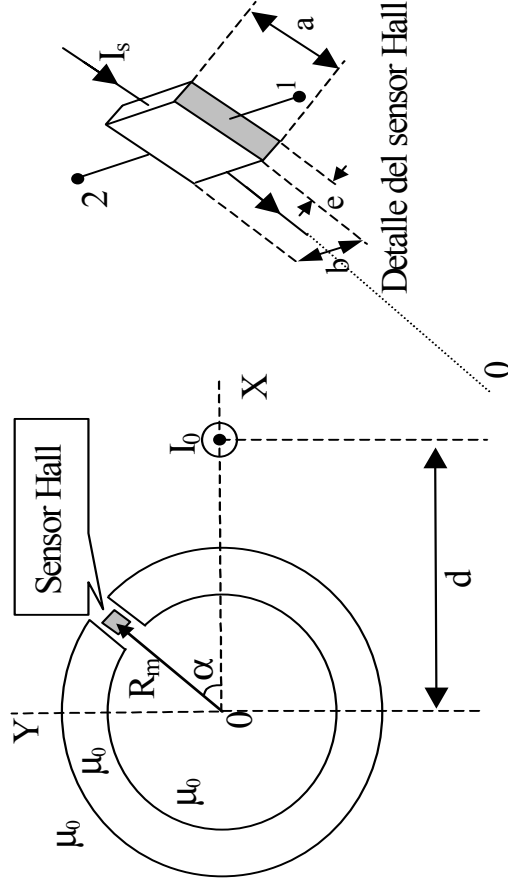
- a) Calcular la resistencia de fuga de tierra cuando el terreno está muy húmedo ($\sigma_{polietileno} \ll \sigma_{TIERRA} \approx \infty$). Es decir, calcular la resistencia entre el conductor central, $r < R_1$, y la tierra, $r > R_4$.
- b) El polietileno se degrada totalmente cuando algún punto del material alcanza una densidad volumétrica de potencia P_{MAX} . Calcular la máxima intensidad de fuga que puede soportar el cable sin sobrepasar dicha densidad volumétrica de potencia en ningún punto.

Datos: $R_1 = 1$ cm; $R_2 = 3$ cm; $R_3 = 3,5$ cm; $R_4 = 4$ cm; $\sigma = 10^{-6}$ ($\Omega \cdot m$)⁻¹; $L = 980,5$ m

$$P_{MAX} = \frac{dP}{d\tau}_{MAX} = 65,87 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^3}$$

2.- Para la medida del campo magnético creado alrededor de un hilo rectilíneo indefinido, por el que circula una corriente I_0 , se utiliza un sensor Hall, montado en el sistema representado en la figura, que permite girarlo a cualquier posición angular de un círculo de radio R_m centrado el punto 0. El sensor Hall, construido con un material semiconductor tipo N, es suficientemente pequeño para considerar que todos sus puntos están a la distancia R_m del origen 0. En la parte derecha de la figura se ha representado una ampliación del sensor, dibujado en la misma posición que en el sistema de medida, donde se detalla el sentido de la corriente I_s y sus dimensiones.

Nota: La única fuente de campo magnético, no despreciable, es la I_0 que circula por el cable rectilíneo situado a una distancia d del origen 0.



- a) Calcular el campo B en el punto donde está situado el sensor para $\alpha = \pi/2$. Obtener su módulo y el ángulo que forma con el eje X.
- b) Calcular $V_2 - V_1$, para $\alpha = \pi/2$ y para $\alpha = 0$, supuesto que los terminales 1 y 2 están en circuito abierto.
- c) Calcular para qué ángulo α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) $V_2 - V_1 = 0$ V.

Datos: $R_m = 3$ cm; $d = 6$ cm; Corriente por el cable: $I_0 = 1000$ A.

Permeabilidad para todos los materiales del sistema $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ T·m/A

Sensor Hall: Tipo N; relación entre la corriente por el sensor y la velocidad de los portadores: $|I_s| = K_I |v|$ con $K_I = 0,01$ C/m;

Corriente por el sensor: $I_s = 30$ mA;

Dimensiones: $e = 0,5$ mm; $a = 2$ mm; $b = 3$ mm.

3.- Para demostrar la aparición de corrientes parásitas en conductores, se construye el péndulo mostrado en la figura 1. Está constituido por un soporte estático, en cuyo extremo superior se encuentra el eje al que va unido una barra de material aislante. La barra puede girar libremente alrededor del eje (punto O, ver figura 2). Una espira conductora, cerrada, se encuentra unida al extremo opuesto de la barra. La espira está formada por dos tramos rectos de longitud $R_2 - R_1$ y dos tramos curvos que abarcan un ángulo de $\pi/4$ radianes. La resistencia eléctrica de la espira vale R_e . Cuando el péndulo (conjunto barra-espira) se deja caer libremente, atraviesa una región del espacio en la cual hay un campo magnético \vec{B} uniforme, perpendicular a la espira (ver figuras 1 y 2).

- Calcular la corriente eléctrica que circula por la espira en la posición $\varphi = \pi/6$, indicando el sentido de circulación, sabiendo que la velocidad angular en esa posición vale ω .
- En un experimento posterior (figura 3), el péndulo se deja caer libremente desde la misma posición que en el descrito en el apartado anterior, pero con la espira abierta. Indicar razonadamente si el péndulo oscilará más o menos que en apartado a).

Datos: $|\vec{B}| = 0,5 \text{ T}$, $\omega = 7 \text{ rad/s}$, $R_1 = 25 \text{ cm}$, $R_2 = 40 \text{ cm}$, $R_e = 12 \text{ m}\Omega$

Nota 1: Todos los apartados del examen tienen la misma puntuación. Hacer cada ejercicio en hojas distintas.

Nota 2: Los alumnos que se presentan a los dos parciales, deben realizar únicamente los apartados marcados con 

