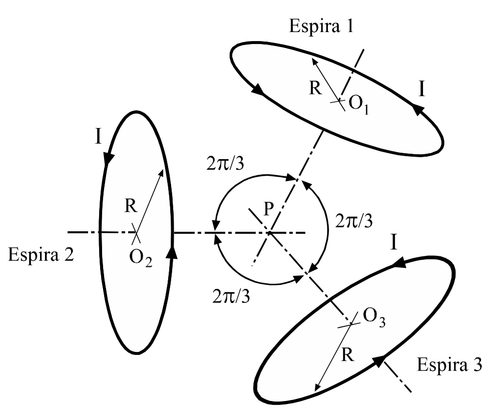
Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial II. **16 de junio de 2.003**
Parte Primera.

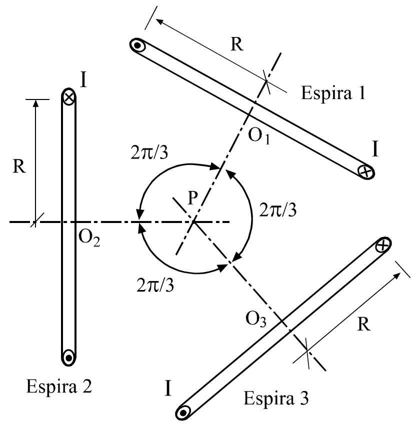
1.- Tres espiras circulares iguales, de radio R, están recorridas por corrientes iguales de intensidad I. Los ejes de las tres bobinas están contenidos en el mismo plano, formando entre si un ángulo de $2\pi/3$ radianes. Las distancias de los centros de las tres espiras al punto P son iguales.

a) Calcular el vector inducción magnética, $\vec{B}$, en el punto P (1 pto.)

b) Si se invierte el sentido de giro de la corriente que circula por la espira 3, calcular el nuevo valor del vector inducción magnética $\vec{B}$. (1 pto.)

<u>Datos:</u> R = 10 cm, I = 3 A, $O_1P = O_2P = O_3P = 10$ cm





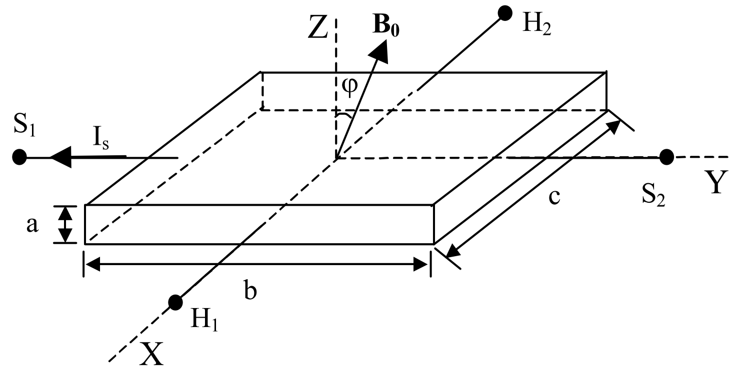
Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial II. **16 de junio de 2.003**
Parte Primera.

2.- Disponemos de una lámina de semiconductor tipo N, con las dimensiones indicadas en la figura, en presencia de un campo magnético, contenido en el plano ZX, de módulo B_o constante, que forma un ángulo $\varphi = \pi/4$ con el eje z. Entre los terminales S_1 y S_2 circula una corriente constante $I_s = I_o$ en el sentido representado.

a) Calcular la diferencia de potencial $V_H = V_{H2} - V_{H1}$ entre los terminales H_2 y H_1, indicando claramente su signo, cuando ambos terminales están en circuito abierto. (1 pto.)

b) Si entre H_2 y H_1 conecto una resistencia R_{ext} calcular V_H y la fuerza electromotriz debida al efecto Hall, considerando la resistencia interna del sensor. (1 pto.)

c) Si la corriente Is varía de forma senoidal, $I_s = I_0 sen\omega t$, tomando como sentido positivo el marcado en la figura y siendo el resto de las condiciones las del apartado anterior, representar gráficamente V_H indicando claramente su desfase con I_s. (1 pto.)



Datos: $B_o = 0{,}6$ T, $R_{ext} = 5\Omega$,

Sensor Hall: $I_s = k_I \cdot |\vec{v}|$ con $k_I = 0{,}32$ C/m, $I_o = 20$ mA; a = 0,5 mm, b = 2 mm, c = 7 mm, conductividad de la lámina semiconductora: $\sigma = 1{,}1 \cdot 10^3\ (\Omega \cdot m)^{-1}$

Nota: Los alumnos que tienen pendiente los dos parciales deben resolver los problemas marcados con ➡

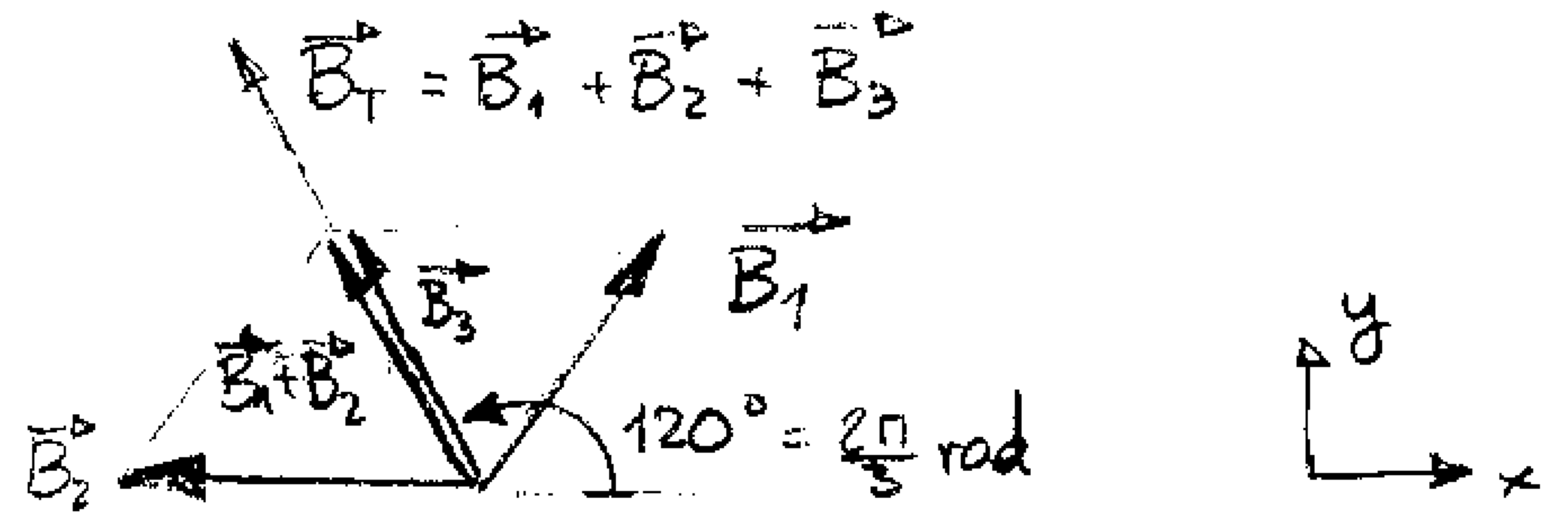
SEGUNDO PARCIAL

RESULTADOS PROBLEMA 1

a) Campo creado por cada espira (módulo)

