Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**

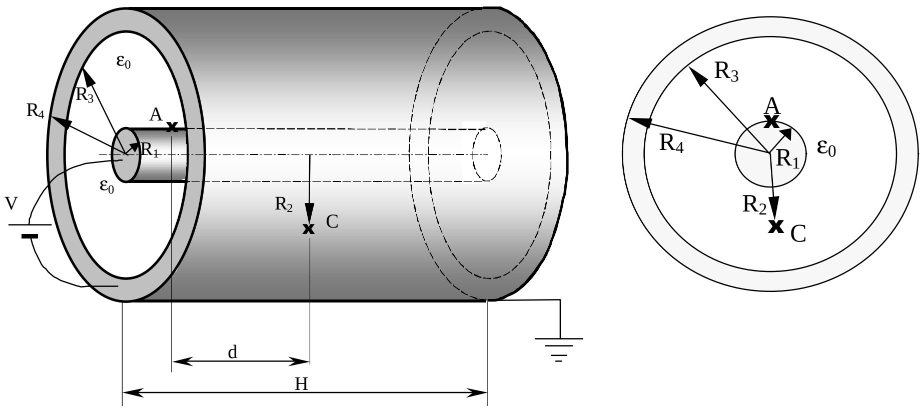
Primer Parcial. **31 de enero de 2005**

Apellidos, nombre:... Grupo..........................

1.- Un cilindro metálico macizo de radio R_1 se encuentra a un potencial $V_0>0$ respecto de tierra. Concéntrico a él se situa un tubo metálico de radio interior R_3 y radio exterior R_4, tal como se indica en el dibujo. El tubo exterior está conectado a tierra y el sistema está relleno de aire (ε_0).

a) Calcular la diferencia de potencial $V_A - V_C$. El punto A se encuentra en la superficie del cilindro central ($r = R_1$) y el punto C se encuentra entre los dos electrodos ($r = R_2$). (1 punto)

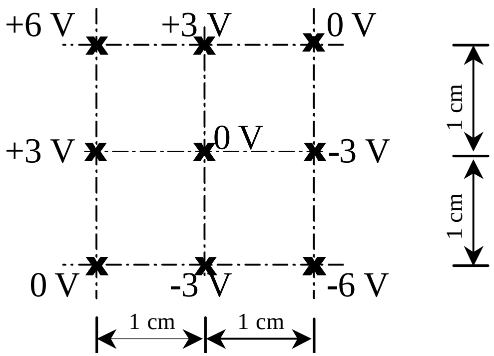
b) La rigidez dieléctrica del aire puede variar con las condiciones de temperatura, humedad y presión. Si el efecto corona comienza a producirse alrededor del cilindro interior cuando adquiere un potencial V_{MAX} respecto a tierra, calcular la rigidez del aire E_{MAX} en esas condiciones. (1 punto)



Datos: R_1 = 1 cm, R_2 = 2 cm, R_3 = 3 cm, R_4 = 4 cm, H = 10 cm, d = 5 cm, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N\,m^2}$,

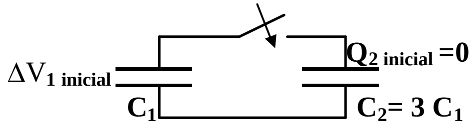
V_0 = 100 V, V_{MAX} = 32 958 V.

2.- Se mide en 9 puntos de un papel electrostático el potencial respecto a tierra (los puntos están situados en una cuadrícula de 1 cm de lado). $\vec{E} = cte$ en dicha región del espacio. Dibujar las líneas equipotenciales y de campo $\vec{E}$, indicando claramente el sentido de $\vec{E}$. Calcular numéricamente el módulo y dirección en el centro de la cuadrícula. (1 punto)



Nota: Si las líneas equipotenciales y de campo se dibujan directamente sobre esta hoja, apuntar el nombre en la parte superior.

3.- Calcular la variación de energía entre la situación final e inicial, $\Delta W = W_{final} - W_{inicial}$. ¿Por qué sale negativa? (1 punto)



Datos: $\Delta V_{1\ inicial}$ = 200 V, $Q_{2\ inicial}$ = 0 μC, C_1 = 50 μF, C_2 = 150 μF

4.- Disponemos de un sensor de la cantidad de etanol en un líquido, formado por dos electrodos metálicos semiesféricos de radios R_1 y R_2, concéntricos entre sí (ver parte izda de Figura 1). Entre ambos electrodos se aloja el líquido dieléctrico. La cantidad de etanol se mide aprovechando que la permeabilidad del dieléctrico cambia con el porcentaje de etanol en la mezcla con la siguiente relación:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot (s_1 + x)$$

donde s_1 = 20 (constante adimensional) y x es el porcentaje de etanol en la mezcla que varía desde 0 (no hay etanol) hasta 100 (está mezclado en igual cantidad que el otro compuesto).

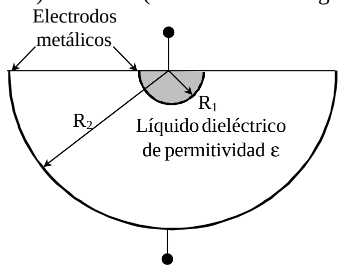


Figura 1: Disposición original del sensor

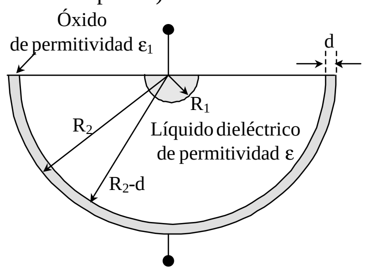


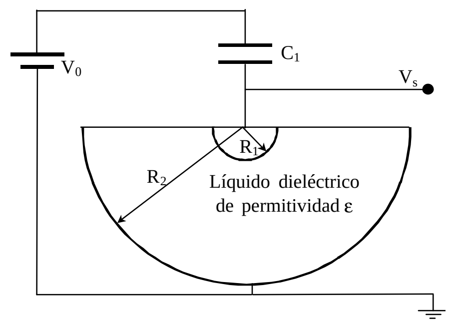
Figura 2: Sensor con capas de óxido en torno a los electrodos

Durante la operación del dispositivo aparece, por envejecimiento, una capa de óxido en torno al electrodo de radio R_2, dieléctrica, de espesor d y permitividad ε_1.

a) Calcular la capacidad del sensor para el caso inicial (sin óxido) y para el final en función de ε. Comparar los valores de capacidad en ambos casos, para x = 100, indicando si afectan apreciablemente las capas de óxido a la capacidad total del sensor.

b) Si la diferencia de potencial total entre los electrodos vale V_s = 10 V en el caso con las capas de óxido, calcular la energía electrostática asociada **únicamente** al líquido dieléctrico en función de ε (sin incluir la energía asociada a las capas de óxido). Dar el valor numérico para x = 50.

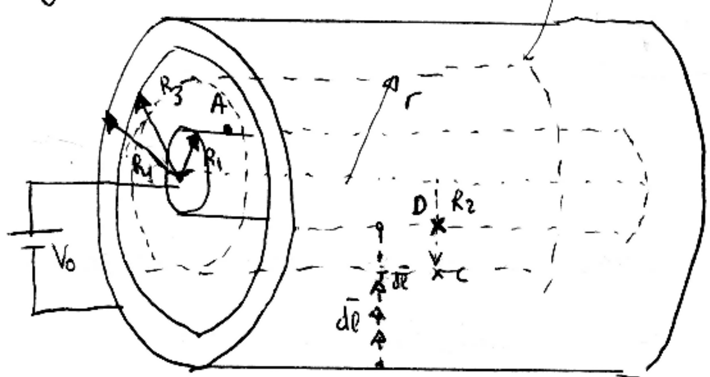
c) Para utilizar el sensor en una aplicación práctica se limpia convenientemente para evitar las capas de óxido y se conecta en serie con otro condensador de capacidad conocida C_1. Entre los extremos de los condensadores se conecta una fuente de valor V_0 = 15 V (ver figura). Calcular la tensión, V_s en bornes del sensor en función del porcentaje de etanol (x). Dar valores numéricos de V_s para x = 0, 50, y 100 y representar gráficamente.