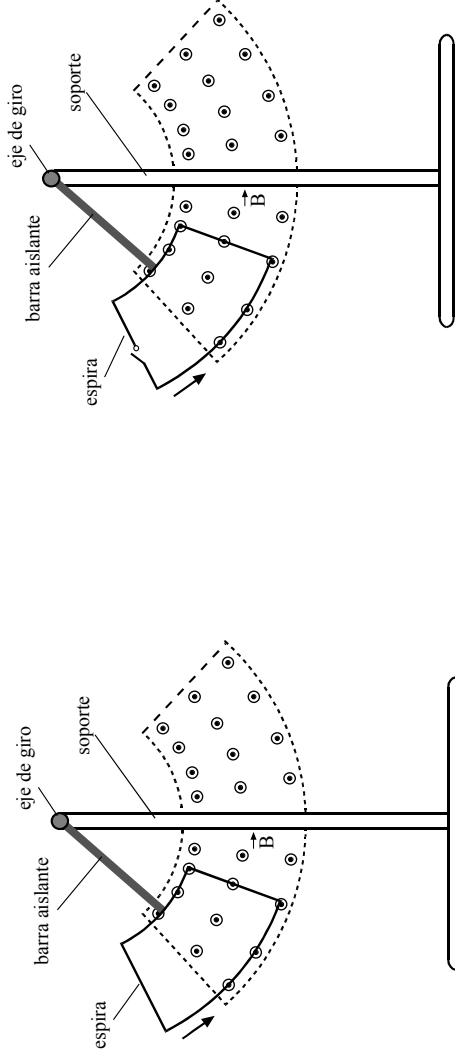


Figura 1

Figura 3

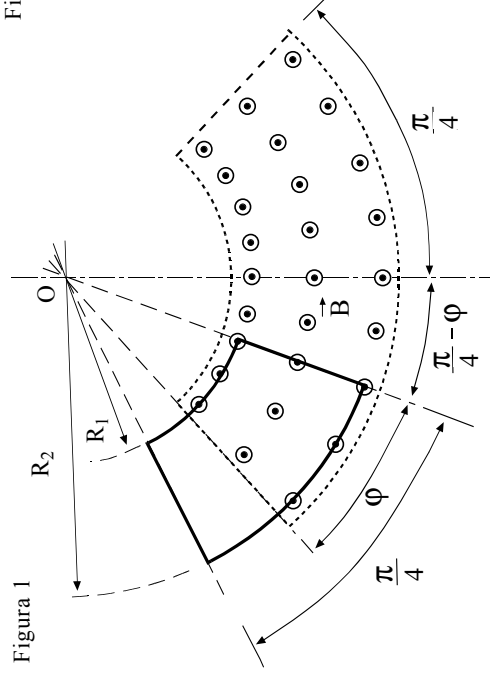
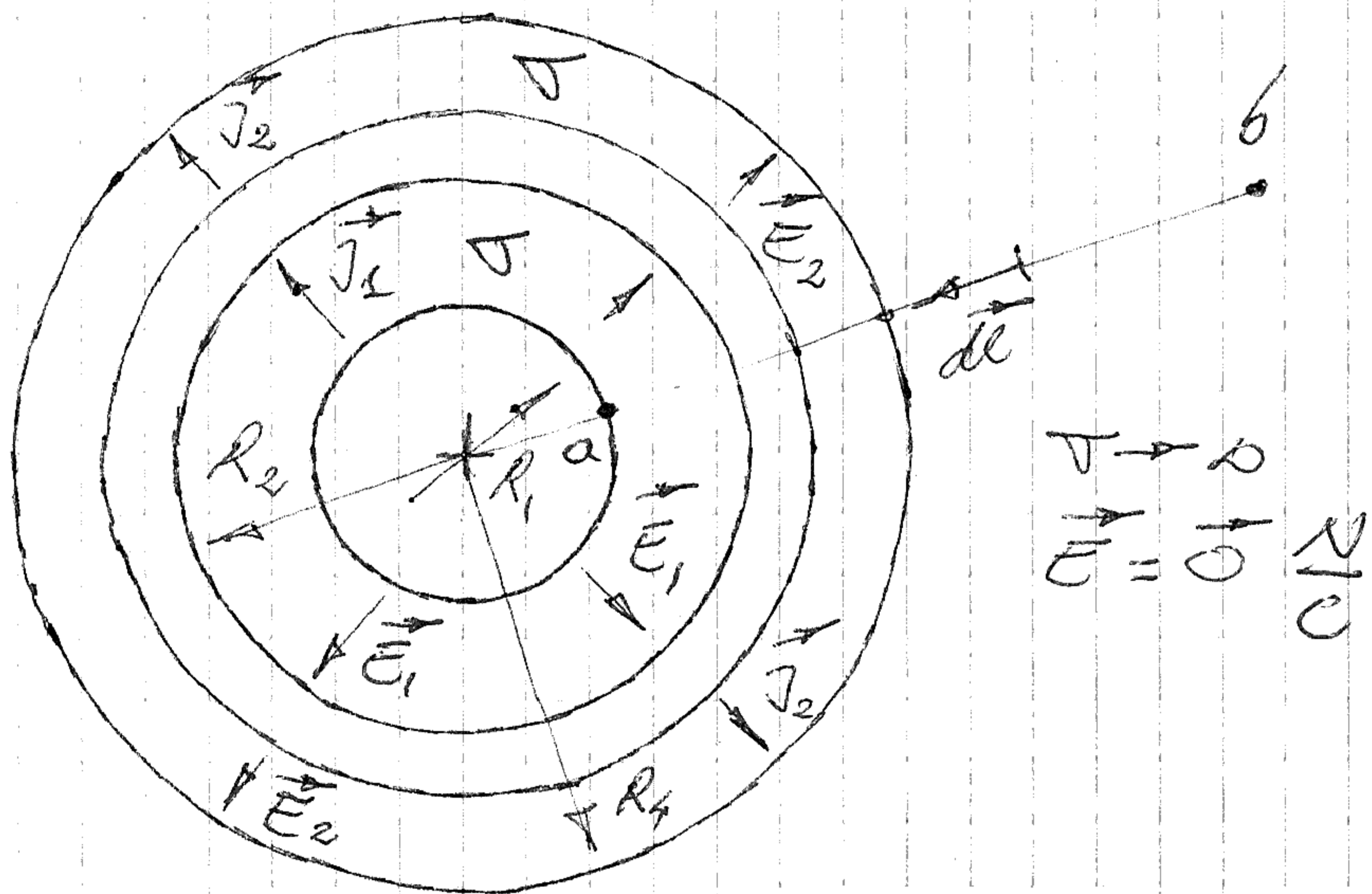


Figura 2

PARCIAL II

①



$$\begin{aligned}
 a) \quad V_a - V_b &= \frac{W_b \rightarrow a}{q} = - \int_{c/b}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{c/R_4}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\
 &= - \int_{R_4}^{R_3} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = - \int_{R_4}^{R_3} |\vec{E}_2| \cdot |d\vec{l}| \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \\
 &- \int_{R_2}^{R_1} |\vec{E}_1| \cdot |d\vec{l}| \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} = - \int_{R_4}^{R_3} |\vec{E}_2| \cdot d\rho - \int_{R_2}^{R_1} |\vec{E}_1| \cdot d\rho = \star
 \end{aligned}$$

$$\star \quad I_{fuga} = \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}_2 = J_2 \cdot 2\pi R \cdot L, \quad \vec{J}_2 = \nabla \cdot \vec{E}_2$$

$$J_2 = \frac{I_{fuga}}{2\pi R L} \Rightarrow E_2 = \frac{I_{fuga}}{2\pi \nabla L} \cdot \frac{1}{R}$$

$$I_{fuga} = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}_1 = J_1 \cdot 2\pi R \cdot L; \quad \vec{J}_1 = \nabla \cdot \vec{E}_1$$