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = |\vec{B}_3| = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+OP^2)^{3/2}} = 6,664\ \mu T$$

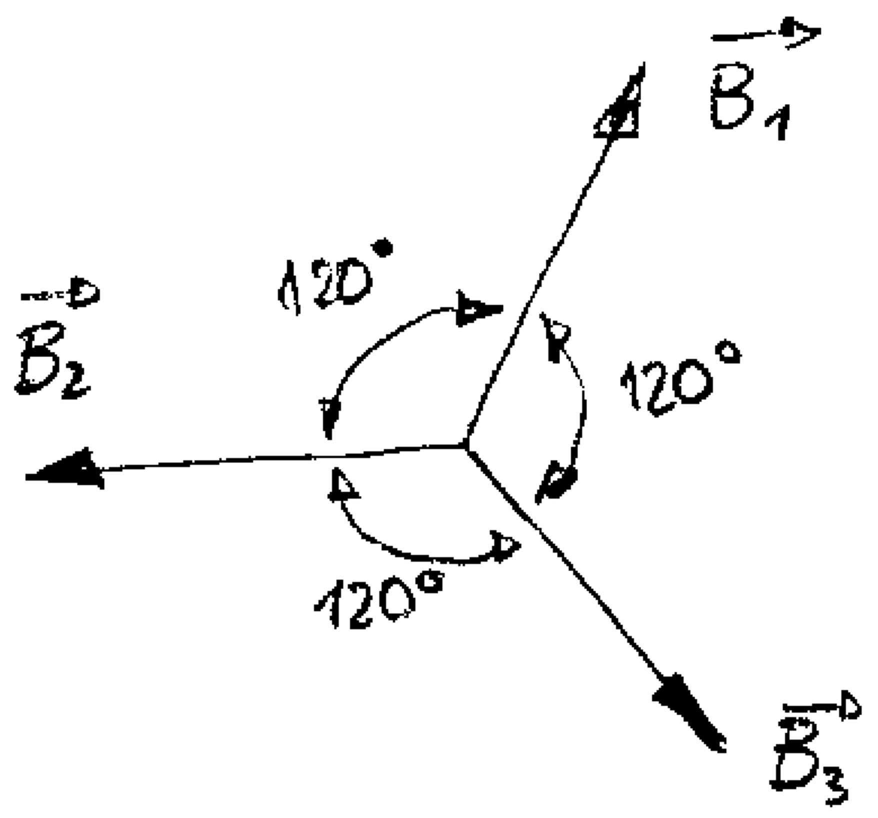
Suma vectorial:



$$\vec{B}_{TOTAL} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \vec{B}_3 + \vec{B}_3 = 2\vec{B}_3 = -6,66\ \vec{u}_x + 11,54\ \vec{u}_y$$

$$|\vec{B}_{TOTAL}| = 13,33\ \mu T = 2|\vec{B}_3|$$

b) Si invertimos el sentido de giro de la corriente por la espira 3, $\vec{B}_3$ cambia tambien de sentido



Los vectores forman una estrella $\Rightarrow$ por simetría, la suma vectorial es cero

$$\vec{B}_{TOTAL} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 0$$

EXAMEN 16 DE JUNIO DE 2.003 PARTE PRIMERA

PROBLEMA 2 - 2º PARCIAL

En un sensor Hall, la f.em se genera debido al campo eléctrico no conservativo $\vec{E}_{nc} = \vec{v} \times \vec{B}$, cuyo origen está en la fuerza de lorenz.

En nuestro caso $\mathcal{E} = \int_{terminal -}^{terminal +} \vec{E}_{NC} \cdot \vec{dl} = \int_{H_2}^{H_1} \vec{E}_{NC} \cdot \vec{dl} = \int_{H_2}^{H_1} E_{NC} \cdot dx > 0$

Tal como hemos calculado la fem, $\mathcal{E}$ debe ser positivo. Existen otras alternativas para calcular el signo; pero siempre tiene que quedar clara la polaridad del sensor.

Una regla sencilla es que $\vec{E}_{nc} = \vec{v} \times \vec{B}$ siempre apunta al terminal positivo. Por tanto, al integrar desde el terminal + al −, $\vec{E}_{NC}$ y $\vec{dl}$ irán en el mismo sentido y la fem obtenida es positiva.

En este problema tenemos que darnos cuenta que el campo magnético no es perpendicular al sensor. Por tanto $\vec{E}_{NC} = \vec{v} \times \vec{B} =$

$$= |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \vec{u_x} \underset{\theta = \pi - \varphi}{=} v\, B \operatorname{sen}(\pi - \varphi)\, \vec{u_x} = v\, \underbrace{B \cos\varphi}_{B_z}\, \vec{u_x}$$

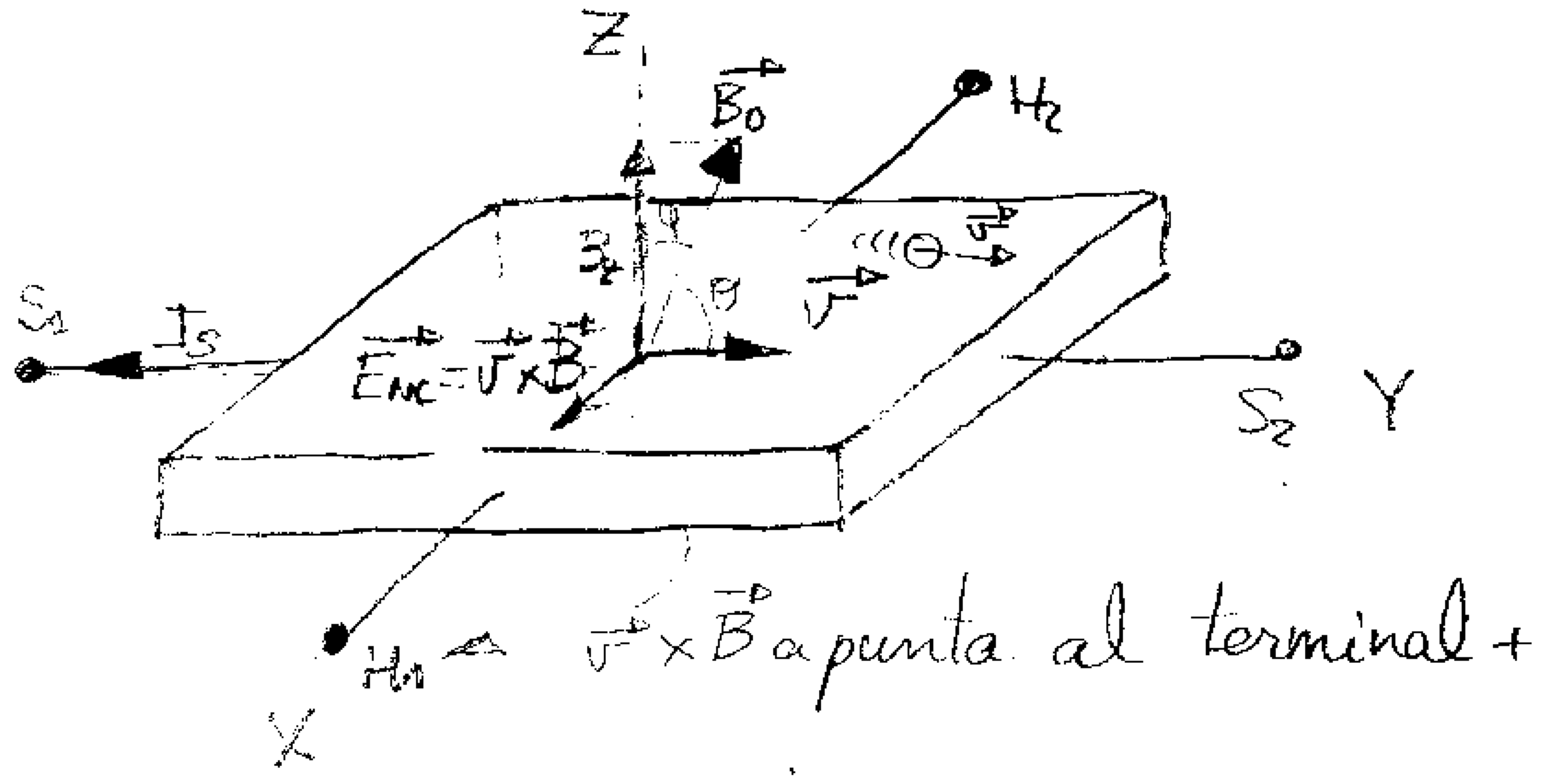
O dicho de otro modo, sólo la componente de $\vec{B}$ perpendicular al sensor crea $\vec{E}_{NC}$.