Nota: Para todos los cálculos puede suponerse simetría esférica en todas las regiones del sensor

Datos: R_1 = 15 mm, R_2 = 35 mm, d = 1 mm, $\varepsilon_1 = 3\cdot\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\left[\dfrac{C}{V\cdot m}\right]$, C_1 = 100 pF

Ejercicio 1:



a) Calcular $V_A - V_C$

Primero calcularé el campo entre los dos conductores. Para ello aplicaré Gauss a una superficie cilíndrica de radio r $(R_1 < r < R_3)$ y longitud arbitraria ℓ.

$$\oiint \bar{D}\,d\bar{s} \underset{\uparrow}{=} D \iint_{S_L} ds = D\,2\pi r \ell$$

$\bar{D} \perp d\bar{s}$ en tapas $\Rightarrow \bar{D}\cdot d\bar{s} = 0$

$\bar{D} \parallel d\bar{s}$ en pared lateral $\Rightarrow \bar{D}\cdot d\bar{s} = D \cdot ds$

$D = cte$ en pared lateral

$$Q_{enc} = \iint_{S_{\text{lateral del cilindro central}}} \sigma\, ds \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma = cte}}{=} \sigma\, 2\pi R_1 \ell$$

$$\underset{\text{aplicando Gauss}}{\Longrightarrow} D\,2\pi r\ell = \sigma\, 2\pi R_1 \ell \Rightarrow \bar{D} = \frac{\sigma R_1}{r}\hat{u}_r$$

($\hat{u}_r \equiv$ dirección radial de cilíndricas)

Aplicando la relación $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\,\hat{u}_r$

<u>Aquí σ no es dato</u> $\Rightarrow$ Debemos poner $\bar{E}$ en función del dato, que en este caso es V_0, para ello, calcularé la d.d.p. entre los conductores. (Tomaré una trayectoria radial de $R_2 \to R_1$)

$$V_0 = V(R_1) - V(R_2) = -\int_{R_3}^{R_1} \bar{E}\,d\bar{\ell} \underset{\bar{E}\text{ op } d\bar{\ell}}{=} \int_{R_3}^{R_1} E\,d\ell \underset{d\ell = -dr}{=} -\int_{R_3}^{R_1} E\,dr = -\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\int_{R_3}^{R_1}\frac{1}{r}\,dr = -\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_1}{R_2} =$$

(porque r decrece al ir de $R_2 \to R_1$)

$$\underset{\text{por propiedades de los logaritmos}}{=} \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_3}{R_1} = V_0 \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R_1}\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_3}{R_1}} \Rightarrow \bar{E} = \frac{V_0}{\ln\frac{R_3}{R_1}}\cdot\frac{1}{r}\,\hat{u}_r$$

Para calcular la ddp entre los ptos A y C, aplicaré que todos los puntos de la superficie del conductor central están al mismo potencial (equipotencial). Por tanto puedo trasladar el pto A, a otro D (marcado en el dibujo) en la superficie del conductor central y en la línea radial que pasa por el pto C

Por tanto: $V_A - V_C = V_0 - V_C = -\int_C^0 \bar{E}\, d\bar{l} \underset{\substack{\bar{E}\ \text{op}\ d\bar{l} \\ dl = -dr}}{=} -\int_{R_2}^{R_1} E\, dr = -\frac{V_0}{\ln\frac{R_3}{R_1}} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r}\, dr =$

$$= \boxed{\frac{V_0}{\ln\frac{R_3}{R_2}} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1} = V_A - V_C} = \boxed{63{,}1\ V}$$

b) Si al aplicar V_{MAX} al sistema comienza a producirse ionización, esto se debe a que el campo entre los conductores alcanza en algún punto el valor de ruptura. El valor de ruptura se alcanzará primero en la zona entre los conductores en la que el campo sea máximo. Viendo la forma del campo, esto sucede para $r = R_1$.

En resumen, el potencial V_{MAX} es el que hace que el campo en $r = R_1$ sea igual al de ruptura del aire. Por tanto, aplicando las expresiones calculadas antes tenemos:

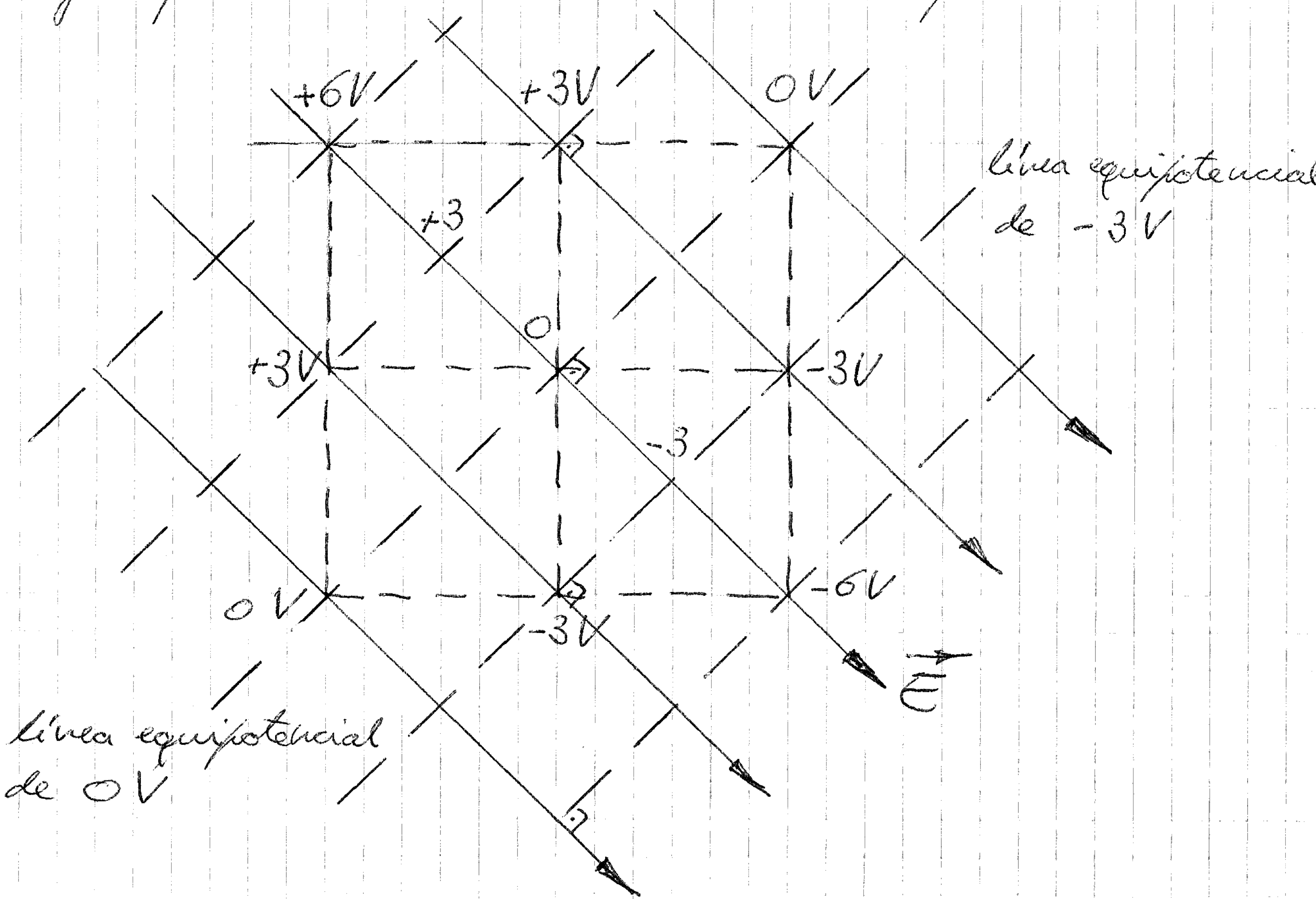
$$E(R_1) = \boxed{E_r = \frac{V_{MAX}}{\ln\frac{R_3}{R_1}} \cdot \frac{1}{R_1} = 3\ MV/m}$$

(2)

a)

LÍNEAS EQUIPOTENCIALES ≡ Unen puntos cuyo potencial puntual respecto a una referencia (en este caso tierra) tiene el mismo valor. SON LÍNEAS RECTAS SEPARADAS UNIFORMEMENTE YA QUE $\vec{E}$ = cte.