$$J_1 = \frac{I_{fuga}}{2\pi R L} \Rightarrow E_1 = \frac{I_{fuga}}{2\pi \nabla L} \cdot \frac{1}{R}$$

$$U_a - U_b = * = - \int_{R_4}^{R_3} \frac{I_{fuga}}{2\pi r L} \frac{1}{r} dr - \int_{R_2}^{R_1} \frac{I_{fuga}}{2\pi r L} \frac{1}{r} dr =$$

$$= \frac{I_{fuga}}{2\pi r L} \ln \frac{R_4}{R_3} + \frac{I_{fuga}}{2\pi r L} \ln \frac{R_2}{R_1} =$$

$$= \frac{I_{fuga}}{2\pi r L} \left\{ \ln \frac{R_4}{R_3} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right\}$$

$$\frac{U_a - U_b}{I_{fuga}} = \frac{1}{2\pi r L} \left\{ \ln \frac{R_4}{R_3} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right\} = R_{fuga}$$

$$R_{fuga} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-6} \cdot 980,5} \left\{ \ln \frac{4}{3,5} + \ln \frac{3}{1} \right\} =$$

$$= 200 \Omega$$

$$b) P_{MAX} = \frac{dP}{ds} /_{MAX} = E_1 (I = R_1) \cdot I (I = R_1) \cdot \cos 0 = \vec{E}_1 \cdot \vec{I} /_{MAX} =$$

$$= \sigma \cdot E_1^2 (I = R_1) = \sigma \cdot \left\{ \frac{I_{fuga}}{2\pi r L R_1} \right\}^2$$

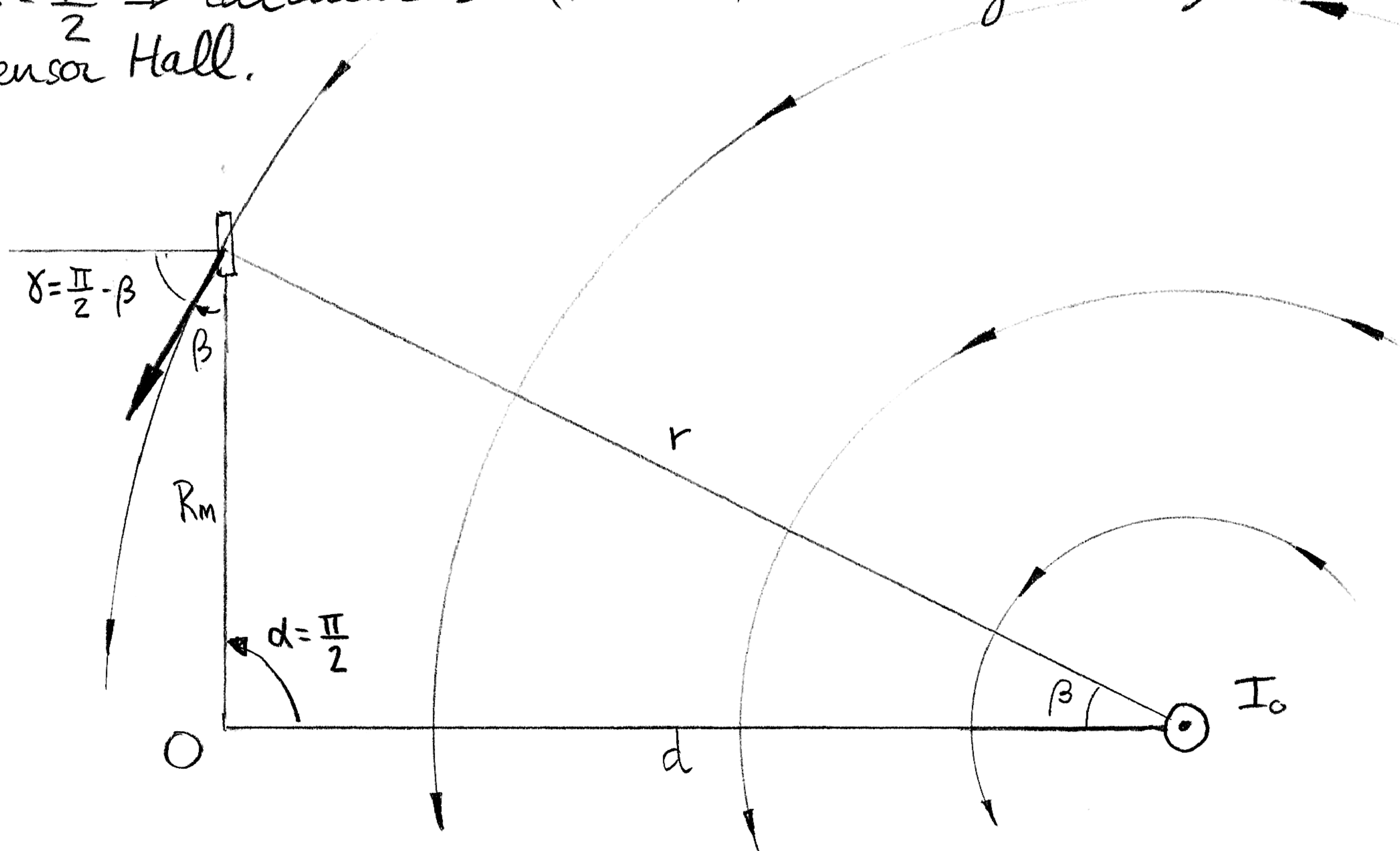
$$\left\{ \frac{P_{MAX}}{\sigma} \right\}^{1/2} \cdot 2\pi r L R_1 = I_{fuga MAX}$$

$$I_{fuga MAX} = \left\{ \frac{65,87 \cdot 10^{-8}}{10^{-6}} \right\}^{1/2} \cdot 2\pi \cdot 10^{-6} \cdot 980,5 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 50 \cdot 10^{-6} A = 50 \mu A$$

Parcial 2, ejercicio 2 (sensor hall)

- a) $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ calcular \vec{B} (módulo, dirección y sentido) en el sensor Hall.