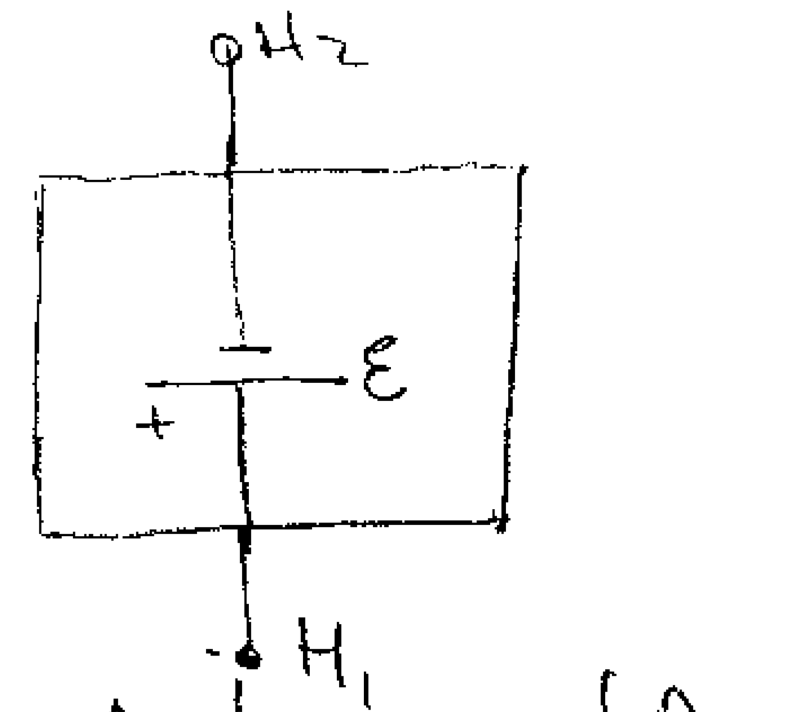
La última observación es que nos encontramos con un semiconductor tipo N (Regla nemotécnica: N → portadores Negativos; P → portadores Positivos)

Los portadores negativos se mueven en dirección opuesta a la corriente.

$$\mathcal{E} = \int_{H_2}^{H_1} |\vec{E}_{NC}|\,|\vec{dl}| \cdot \cos 0 = \int_{H_2}^{H_1} v\, B \cos\varphi\, |\vec{dl}| = v\, B \cos\varphi \underbrace{\int_{H_2}^{H_1} |\vec{dl}|}_{\text{distancia entre los terminales } H_1 \text{ y } H_2 \text{, en valor absoluto}}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = v\, B \cos\varphi\ c}$$





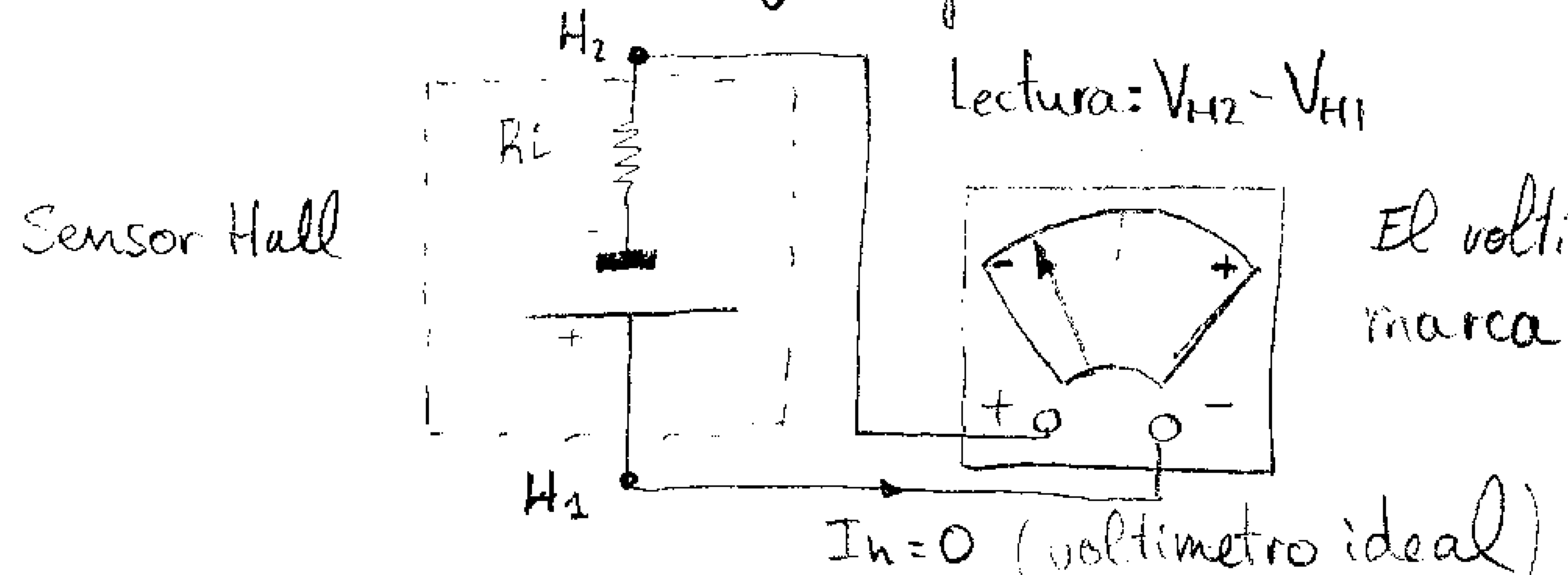
Equivalente circuital

La velocidad con la que se mueven los portadores la tenemos que calcular a partir de la constante característica del sensor

$$|\vec{v}| = \frac{I_s}{K_s} = \frac{0'02\ A}{0'32\ C/m} = \frac{0'02\ C/s}{0'32\ C/m} = 0'0625\ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = 0'0625\ \frac{m}{s} \cdot 0'6\ T \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 0'007\ m = 185\ \mu V}$$

El valor de la ddp $V_{H2} - V_{H1}$ es igual a la fem con signo menos, puesto que el terminal H_2 es el negativo y el H_1 el positivo. Puesto que por el sensor no circula corriente en la dirección transversal (dirección $H_2 - H_1$), la ddp y la fem coinciden en valor absoluto