LÍNEAS DE CAMPO ≡ Son líneas perpendiculares a las líneas equipotenciales y definen la dirección del vector $\vec{E}$. Como son líneas de fuerza, hay que asociarles un sentido; este va de las zonas de mayor potencial hacia las de menor potencial.



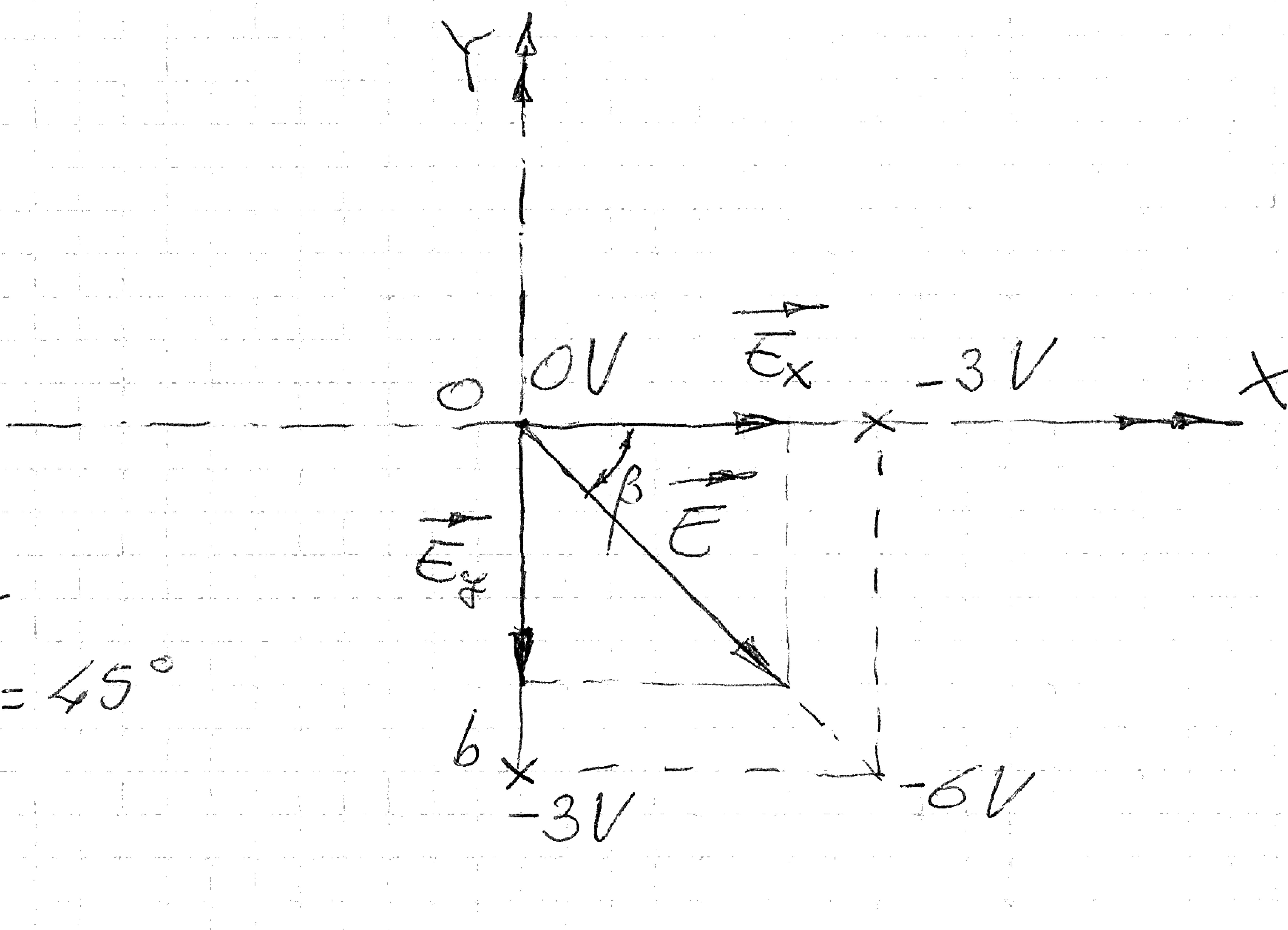
b) $V_a - V_b = \dfrac{W_{b \to a}}{q} = -\int_c_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl} \simeq -|\vec{E}| \cdot |\vec{\Delta l}| \cdot \cos\alpha$

$$|\vec{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 \quad \begin{cases} |E_x| = \dfrac{\Delta V}{\Delta x} \text{ (según } XX'\text{)} \\ |E_y| = \dfrac{\Delta V}{\Delta y} \text{ (según } YY'\text{)} \end{cases}$$

$$tg\,\beta = \frac{|E_y|}{|E_x|}$$

$$E_x = \frac{V_o - V_a}{\Delta x} = \frac{0-(-3)}{10^{-2}} = 3 \cdot 10^2 = 300\ \frac{V}{m}$$

$$E_y = \frac{V_o - V_b}{\Delta y} = \frac{0-(-3)}{10^{-2}} = 3 \cdot 10^2 = 300\ \frac{V}{m}$$



$tg\,\beta = 1$

$\beta = \dfrac{\pi}{4} = 45°$

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{u}_x + E_y(-\vec{u}_y) = 300\,\vec{u}_x - 300\,\vec{u}_y \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$|\vec{E}| = \{300^2 + 300^2\}^{1/2} = 424{,}26\ \frac{V}{m}$$

(3)

ESTADO I

${}^{I}W_1 \equiv$ Energía electrostática almacenada en el condensador de capacidad C_1 =

$= \frac{1}{2} {}^{I}q_1 \cdot {}^{I}V_1 = \frac{1}{2} C_1 \cdot {}^{I}V_1^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 =$

$= 1 \text{ J}$

${}^{I}W_2 \equiv$ Energía electrostática almacenada en el condensador de capacidad C_2 =