- Cálculo de $|\vec{B}|$ debido a un cable infinito

$$\oint_{\text{circular}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0 \Rightarrow \text{(Tomo una trayectoria circular de radio } r, \text{ centrada en } I_0)$$

Trayectoria circular $\Rightarrow \vec{B} \parallel d\vec{l}$, $|\vec{B}|$ cte en el círculo

$$\Rightarrow |\vec{B}| \oint_{\text{circular}} |d\vec{l}| = |\vec{B}| \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

Triángulo rectángulo $\Rightarrow r = \sqrt{d^2 + R_m^2} = 0,067 \text{ m}$

$$|\vec{B}| = B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \sqrt{d^2 + R_m^2}} = 2,9 \text{ mT} \quad \text{(en el sensor Hall, } \alpha = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Tg } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{R_m}{d} \Rightarrow \beta = \text{arctg } \frac{R_m}{d} = 0,4636 \text{ rad}$$

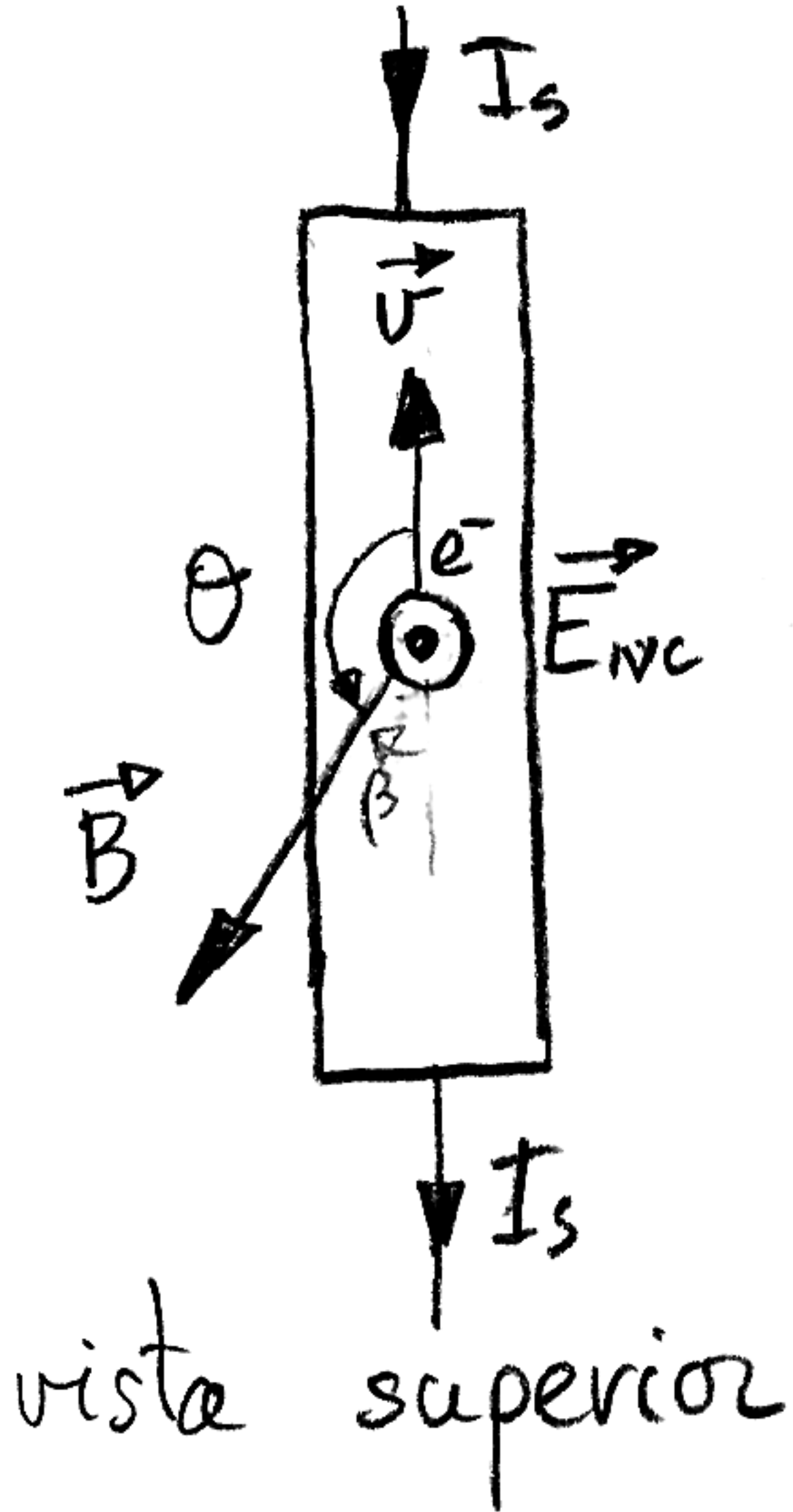
$$\beta = 26,57^\circ$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = 1,107 \text{ rad} = 63,43^\circ$$

Ángulo que forma \vec{B} con la horizontal

b.1 Calcular $V_2 - V_1$ cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Vista del sensor Hall (portadores: e^- que se mueven en dirección opuesta a I_s en tipo N)



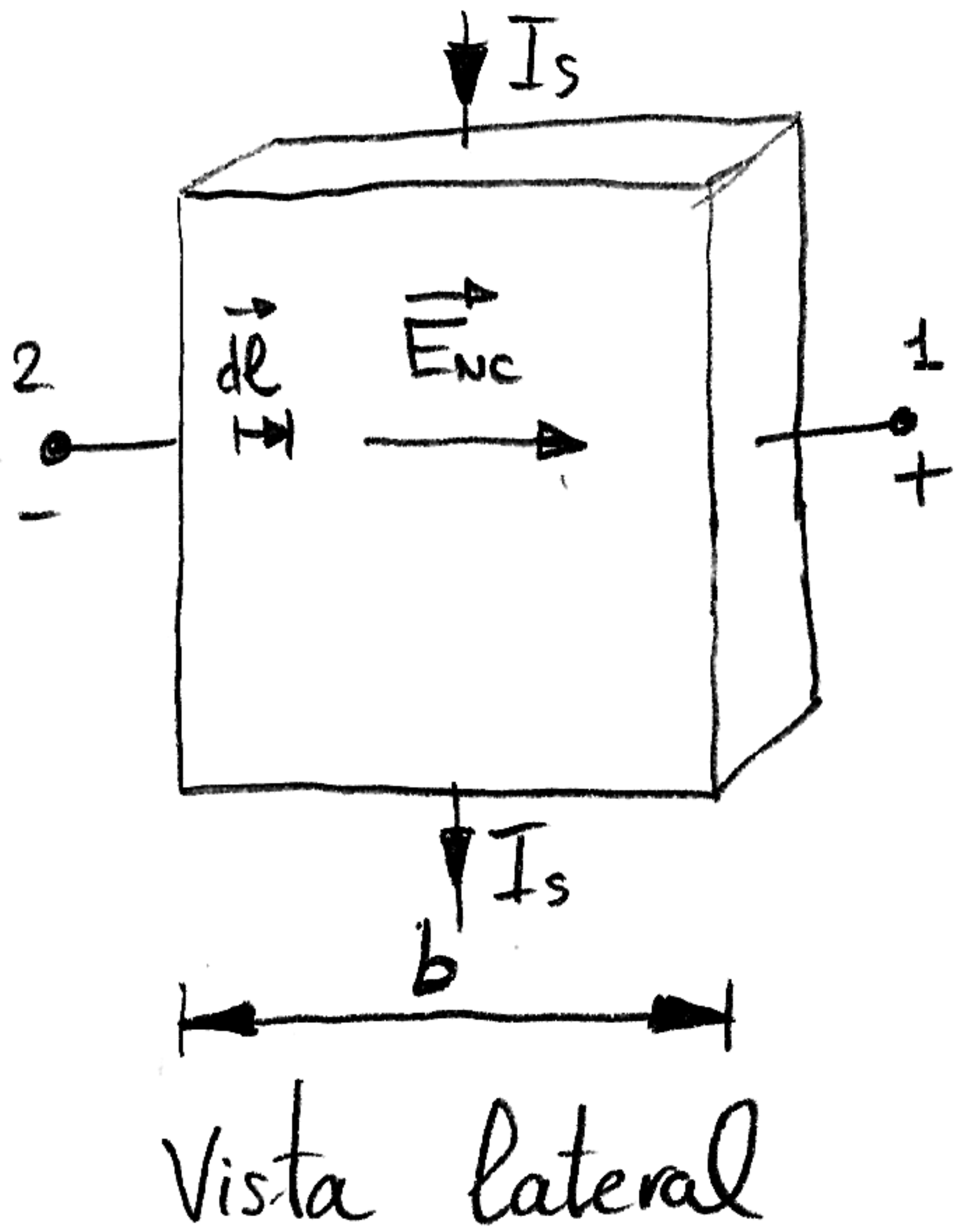
Nota: Es imprescindible tener en cuenta la dirección de \vec{B} en este apartado, pues únicamente la componente horizontal de \vec{B} genera fem.