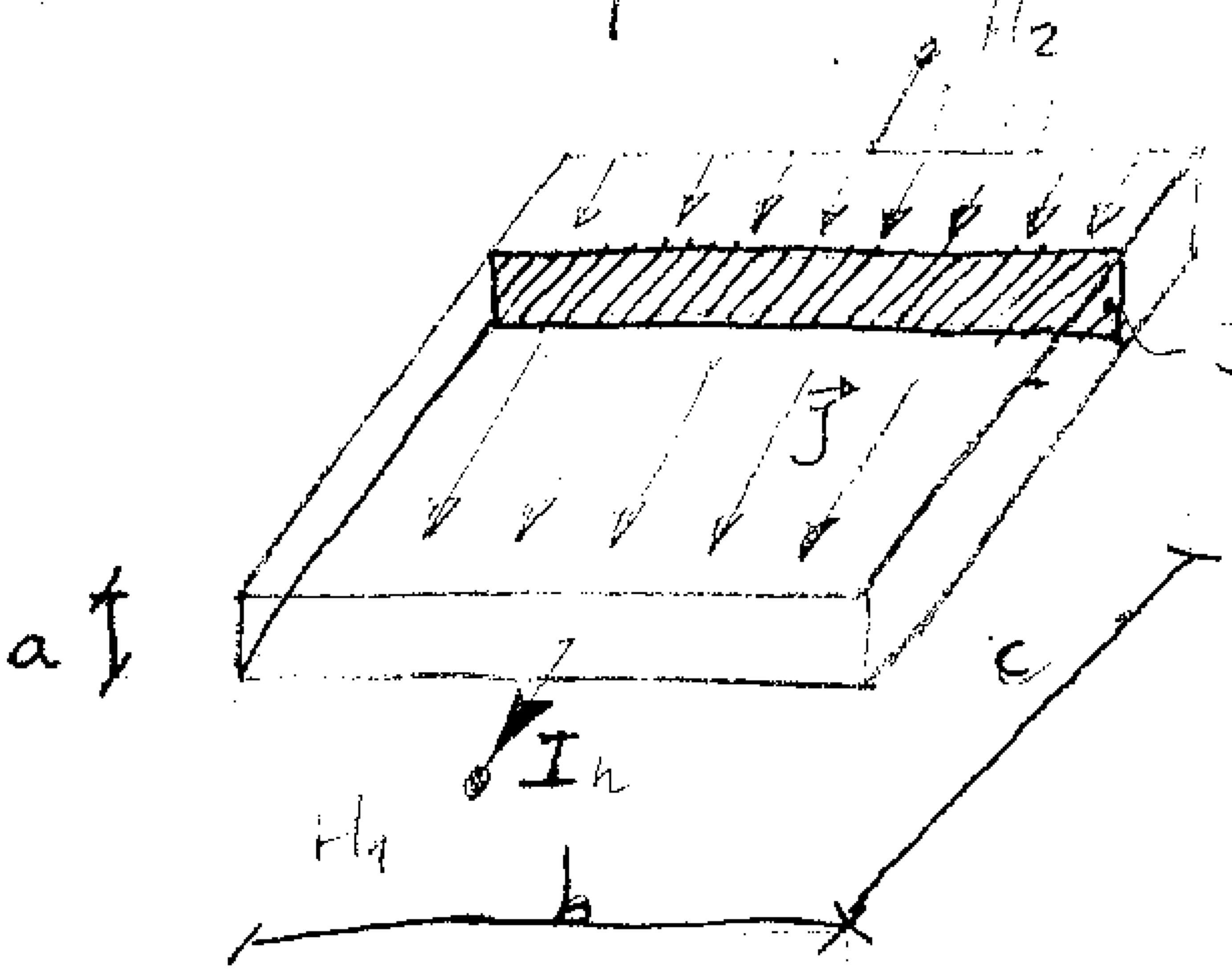


El voltímetro marca $-\mathcal{E}$

b) En el segundo apartado, sustituimos el voltímetro por una resistencia externa, Rext. En este caso, circulará corriente I_h en dirección transversal $H_1 \to H_2$, además de la corriente longitudinal I_s (la que estamos midiendo con este sensor).

La única dificultad que tiene este apartado es calcular la resistencia interna, entre los electrodos H_1 y H_2, que presenta el sensor. (la resistencia entre los electrodos H_1 y H_2 es distinta a la que aparece entre S_1 y S_2)

Para calcular la resistencia R_{int} entre H_1 y H_2, tenemos que considerar sólo el campo eléctrico debido a la conductividad $\vec{E} = \rho \vec{J} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$. (la ddp se debe a la acumulación de cargas en H_1 y H_2, pero es mucho más sencillo resolver el circuito equivalente)



$J = \frac{I_h}{S}$ (la corriente se reparte uniformemente a lo ancho de la sección)

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I_h}{\sigma S} = \frac{I_h}{\sigma a b}$$

$$V_{H2} - V_{H1} = -\int_{H1}^{H2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{H2}^{H1} \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\substack{\uparrow \\ d\vec{l} \,//\, \vec{E}}}{=} \int_{H2}^{H1} |\vec{E}||d\vec{l}| \underset{\substack{\uparrow \\ J=cte \Rightarrow E=cte}}{=} \frac{I_h}{\sigma a b} \underbrace{\int_{H2}^{H1} |d\vec{l}|}_{\substack{\text{distancia} \\ \text{entre } H_1 \text{ y } H_2}} = \frac{I_h c}{\sigma a b}$$

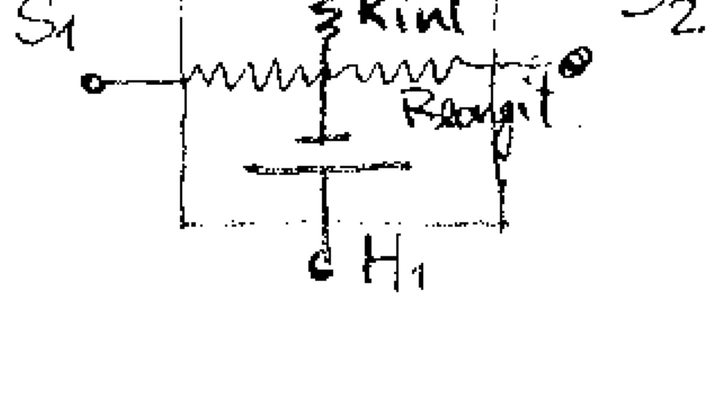
$$\Rightarrow R_{int} = \frac{V_{H2} - V_{H1}}{I_h} = \frac{c}{\sigma a b}$$

Observación: en este elemento, ortoédrico, la corriente se reparte uniformemente a lo ancho de una sección cte, y todas las líneas de corriente tienen la misma longitud. Por tanto, la resistencia se podría haber calculado directamente a través de la fórmula de la resistencia de un cable (válida para cualquier sección, siempre que se cumplan las condiciones anteriores)