$= 0 \text{ J}$ ya que ${}^{I}q_2 = 0 \text{ C}$

$${}^{I}W_T = {}^{I}W_1 + {}^{I}W_2 = 1 \text{ J}$$

ESTADO II

La carga inicial en el condensador 1 se reparte entre los dos condensadores. La diferencia de potencial final será menor que la inicial (al perder el condensador 1 parte de su carga) y será la misma para los dos condensadores

$${}^{II}V_1 = \frac{{}^{II}q_1}{C_1} = {}^{II}V_2 = \frac{{}^{II}q_2}{C_2}$$

La segunda ecuación necesaria la obtenemos sabiendo que la carga inicial ${}^{I}q_1$ será igual a la final del estado II repartida en ambos condensadores

$${}^{I}q_1 = {}^{II}q_1 + {}^{II}q_2 = C_1 \cdot {}^{II}V_1 + C_2 \cdot {}^{II}V_2$$

$${}^{I}q_1 = C_1 \cdot {}^{I}V_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 10 \text{ mC}$$

$$^{I}q_1 = [C_1 + C_2] \cdot {}^{II}V_1 = [C_1 + C_2] \cdot {}^{II}V_2 =$$

$$= [C_1 + 3 \cdot C_1] \cdot {}^{II}V_1 = 4\, C_1 \cdot {}^{II}V_1$$

$$^{II}V_1 = {}^{II}V_2 = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 50\ V$$

$$^{II}q_1 = C_1 \cdot {}^{II}V_1 = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ C$$

$$^{II}q_2 = C_2 \cdot {}^{II}V_2 = 150 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ C$$

$$^{II}W_1 = \frac{1}{2}\, {}^{II}q_1 \cdot {}^{II}V_1 = \frac{1}{2}\, 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 62{,}5\ mJ$$

$$^{II}W_2 = \frac{1}{2}\, {}^{II}q_2 \cdot {}^{II}V_2 = \frac{1}{2}\, 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 187{,}5\ mJ$$

$$^{II}W_T = {}^{II}W_1 + {}^{II}W_2 = 250\ mJ.$$

$$\Delta W = W_{final} - W_{inicial} = {}^{II}W_T - {}^{I}W_T =$$

$$= 0{,}250 - 1 = -0{,}75\ J < 0$$

El sistema formado por los dos condensadores pierde energía en el proceso de reparto de carga debido a fenómenos asociados con la corriente eléctrica. Estos pueden ser la transformación de la energía en calor, la emisión de luz (energía electromagnética) en forma de chispa, la emisión de ruido (energía mecánica).

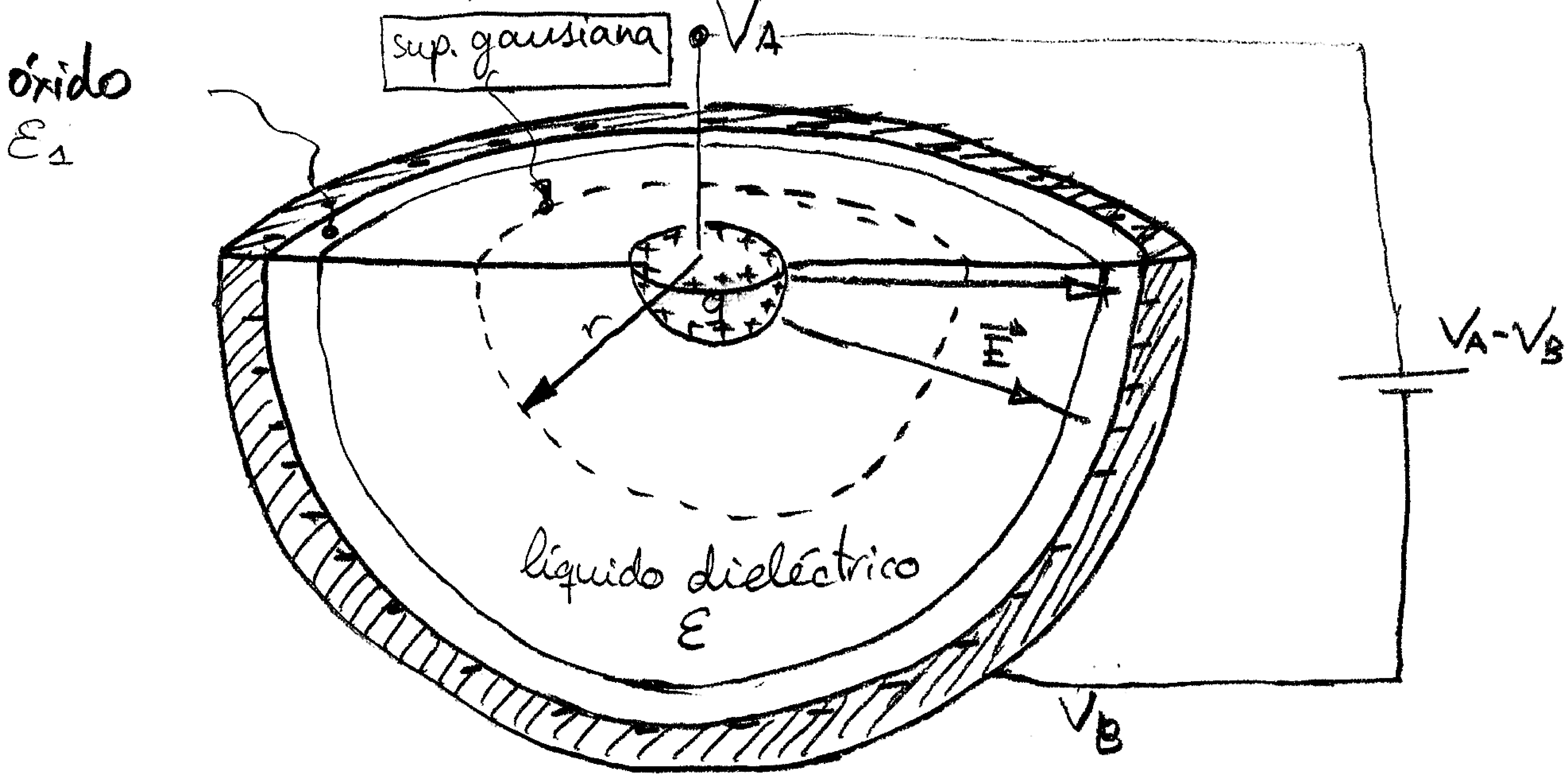
$\boxed{4a}$ Para calcular la capacidad del sensor debemos seguir los pasos vistos en clase:

- Aplicar Gauss y obtener $\vec{E}$ en función de la carga
- Calcular la ddp entre electrodos
- Calcular la capacidad como el ratio $C = \dfrac{Q}{V_A - V_B}$

C debe ser un número pequeño y positivo (en caso contrario repasaremos las cuentas o pondremos un comentario en el examen).

• <u>Aplicar Gauss</u>

Por abreviar aplico Gauss al sensor con óxido, ya que el caso inicial se puede obtener sustituyendo el espesor del óxido $d=0$,



La superficie gausiana elegida es una semiesfera de radio genérico r (entre R_1 y R_2) con la tapa superior horizontal para formar una superficie cerrada.

$$\Phi_D = \Phi_{\substack{\text{semiesfera}\\ \text{inferior}}} + \Phi_{\text{tapa superior}} = \underset{\substack{\text{semiesfera}\\ \vec{D} \parallel \vec{n}}}{\int} \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS + \underset{\substack{\text{tapa sup.}\\ \vec{D} \perp n}}{\int} \cancel{\vec{D}\cdot\vec{n}\, dS}$$

Nota: dada la simetría del problema $\vec{E}$ y $\vec{D}$ deben tener dirección radial hacia afuera (el electrodo central lo hemos tomado positivo).