$$\vec{E}_{ENC} = \vec{v} \times \vec{B} = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \theta \cdot \vec{u}_z =$$

trigonóm.

$$= |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \beta \vec{u}_z \quad (\text{hacia afuera del papel})$$

- $\vec{v} \times \vec{B}$ siempre apunta al terminal + del sensor Hall \Rightarrow el terminal + es el de afuera del papel (1) $\Rightarrow \underline{V_2 - V_1 < 0}$



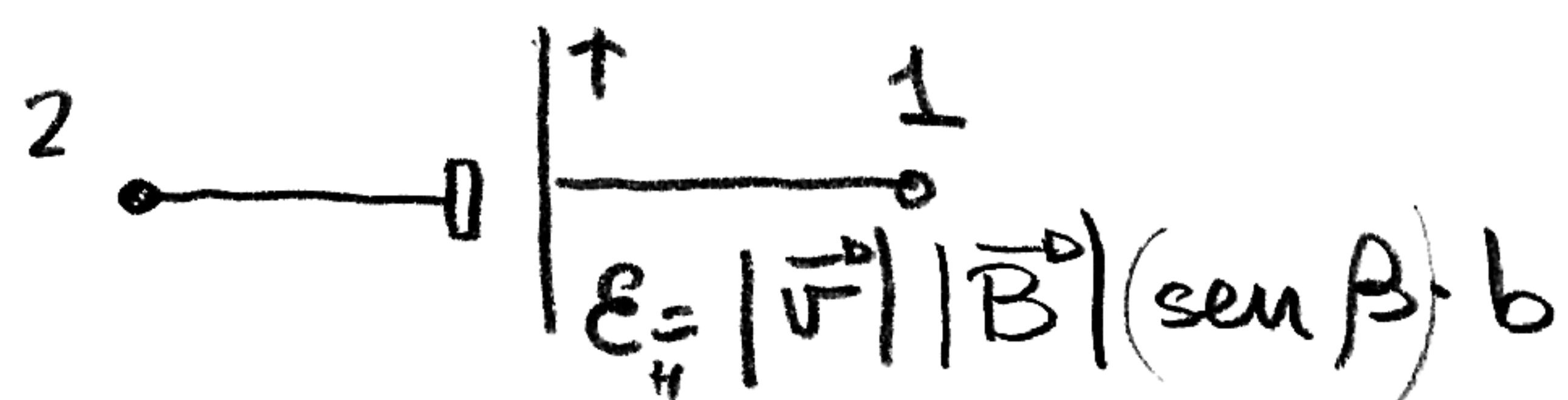
$$\mathcal{E}_H = + \int_{-}^{+} \vec{E}_{ENC} \cdot d\vec{l} = \int_{2}^{1} |\vec{E}_{ENC}| \cdot |d\vec{l}| =$$

$\vec{E}_{ENC} \parallel d\vec{l}$

$|\vec{E}_{ENC}| = cte$

$$= |\vec{E}_{ENC}| \int_{2}^{1} |d\vec{l}| = |\vec{E}_{ENC}| \cdot b = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \beta \cdot b$$

Equivalente circuital del sensor



$$\Rightarrow V_2 - V_1 = -\mathcal{E}_H$$

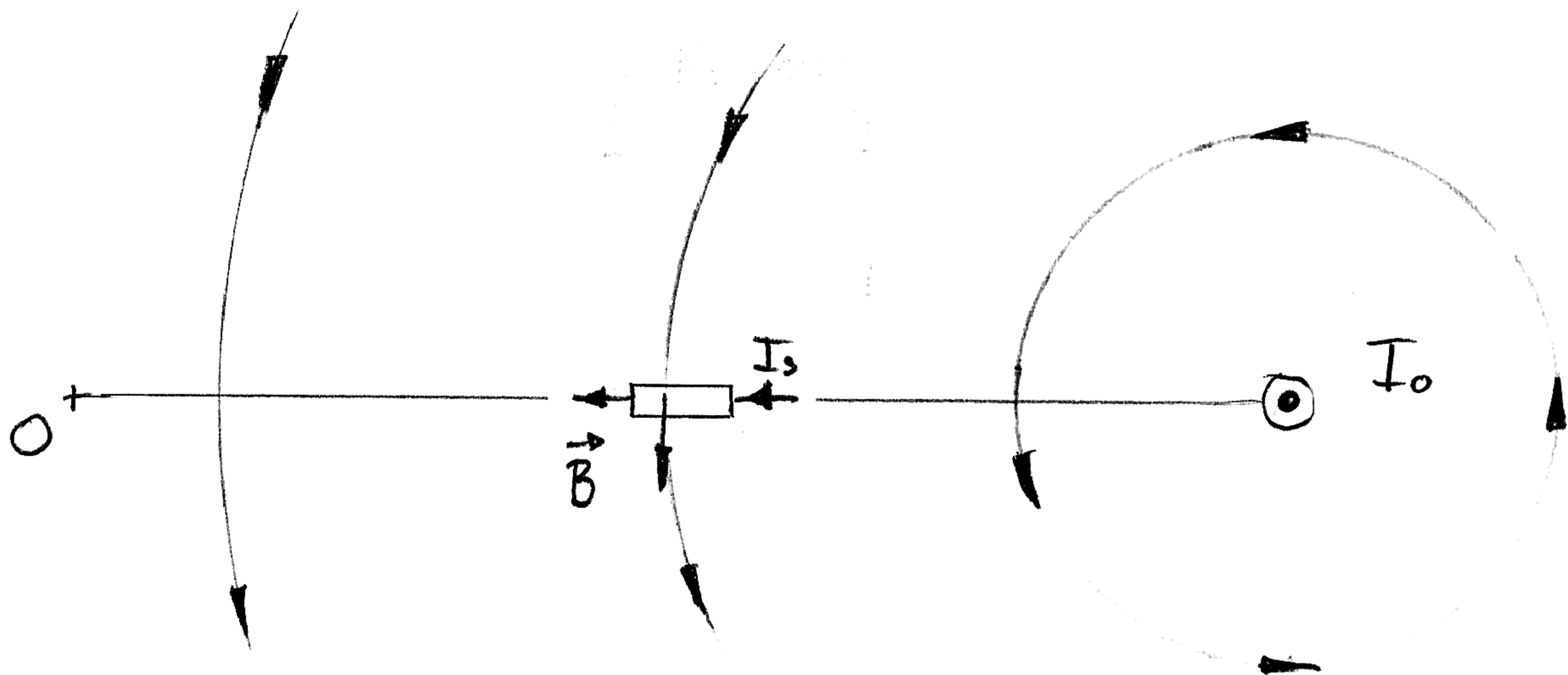
Velocidad de los portadores: $|\vec{v}| = \frac{|I_s|}{K_I}$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 - V_1 = - \frac{|I_s|}{K_I} |\vec{B}| (\sin \beta) b = 12 \mu V}$$