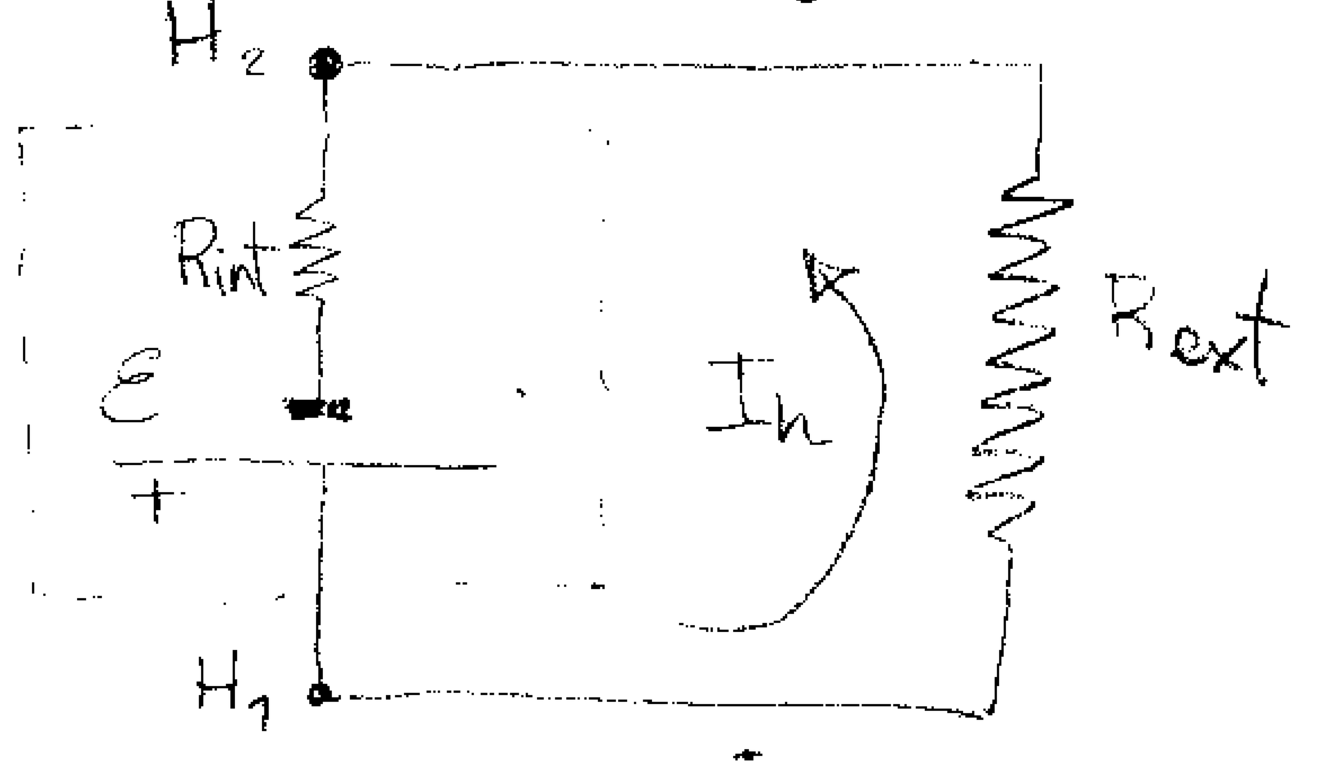
$$R_{int} = \rho \frac{\text{longitud en dirección } H_1\text{-}H_2}{\text{Sección perpendicular a la línea } H_1\text{-}H_2} = \frac{1}{\sigma}\frac{c}{a\,b} = 6'36\,\Omega$$

Si calculamos la resistencia entre S_1 y S_2, la longitud sería b y la sección sería $a \cdot c$ $\Rightarrow$ $R_{longitudinal} = \frac{1}{\sigma}\frac{b}{a\cdot c} \neq R_{int}$

$\Rightarrow$ Circuito equivalente



Volviendo al problema, plantearemos el circuito sin considerar la resistencia longitudinal



$$I_h = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_{ext}}$$

$$V_{H_1} - V_{H_2} = R_{ext} \cdot I_h = \mathcal{E}\,\frac{R_{ext}}{R_{int} + R_{ext}}$$

$$V_{H_2} - V_{H_1} = -\mathcal{E}\,\frac{R_{ext}}{R_{int} + R_{ext}}$$

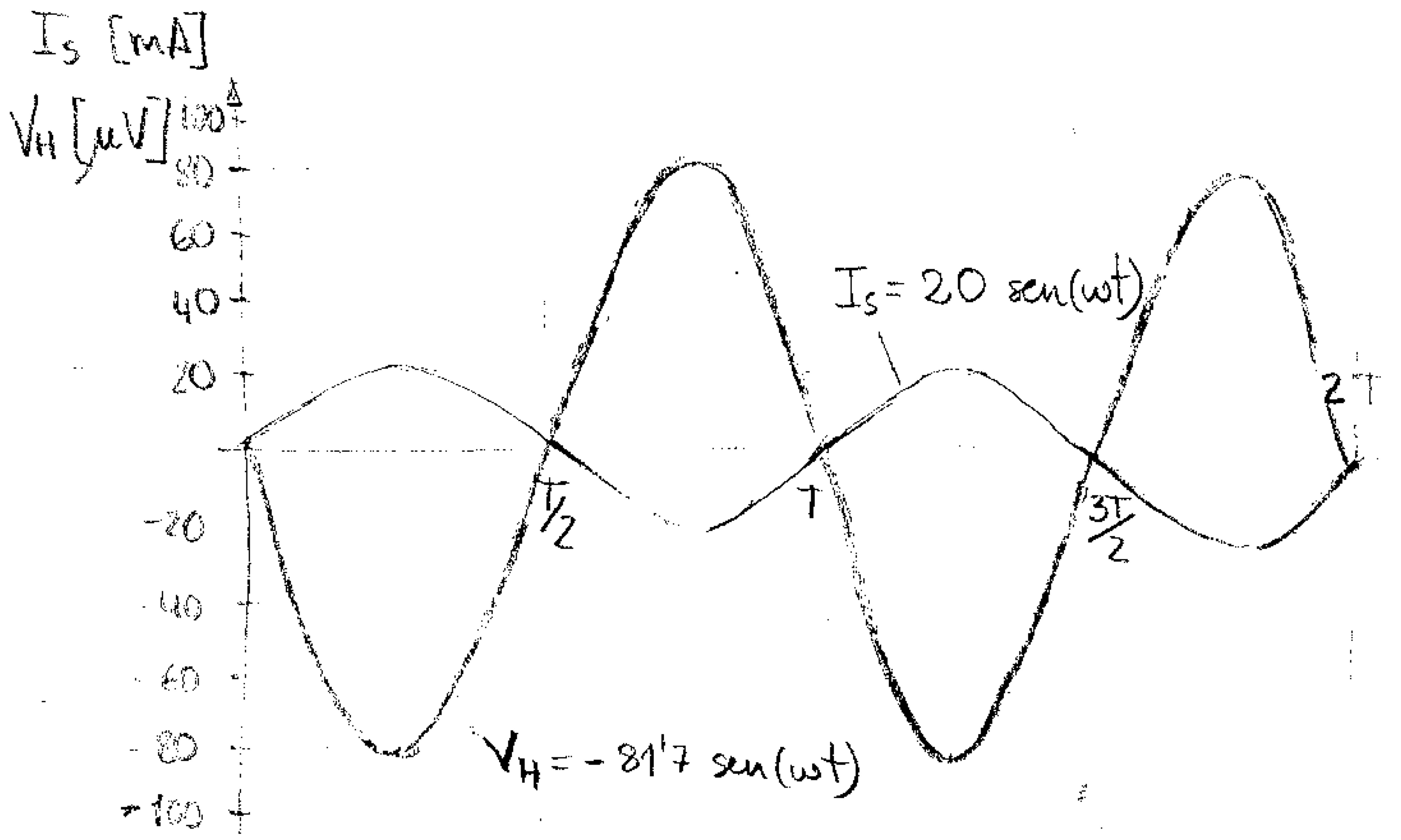
$$\boxed{V_{H_2} - V_{H_1} = -185 \cdot 10^{-6}\,V \cdot \frac{6}{6'36 + 6} = 81'7 \cdot 10^{-6}\,V = 81'7\,\mu V}$$

c) La ddp V_H esta en oposición de fase con la intensidad I_s. Es decir, la polaridad tomada para V_H es negativa cuando la intensidad I_s circula en el sentido tomado como positivo.