Por la simetría del problema D sólo depende de r, y en la semiesfera $r = cte$

$$\Phi_D \underset{\uparrow}{=} |\vec{D}| \int_{semiesfera} dS = |\vec{D}| \frac{4\pi r^2}{2} \underset{\uparrow}{=} q_{encerrada} = q$$

$|\vec{D}| = cte$ en semiesfera

ley de Gauss

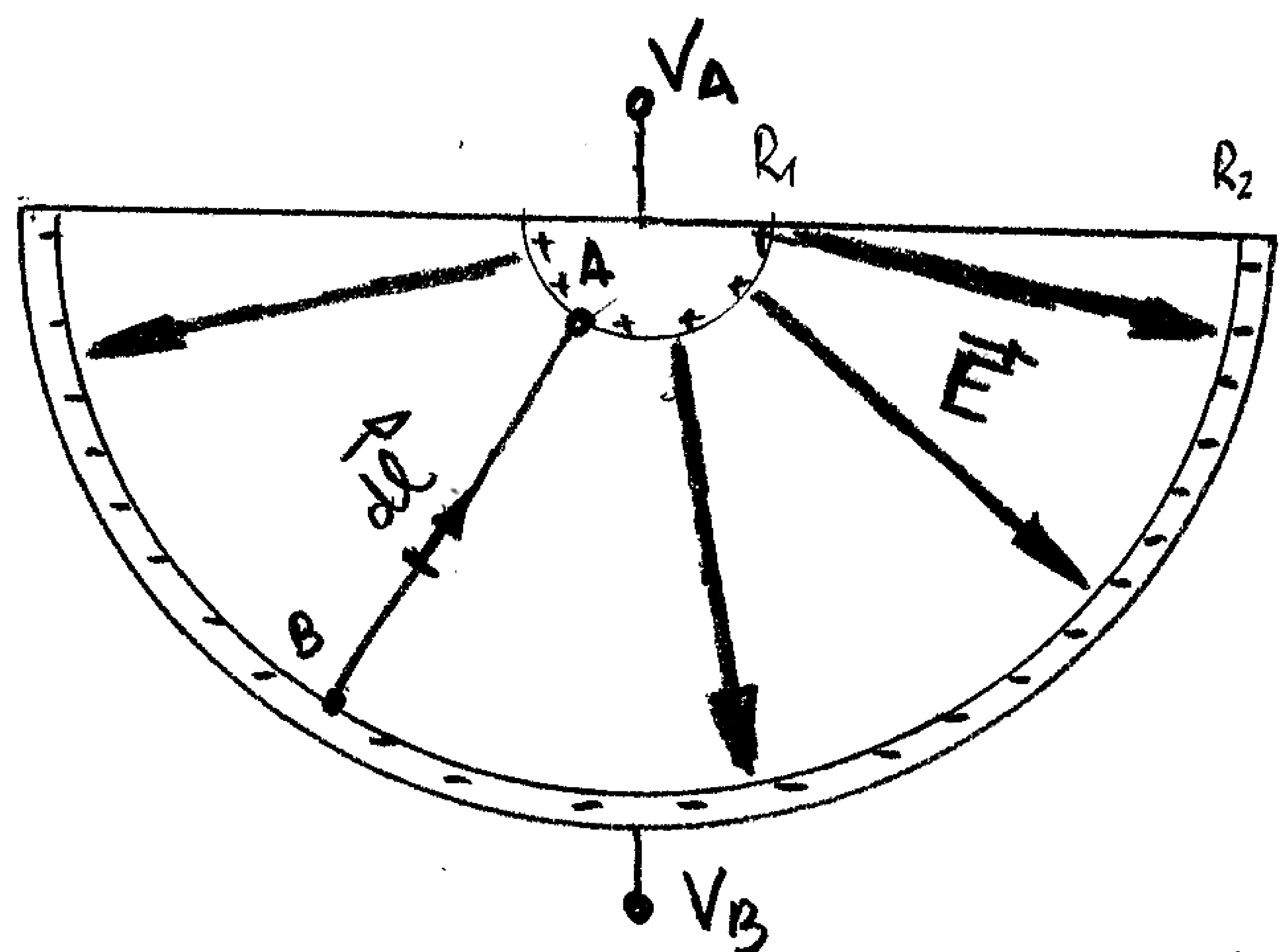
$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{2\pi r} \vec{u_r}$$ (expresión válida para los dos dieléctricos).

Cada dieléctrico (el líquido y el óxido) tienen una permitividad diferente

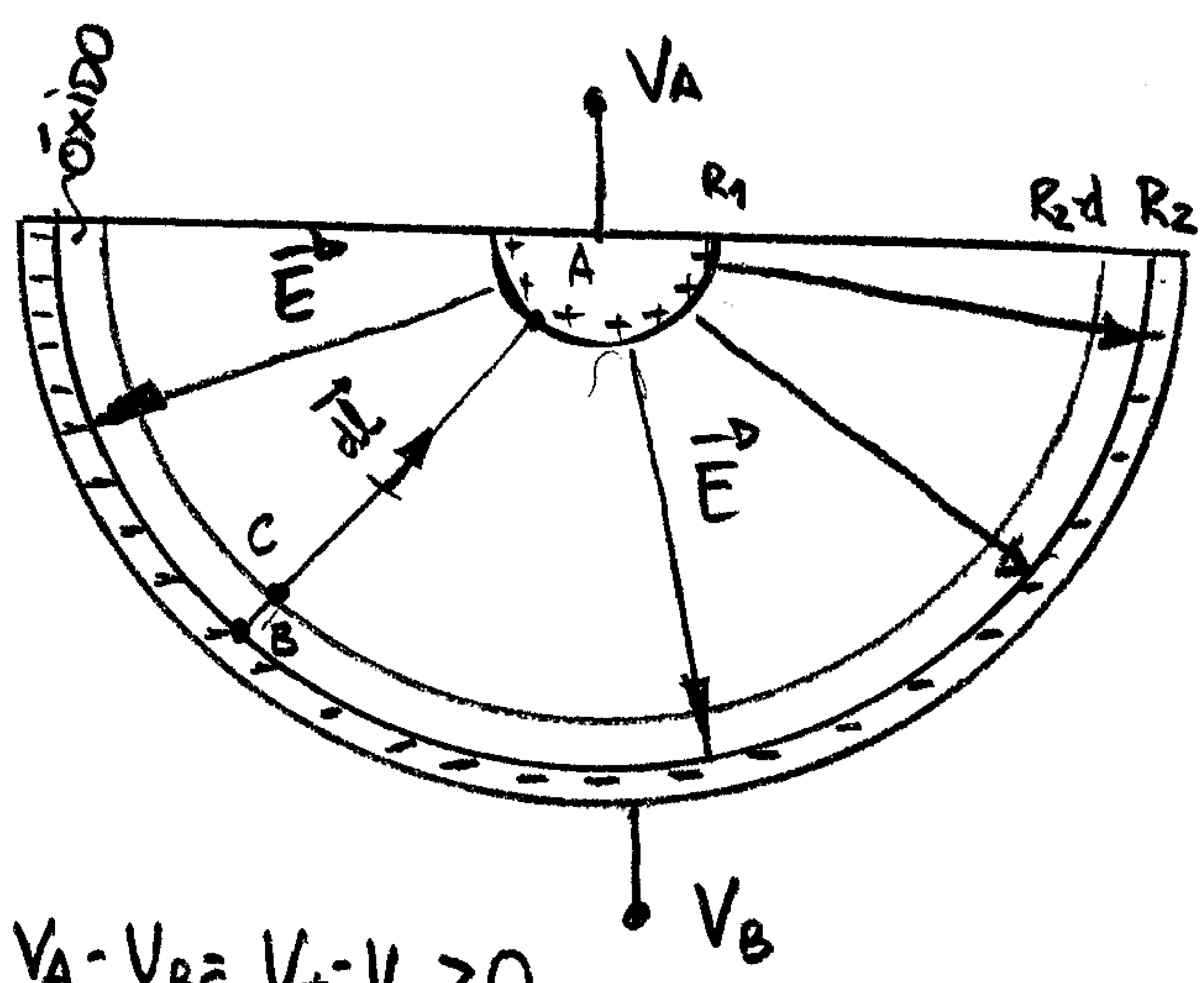
$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{2\pi \varepsilon_1 r^2} \vec{u_r} & R_1 < r < R_2 - d \\ \dfrac{q}{2\pi \varepsilon_2 r^2} \vec{u_r} & R_2 - d < r < R_3 \end{cases}$$