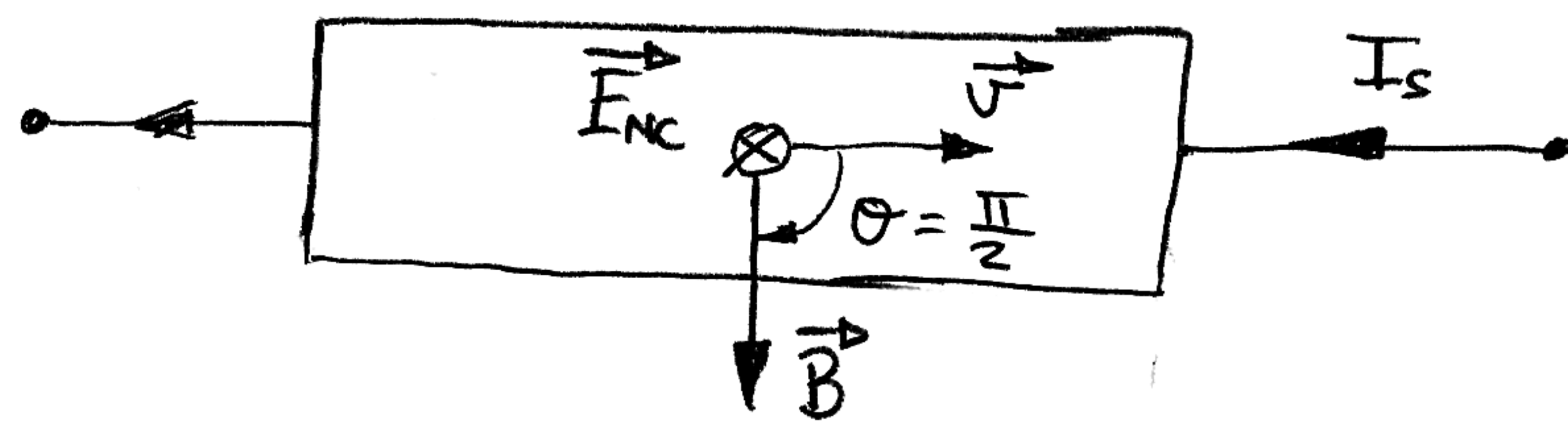
Nota: en $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $|\vec{B}|$ es el calculado en el apartado a).

Cuando $\alpha = 0$, $|\vec{B}|$ será diferente pues estamos más cerca del cable.

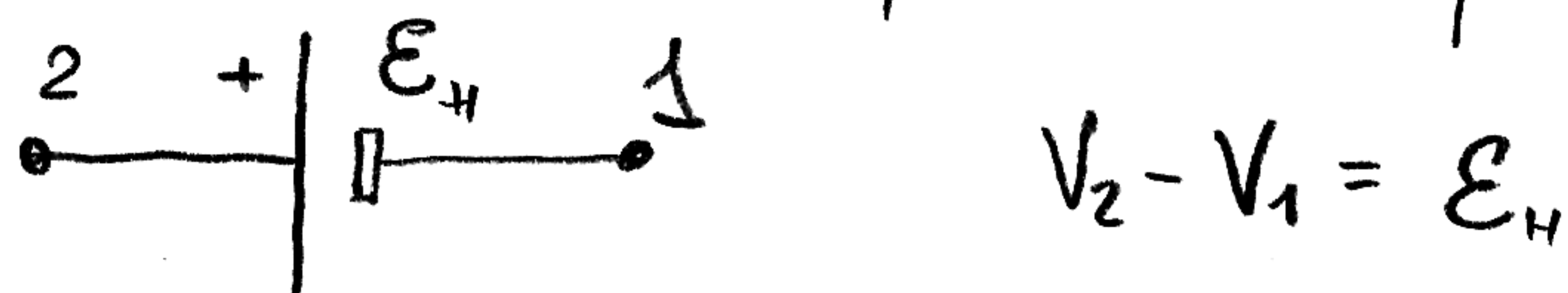
b.2 Calcular $V_2 - V_1$ cuando $\alpha = 0$