$$\mathcal{E} = \frac{B_0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot c}{K_i}\, I_s = 185 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad [\mu V]$$

$$I_s = I_0\, \text{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow V_H = -0'004085\, I_s = -81'7 \cdot 10^{-6}\, \text{sen}(\omega t) \quad [V]$$

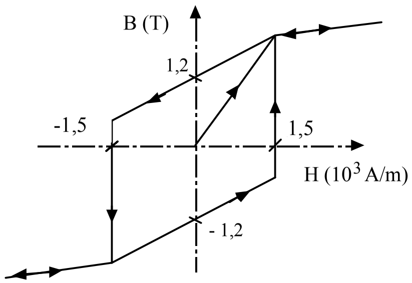


3- Un modelo de pinza amperimétrica para medir corriente eléctrica alterna está constituido por un núcleo toroidal de nylon de sección rectangular, de radio interior R_1, radio exterior R_2, y altura h. Para apantallarlo magnéticamente, se rodea el nylon de otro núcleo toroidal de acero, de radio interior R_2, radio exterior R_3, y altura h. El cable por donde circula la corriente eléctrica es perpendicular al toroide y su eje coincide con el eje del toroide. Si se supone el acero como un material lineal de permeabilidad constante $\mu_a = 500\ \mu_0$, calcular:

a) Los vectores $\vec{H}$, $\vec{B}$ y $\vec{M}$ en cualquier punto del nylon y del acero. (1 pto.)

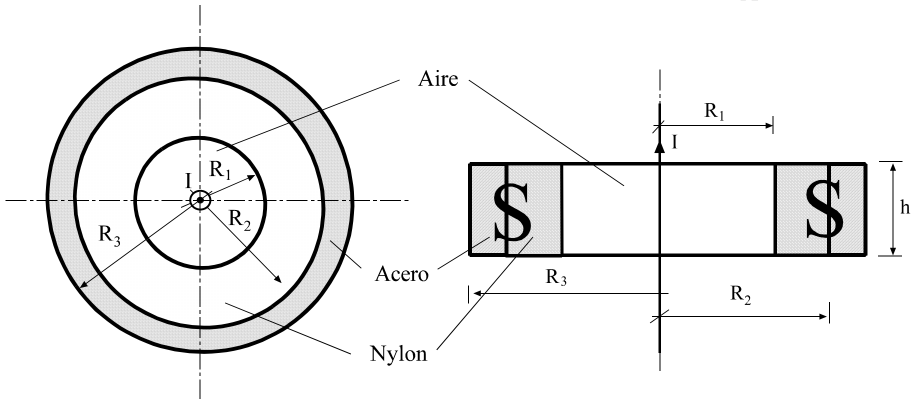
b) El flujo del vector $\vec{B}$ a través de la sección total S de la pinza (suma de la sección del nylon y la de acero) (1 pto.)

c) Si ahora se considera el acero como material ferromagnético con un ciclo de histéresis como el representado en la figura, calcular el flujo del vector $\vec{B}$ a través de la sección total S de la pinza, una vez transcurridos dos ciclos completos de la corriente eléctrica, $t = 4\pi/\omega$.



Datos: $I = I_0 \text{ sen } (\omega t)$, $I_0 = 750$ A, $\omega = 100\pi$, $R_1 = 2$ cm, $R_2 = 5$ cm, $R_3 = 7$ cm, h = 1,5 cm.

El nylon es un material no magnético de permeabilidad $\mu \cong \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{N}{A^2}$

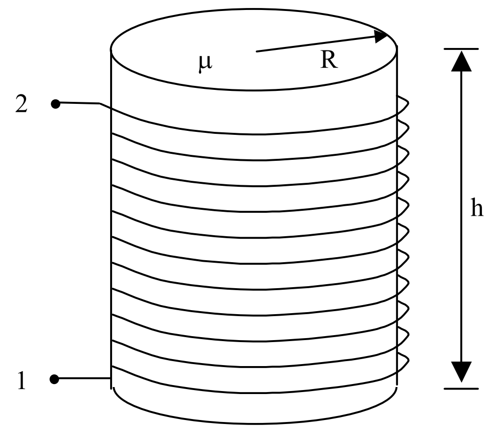


Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial II. 2ª parte. **16 de junio de 2.003**

4.- Disponemos de una bobina recta, de longitud suficiente para poder aproximarla a un solenoide muy largo, de las dimensiones especificadas en la figura (número de espiras N, longitud h, radio R, permeabilidad del núcleo μ). El cable utilizado en la construcción de la bobina es de cobre de diámetro d. Calcular:

a) La corriente que circula por la bobina, en el estado estacionario final, cuando la alimentamos con una tensión continua $V_2 - V_1 = V_0$. (Nota: Para este apartado sólo hay que considerar la parte resistiva de la bobina) (1 pto.)

b) La autoinducción y la corriente por la bobina cuando la alimentamos con una señal senoidal de amplitud V_0 igual a la del apartado anterior, $V_2 - V_1 = V_0 \cdot \cos\omega t$ con $\omega = 2\pi f$, para las frecuencias de $f_1 = 50$ Hz, y $f_2 = 1000$ Hz. Para este apartado considerar despreciable la resistencia de la bobina. (1 pto.)



Datos numéricos:

Resistividad del cobre: $\rho_{cu} = 1{,}72\cdot10^{-8}\ \Omega$.m, diámetro del cable: d = 1mm, $V_0 = 5$ V

Dimensiones de la bobina: h = 10 cm, R = 4 cm, número de vueltas: N = 400

Permeabilidad del núcleo: $\mu = 1000\cdot\mu_o$, $\mu_o = 4\pi\cdot10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A}$

Nota: Los alumnos que tienen pendiente los dos parciales deben resolver los problemas marcados con

PARCIAL III

(3) **SEGUNDO PARCIAL, 2ª PARTE**

a) $\{\vec{H}\} = \dfrac{I_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\pi r} \vec{u}_\varphi = \dfrac{119{,}36}{r} \operatorname{sen} \omega t \cdot \vec{u}_\varphi \ \dfrac{A}{m}$

$\{\vec{B}\}_n = \mu_0 \dfrac{I_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\pi r} \vec{u}_\varphi = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{r} \operatorname{sen} \omega t \, \vec{u}_\varphi \ T$

$\{\vec{B}\}_a = 500 \mu_0 \dfrac{I_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$

$\vec{M} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \vec{0}$ (nylon)

$\vec{M}_a = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = 499 \dfrac{I_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$

$\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H}$

b) $\phi_n = \mu_0 \dfrac{I_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\pi} \cancel{8} h \ln \dfrac{R_2}{R_1} =$