- Cálculo de la ddp entre los electrodos

caso inicial



caso final



En ambos casos $V_A - V_B = V_+ - V_- > 0$

* En el caso inicial

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl} \underset{\vec{E} \text{ op } \vec{dl}}{=} + \int_B^A |\vec{E}||\vec{dl}| \underset{|\vec{dl}| = -dr}{=} - \int_B^A E\, dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{2\pi \varepsilon r^2} dr =$$

$$= -\frac{q}{2\pi \varepsilon} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = + \frac{q}{2\pi \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0$$

$$C_{inic} = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\cancel{q}}{\frac{\cancel{q}}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 1{,}46 \cdot 10^{-12}(20+x)$$

Sustituyendo valores obtengo para $x = 100$ $\underline{C_{inic} = 175{,}16\ pF}$

* En el caso final (con óxido) debo separar la integral en el tramo de óxido y de líquido. El óxido es un dieléctrico, es decir, un aislante. Al no ser conductor, $V_B - V_C \neq 0$ y por tanto $V_A - V_B \neq V_A - V_C$ (este ha sido un fallo bastante común en este examen).

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{l} \underset{\substack{\vec{E}\, op\, d\vec{l} \\ dl = -dr}}{=} -\int_B^A E\, dr = -\int_B^C E \cdot dr - \int_C^A E \cdot dr =$$

$$= -\int_{R_2}^{R_2-d} \frac{q}{2\pi\varepsilon_1 r^2} dr - \int_{R_2-d}^{R_1} \frac{q}{2\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_1}\left(\frac{-1}{R_2-d} - \frac{-1}{R_2}\right) - \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{-1}{R_1} - \frac{-1}{R_2-d}\right) =$$

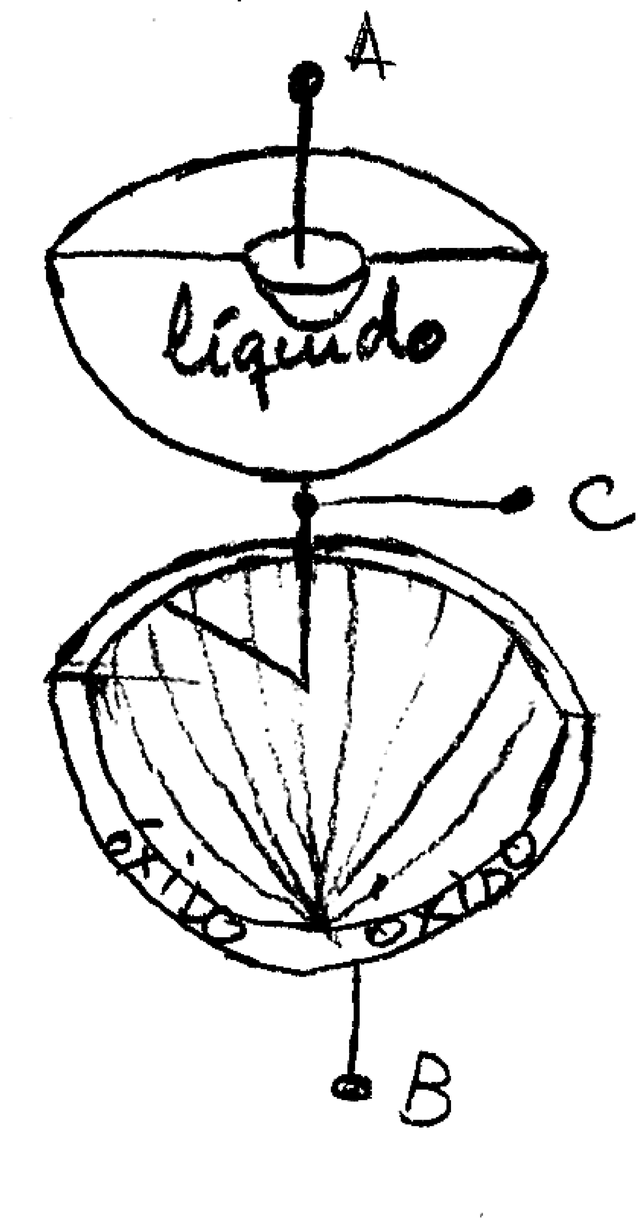
$$= \frac{q}{2\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_2-d} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2-d}\right)\right]$$

$$C_{final\ óxido} = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_2-d} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2-d}\right)}$$

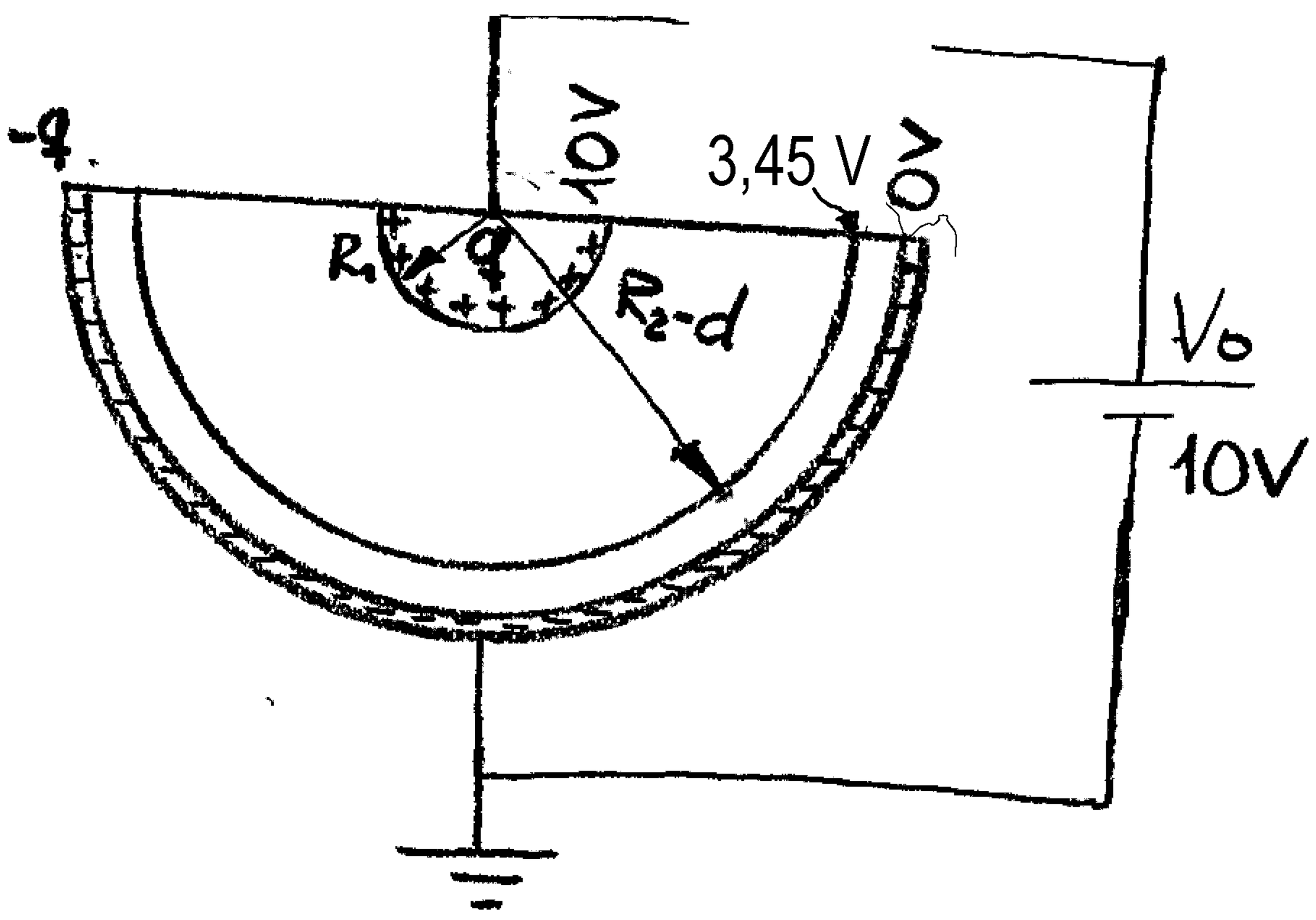
Sustituyendo valores para $x = 100$ obtengo $\underline{C_{final} = 94{,}16\ pF}$

Esto implica que al crearse la capa de óxido la capacidad disminuye casi a la mitad.