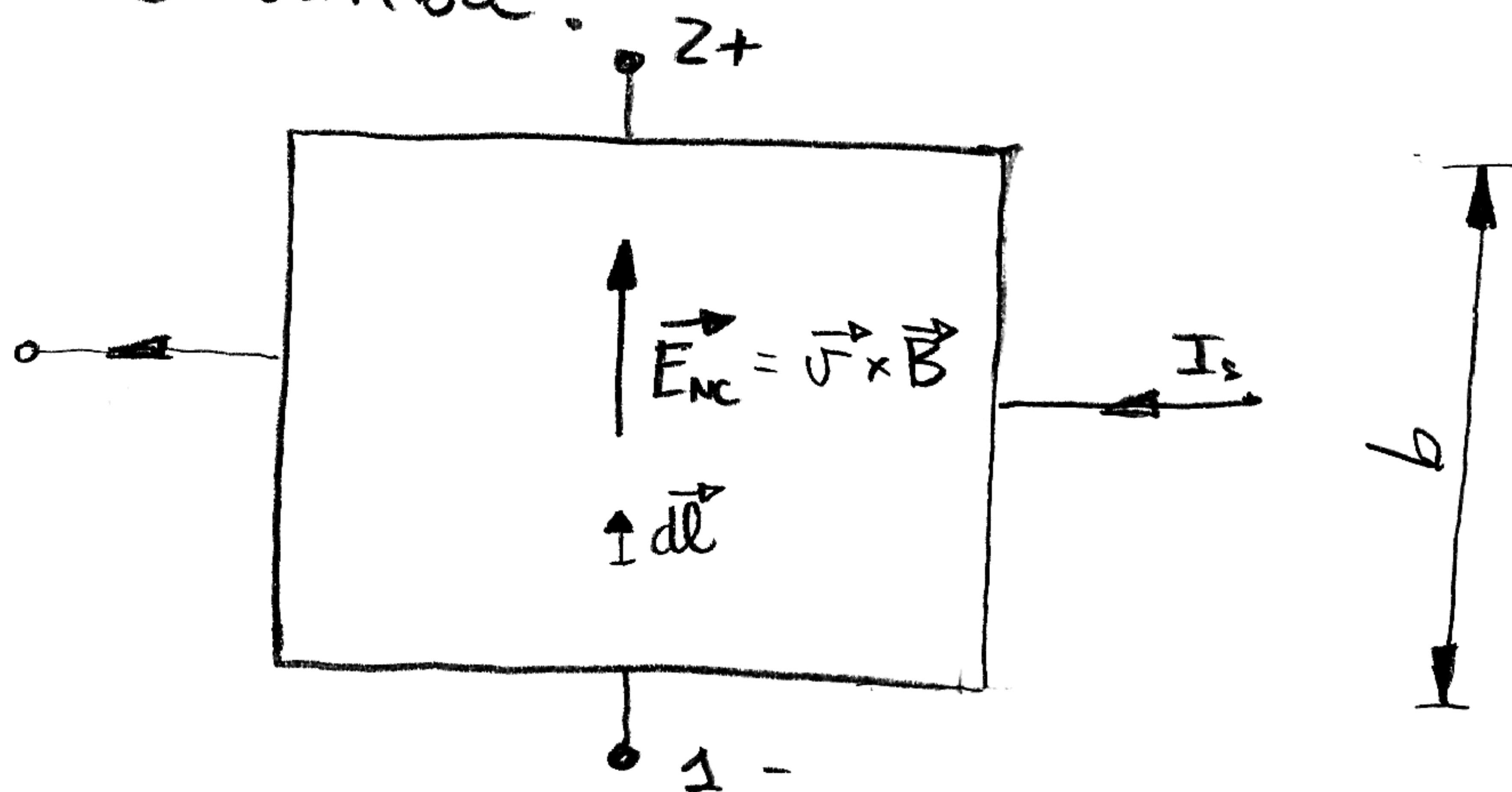
Vista de cerca del sensor



En este caso $\vec{v} \times \vec{B}$ apunta hacia abajo (terminal 2), por lo que el terminal 2 será el positivo. Equivalente circuital:



Vista desde arriba:



$$|\vec{E}_{nc}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| = \frac{|I_s|}{K_I} |\vec{B}| \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$$

$$E_H = + \int_{-}^{+} |\vec{E}_{nc}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos 0 = \int_{1}^{2} |\vec{E}_{nc}| |d\vec{l}| = |\vec{E}_{nc}| \cdot b \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$$

$|\vec{E}_{nc}| = \text{cte}$

circuito

$$\mathcal{E}_H = \frac{|I_s|}{K_I} |\vec{B}| b ; \text{ Ahora tenemos que calcular } |\vec{B}| \text{ para } \alpha=0$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \cdot \text{distancia al cable}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi (d - R_m)} = 6.7 \text{ mT}$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \mathcal{E}_H = \frac{|I_s|}{K_I} |\vec{B}| \cdot b \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = 60 \mu\text{V}$$

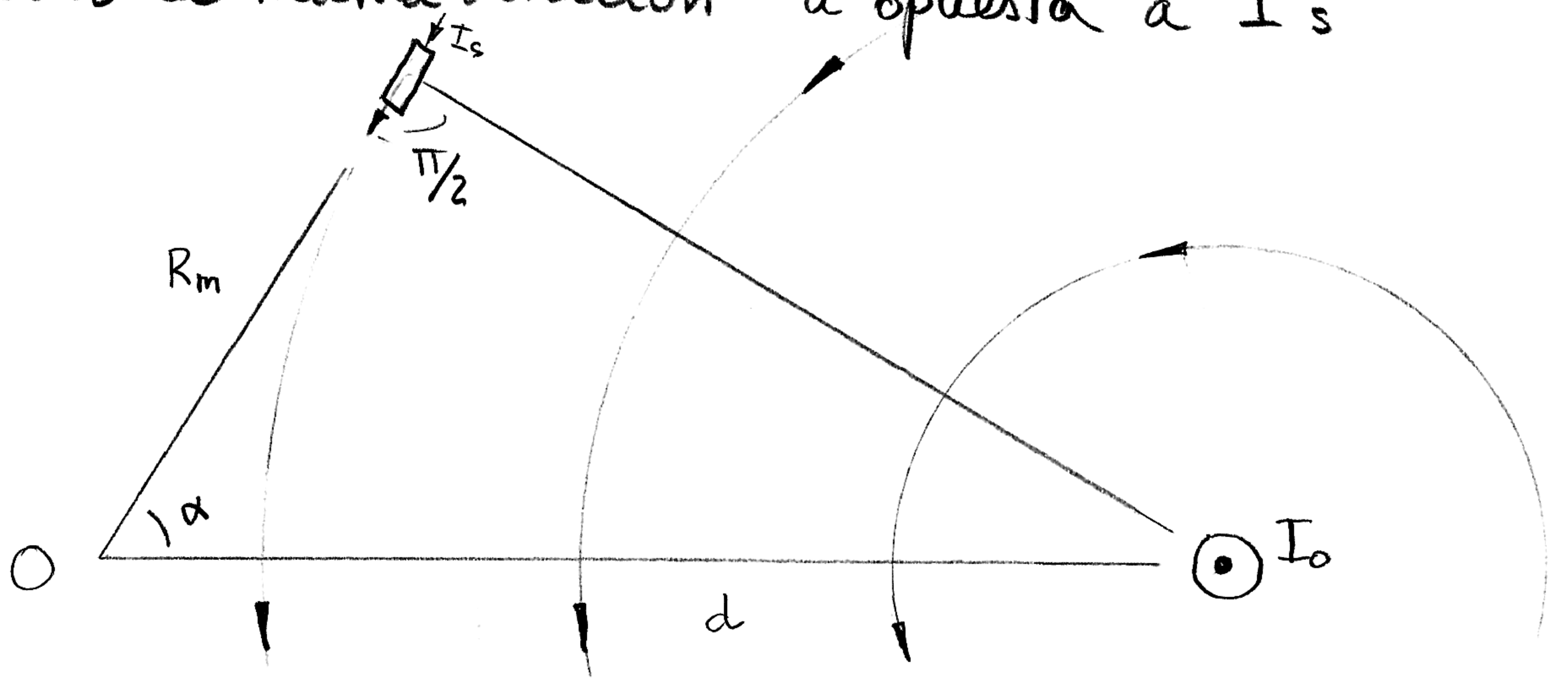
c) Calcular para qué ángulo α se anula $V_2 - V_1$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{|I_s|}{K_I} |\vec{B}| \cdot b \cdot \text{sen } \theta = 0$$