$= \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 750}{2\pi} \operatorname{sen} \omega t \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \ln \dfrac{5}{2} =$

$= 206{,}165 \cdot 10^{-8}$ Wb

$\phi_a = \dfrac{500 \mu_0 I_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\pi} \cdot \cancel{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot h \ln \dfrac{R_3}{R_2} =$ (750)

$= 500 \cdot 2 \cdot 750 \cdot 10^{-7} \operatorname{sen} \omega t \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \ln \dfrac{7}{5} =$

$= 378{,}53 \cdot 10^{-6}$ Wb

$\phi_T = 380{,}59 \cdot 10^{-6}$ Wb.

c) $B(r=R_2) = \frac{750 \cdot 500 \cdot \cancel{4}\pi \cdot 10^{-7}}{\cancel{4}\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 1{,}5\,T$

$H(r=R_2) = 2{,}387 \cdot 10^{3}\ \frac{A}{m}$

$H(r=R_3) = 1{,}705 \cdot 10^{3}\ \frac{A}{m}$

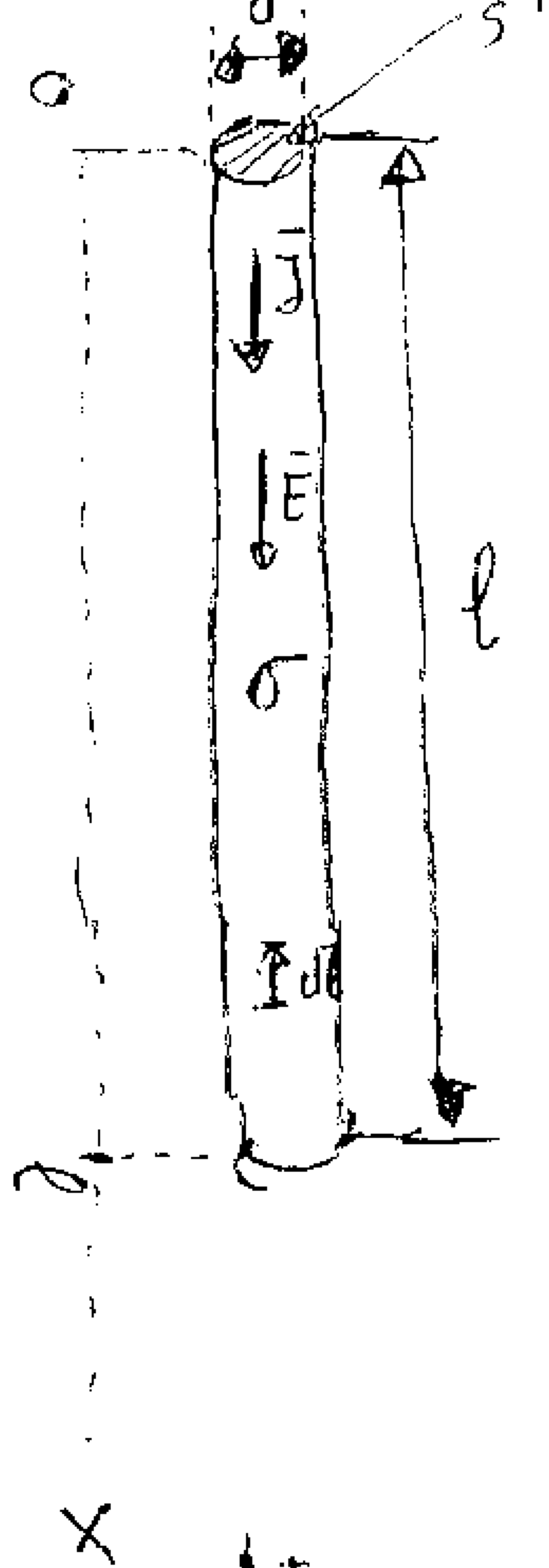
$t = 4\pi/\omega \Rightarrow B\ \cancel{(r=R}\ \forall R_2 < r < R_3$

$B = -1{,}2\,T$

$\phi_3 = -300 \cdot 10^{-6}\ Wb.$

Conv Junio (16-06-03) 2º parcial, 2ª parte

4 a) Para calcular la resistencia del cable que forma la bobina tenemos que considerarlo como un cable recto, de la longitud total utilizada para hacer los N vueltas de cable.

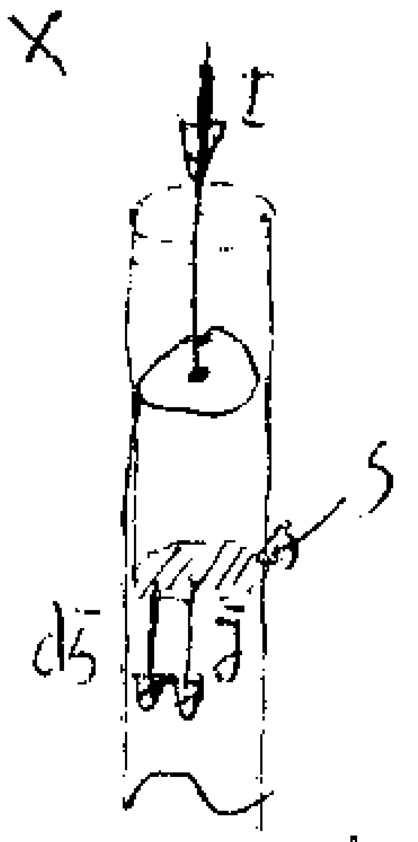


La longitud de cable utilizada la denominaré ℓ y es la longitud de una vuelta $(2\pi R)$ multiplicada por el número de vueltas de la bobina, así:

$$\ell = N \cdot 2\pi R = \underline{100{,}5 \ m = \ell}$$

La sección del cable es la marcada en la figura y vale $S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \underline{0{,}78 \cdot 10^{-6} \ m^2 = S}$

Si no recordamos la fórmula de la resistencia de un conductor con simetría plana como este es fácil deducirla. Para ello aplicamos la ecuación de continuidad en condiciones estacionarias ($\oiint \bar{J}\, d\bar{S} = 0$). Usamos como sup cerrada un cilindro como el dibujado, con una tapa dentro del conductor (y paralela a su sección) y la otra fuera, pero atravesada en un pto por la corriente total que entra al conductor. Por la construcción geométrica es claro que el flujo de $\bar{J}$ a través de las paredes laterales del cilindro elegido es cero.