Este apartado se puede resolver asociando dos condensadores semiesféricos (de líquido y de óxido) en serie. La capacidad equivalente coincide con la obtenida arriba.



4.b) La energía electrostática asociada al líquido será la que hay entre R_1 y R_2-d. El método conceptualmente más directo es integrar la densidad de energía w_E en el volumen de la semiesfera entre R_1 y R_2-d.



Fallo muy común: en el enunciado se especificaba claramente que la energía a calcular era sólo la del líquido. No se ha puntuado calcular la energía total del condensador

$$w_E = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi^2\varepsilon}\frac{1}{r^4}$$

donde q es la carga del electrodo interior: $q = C_{\underset{x=50}{final}} \cdot V_0$

$$C_{\underset{x=50}{final}} = 68{,}45\ pF \rightsquigarrow q = 6{,}845 \cdot 10^{-10}\ C$$

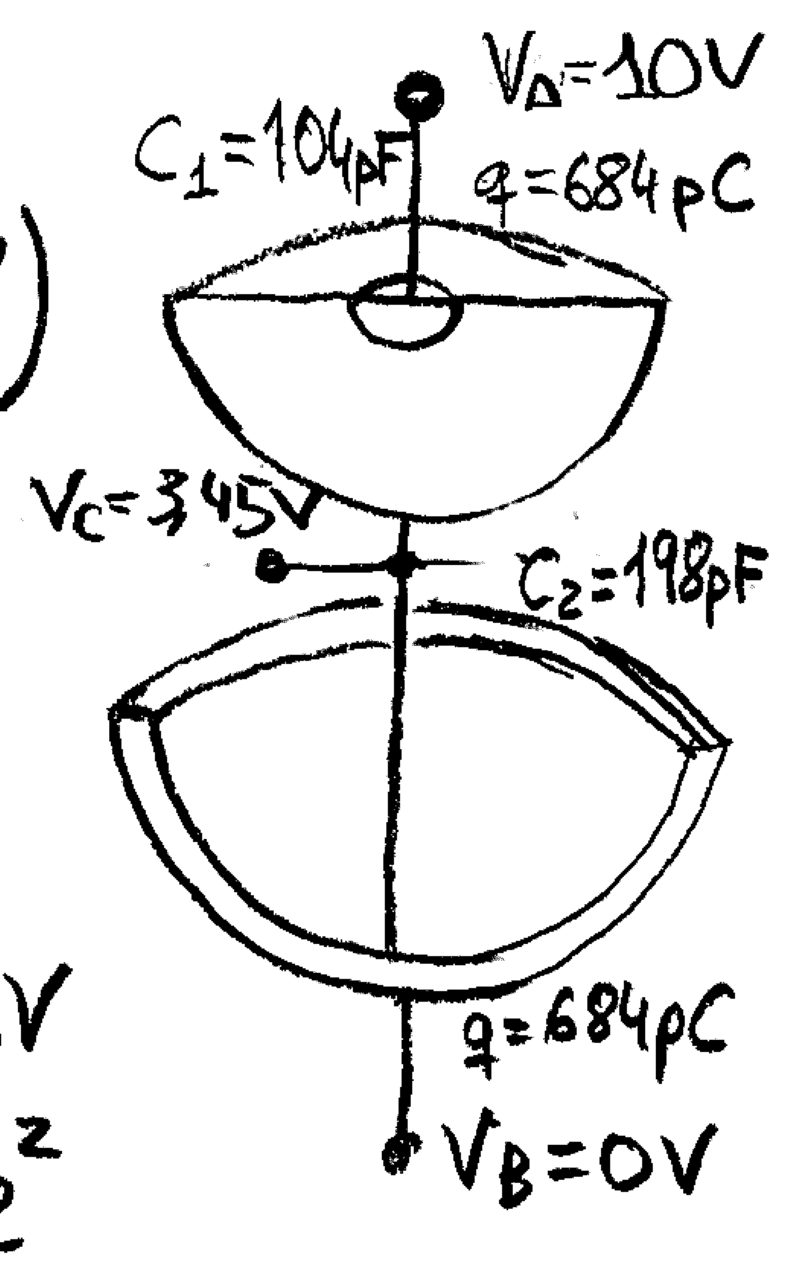
$$W_E = \int_{R_1}^{R_2-d} w_E\, d\tau = \int_{R_1}^{R_2-d} w_E \cdot 2\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2-d} \frac{1}{\cancel{2}}\frac{q^2}{4\pi^{\cancel{2}}\varepsilon}\frac{1}{r^{\cancel{4}}}\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r^2}dr$$

$d\tau = \frac{1}{2}$ capa de cebolla $= \frac{1}{2}$ Superficie · grosor $= \frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2 \cdot dr = 2\pi r^2 dr$

$$W_E = \int_{R_1}^{R_2-d} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2-d}\right]$$

Sustituyendo los datos obtengo $W_E = 2{,}24\ nJ$ (las unidades de energía son Julios, J, no Vatios, W)

Aquellos que han intentado resolver el problema a través de la energía asociada a un condensador, deberían haber considerado que el condensador correspondiente al líquido tiene $\Delta V_\ell = 10-3{,}4 = 6{,}6V$ o bien considerar $W_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_{líquido}} = \frac{1}{2} C_{líquido}\Delta V_\ell^2$