$|\vec{B}| > 0 \Rightarrow$ la única solución es que $\text{sen } \theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \text{ángulo entre } \vec{v} \text{ y } \vec{B} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v}$ y \vec{B} paralelos u opuestos, es decir, \vec{B} debe llevar la misma dirección u opuesta a I_s



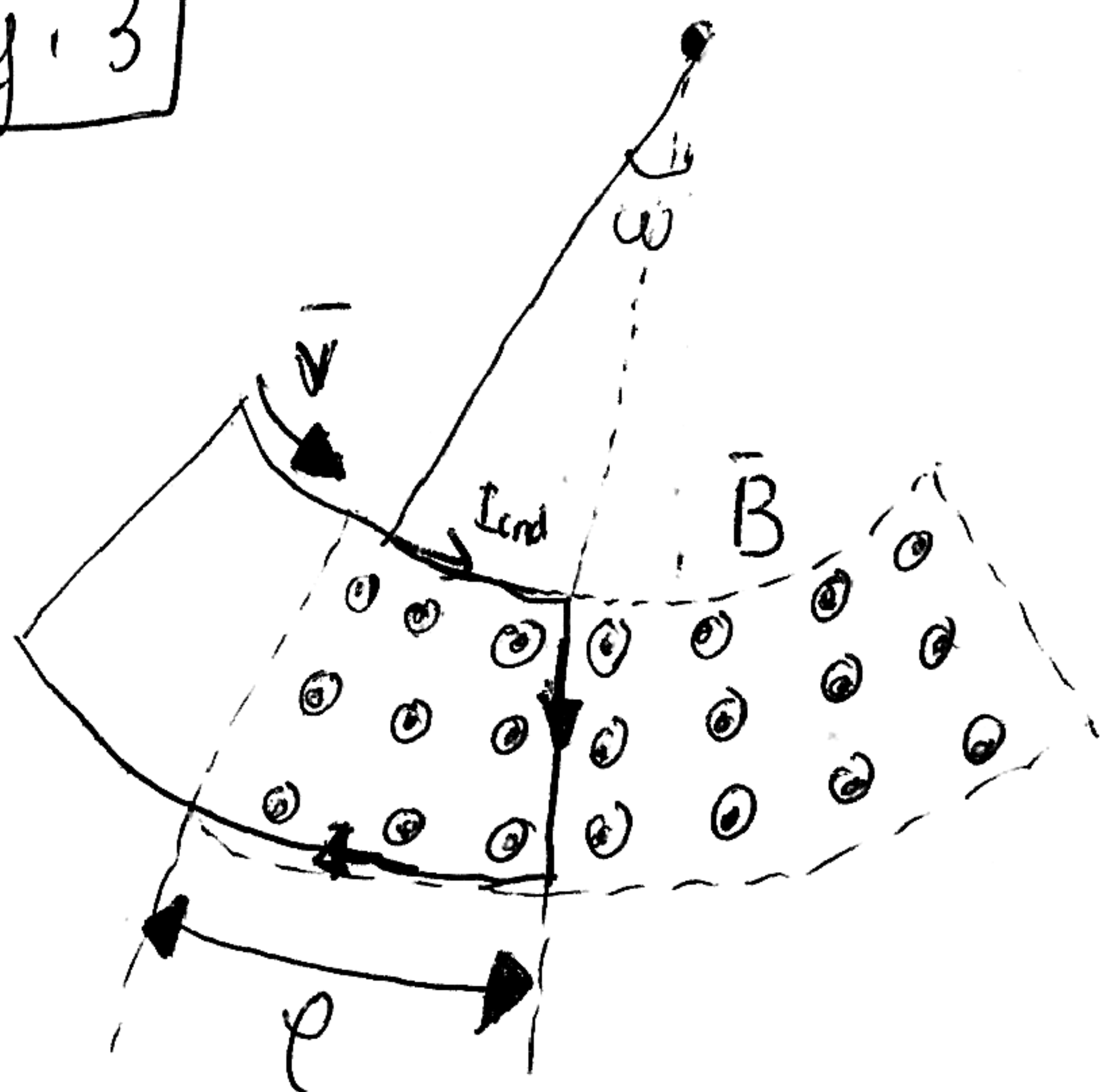
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{R_m}{d} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{R_m}{d} = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1.0472 \text{ rad} = 60^\circ$$

la solución $\alpha = -60^\circ$ también es válida

Segundo parcial

ej. 3]



a) Para calcular la superficie de la espira en la zona del campo \vec{B} , para un áng. genérico φ , usare' la ecuación del sector circular completo: $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ y de ella calcularé la parte proporcional a un trozo de ángulo φ

$$S_p = \frac{S}{2\pi} \cdot \varphi = \frac{\varphi}{2} \cdot (R_2^2 - R_1^2).$$

Para calcular la corriente inducida en la bobina, usaremos la Ley de Faraday ($\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$) para obtener la f.e.m generada.

Luego, conociendo la resistencia de la espira, despejaremos la corriente inducida de $|I_{ind}| \cdot R_e = |\mathcal{E}|$. El sentido de I_{ind} se deduce con la ley de Lenz (Sentido tal que se oponga a la variación de flujo magn).

Para obt lo anterior primero calcularé el flujo magn a través de la espira, cuando está en la posición genérica dibujada.

$$\phi = \iint_{S_p} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_p} \vec{B}_{\parallel} ds = \int_{S_p} B ds = B S_p = \frac{B(R_2^2 - R_1^2)}{2} \cdot \varphi$$

$B = \text{cte}$

En este caso, dada la dirección del movimiento especificada en el enunciado, el áng φ va aumentando con el tiempo, en función de la velocidad angular, concretamente $\varphi = \omega t$. Por tanto la variación de flujo respecto al tiempo vale:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B(R_2^2 - R_1^2)}{2} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{B(R_2^2 - R_1^2)}{2} \omega = \underline{\underline{-0,17V = \mathcal{E}}}$$

En consecuencia, la corriente inducida, en módulo vale.

$$|I_{\text{ind}}| = \frac{|\mathcal{E}|}{R_e} = \underline{\underline{14,22 A}}$$

El sentido de la I_{ind} es el marcado en la figura anterior.

f) Según la ley de Lenz, la corriente inducida siempre se opone a la variación de flujo magnético. Es fácil comprobar, en este caso, que la aplicación de lo anterior implica que el campo B creado por la corriente inducida en la espira, en todos los pts de su movimiento, tiene una dirección tal que tiende a frenarla.

Por tanto, en el caso de la figura 3, al dejar la espira en circ abierto impedimos el paso de corriente por ella \Rightarrow no hay oposición al movimiento. Por tanto, el péndulo oscilará más tiempo en el caso de la espira en circuito abierto.