Como partimos de las condiciones estacionarias de corriente (es decir que la suma total de flujo de $\bar{J}$ por la superficie cerrada es cero) deducimos que el flujo de $\bar{J}$ a través de la tapa inferior es igual a la I que entra por la cara superior. En resumen, concluimos que:

$$I = \iint_S \bar{J}\, d\bar{S} \underset{\bar{J} \parallel d\bar{S}}{=} \iint_S J\, dS \underset{J = cte \text{ por simetría}}{=} J \cdot S \Rightarrow \bar{J} = \frac{I}{S}\, \hat{u}_x$$

usando la ley de Gauss local: $\bar{J} = \sigma \bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \frac{I}{\sigma S}\, \hat{u}_x = \frac{\rho I}{S}\, \hat{u}_x$

(recordar que la resistividad ρ es la inversa de la conductividad σ)

Si ahora calculo la d.d.p entre los extremos del cable tengo

$$V(x=0) - V(x=\ell) = -\int_\ell^0 \bar{E}\, d\bar{\ell} \underset{\bar{E}\, op\, d\bar{\ell}}{=} \int_\ell^0 E\, d\ell \underset{d\ell=-dx}{=} -\int_\ell^0 E\, d\ell \underset{E=cte}{=} -\frac{\rho I}{S}(-\ell) = \frac{\rho \ell I}{S}$$

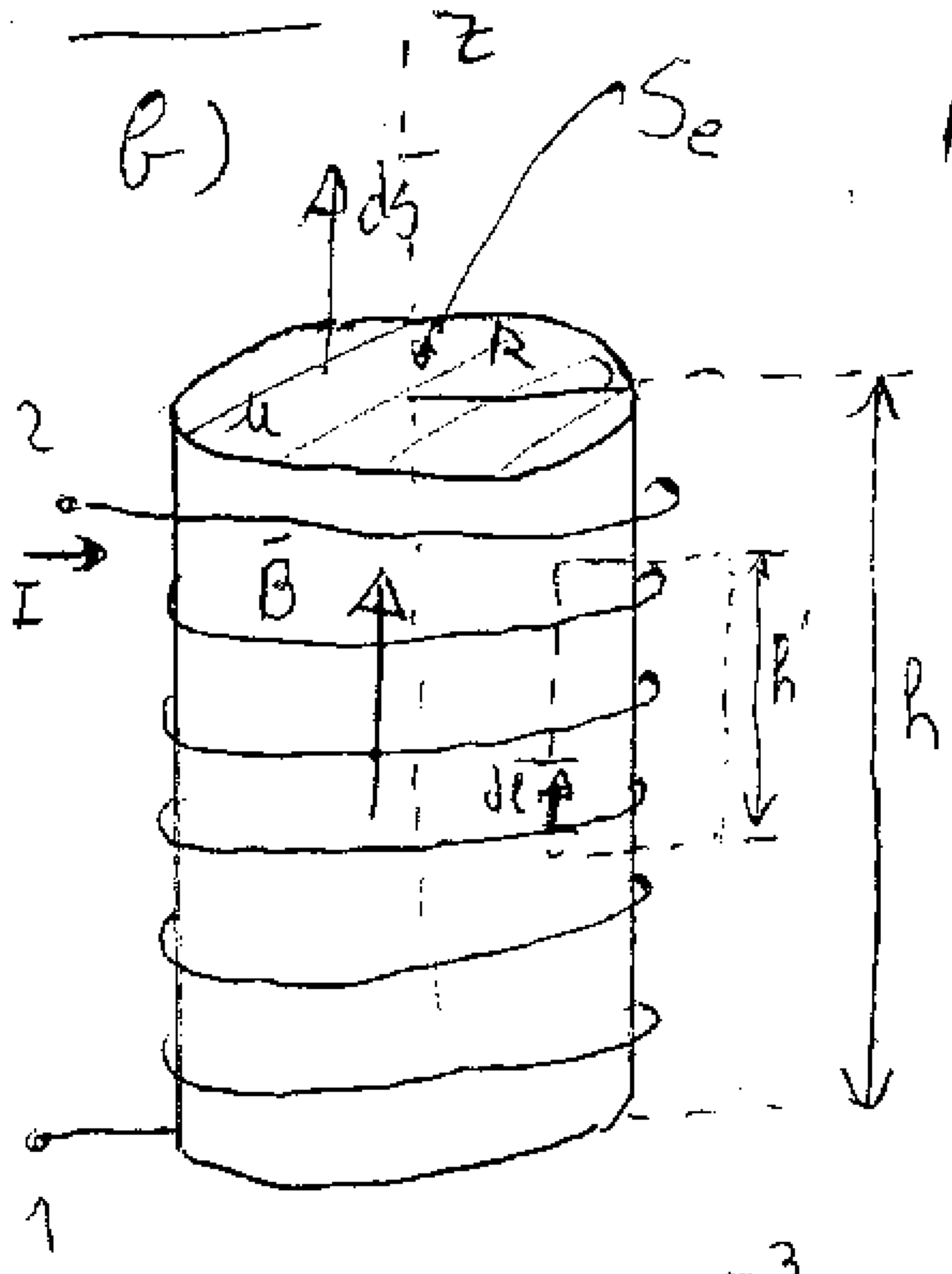
Luego $V_0 = \frac{\rho \ell}{S} \cdot I$

aplicando que $R = \frac{V_0}{I}$ deducimos: $R = \frac{\rho \ell}{S}$

ahora no hay mas que sustituir datos: $R = \frac{(1{,}72 \cdot 10^{-8}) \cdot (100{,}5)}{0{,}78 \cdot 10^{-6}} = 2{,}22\,\Omega$

Conociendo la resistencia el cálculo de la I que circula es inmediato: $V_0 = R I \Rightarrow \boxed{I = \frac{V_0}{R} = 2{,}26\ A}$

b)



$S_e = \pi R^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ m^2$

Para calcular L en la bobina, calcularemos primero $\bar{B}$ usando Ampere. Para ello tomaré la trayect representada, y supondré el sentido positivo de entrad de corriente indicado. En estas condiciones $\bar{B}$ va en el sentido dibujado. Circulando por la tray elegida tal como se especifica en la figura tengo:

$$\oint \bar{H}\, d\bar{\ell} = \int_0^{h'} H\, dz \underset{H=cte}{=} H h'$$

$H=0$ en el exterior
$\bar{H} \perp d\bar{\ell}$ en los tramos horizontales
$\bar{H} \parallel d\bar{\ell}$ en tramo vertical interior

$$\bar{H} = \frac{N}{h} I\, \hat{u}_z$$

Corriente real abrazada por la trayectoria $\equiv I_{abr} = \frac{N}{h} \cdot h' I$

El campo $\bar{B}$ vale: $\bar{B} = \mu \bar{H} = \mu \frac{N}{h} I\, \hat{u}_z$

El flujo de $\bar{B}$ a través de las N espiras de la bobina vale

$$\phi = N \iint_{S(espira)} \bar{B}\, d\bar{S} \underset{\bar{B} \parallel d\bar{S}}{=} N \iint_{S_e} B\, dS \underset{B=cte}{=} \mu \frac{N^2}{h} I \iint_{S_e} dS = \mu N^2 \frac{\pi R^2}{h} \cdot I$$

16-06-03

2 parte, 2º parcial;

4 b (cont)

Como $L = \frac{\Phi}{I} = \boxed{\mu \frac{N^2 \pi R^2}{h}} = \boxed{10,1\ H = L} = \mu n^2 h \pi R^2 \quad (n = \frac{N}{h})$

Tomando el sentido de corriente positivo como se indica en la figura, y suponiendo despreciable la resistencia del cable se llega a que la ddp en los extremos de la bobina está relacionada con la variación de I en ella así;

$$V_2 - V_1 = L \frac{dI}{dt}$$

por tanto la I se obtendrá integrando..

$$I = \frac{1}{L}\int (V_2 - V_1)\, dt = \frac{1}{L}\int V_0 \cos \omega t \, dt = \boxed{\frac{V_0}{L}\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t = I}$$

La amplitud de I para las dos frecuencias pedidas vale:

$$I_{0_1} = \frac{V_0}{L 2\pi f_1} = 1,59\ mA \qquad f_1 = 50\ Hz$$

$$I_{0_2} = \frac{V_0}{L 2\pi f_2} = 79,58\ \mu A \qquad f_2 = 1000\ Hz$$