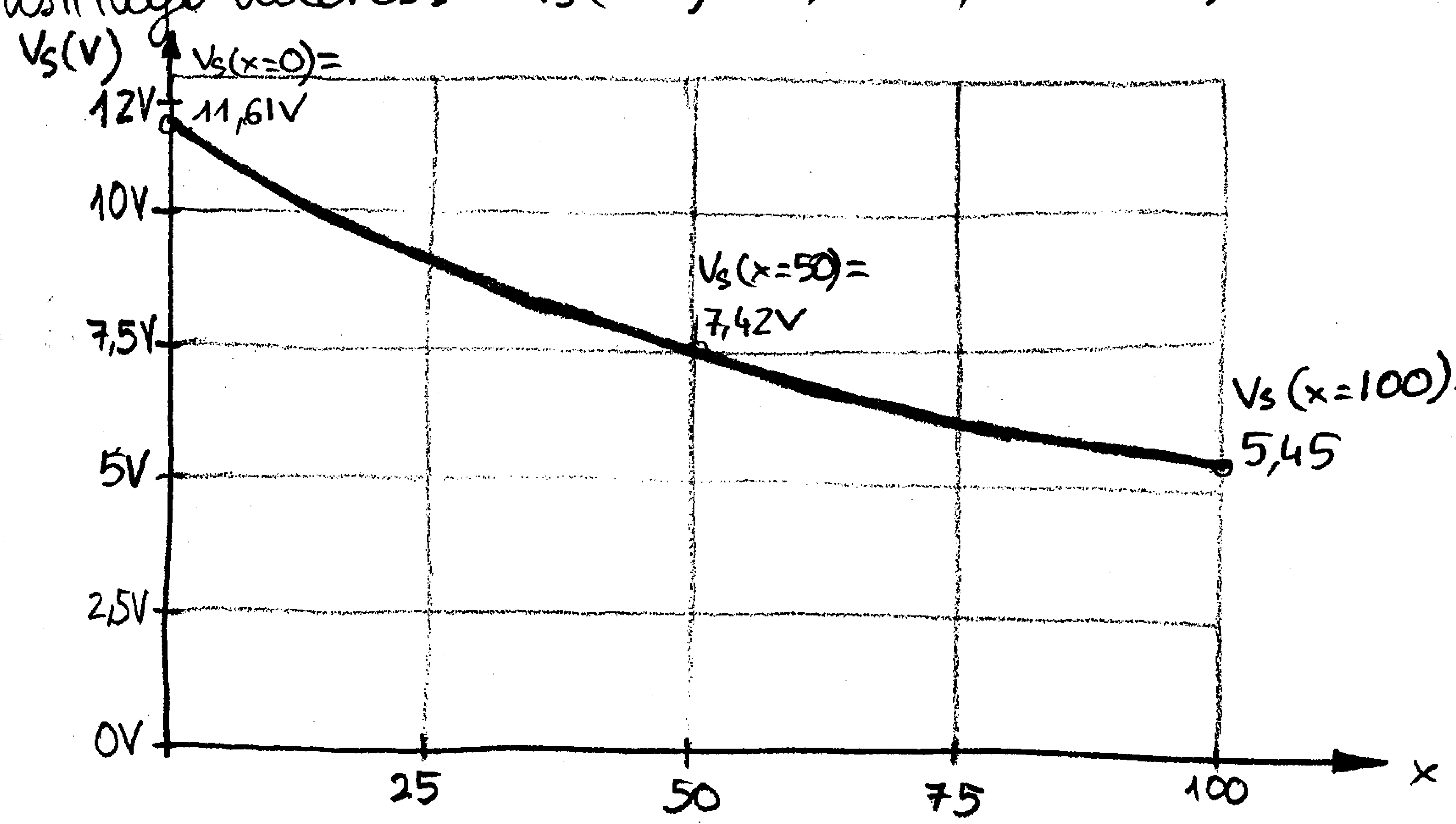
4.c El potencial V_s se puede calcular utilizando la teoría vista en clase o por circuitos. Al estar los dos condensadores <u>en serie</u> <u>las cargas son las mismas</u> (bastantes de vosotros han utilizado las fórmulas para condensadores en paralelo).

Condensadores en serie $\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = Q_{sensor} = Q \\ V_0 = V_1 + V_s = \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_{sensor}}{C_{sensor}} \end{cases}$ (fallo típico no

$$\Rightarrow V_0 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{sensor}}\right) \Rightarrow Q = \frac{V_0}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{sensor}}} = \frac{V_0 C_1 C_{sensor}}{C_{sensor} + C_1}$$

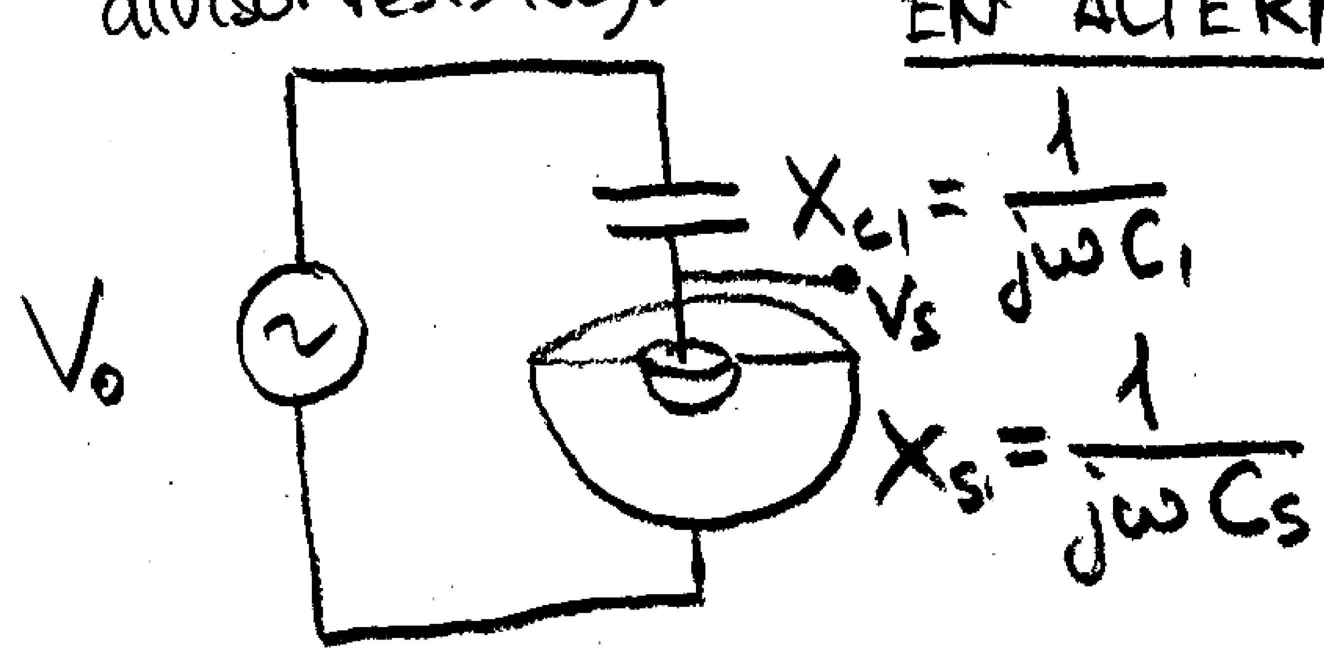
$$\boxed{V_s = \frac{Q_{sensor}}{C_{sensor}} = \frac{\frac{V_0 C_1 \cancel{C_{sensor}}}{C_{sensor}+C_1}}{\cancel{C_{sensor}}} = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_{sensor}} = \frac{15}{1+0{,}0146(20+x)}}$$

Sustituyo valores: $V_s(x=0) = 11{,}61\,V$, $V_s(x=50) = 7{,}42\,V$, $V_s(x=100) = 5{,}45\,V$



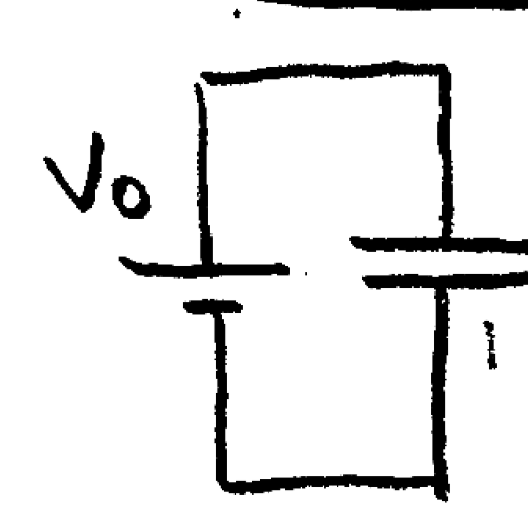
Nota: Si calculamos el problema como un divisor capacitivo obtenemos el mismo resultado (pero no podemos aplicar directamente la fórmula del divisor resistivo).

<u>EN ALTERNA</u>



$$V_s = V_0 \frac{X_s}{X_{c_1} + X_s} = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_s}$$

<u>EN CONTINUA</u>



$$C_{eq} = \frac{C_1 + C_s}{C_1 \cdot C_s}$$

$$q = \frac{V_0}{C_{eq}}$$

$$V_s = \frac{q}{C_s} = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_s}$$