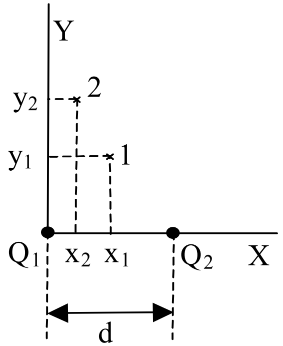
1.- Disponemos de dos cargas puntuales, Q_1 y Q_2, situadas como se representa en la figura.



a) Si tomamos una superficie gausiana esférica, centrada en el punto ($x = d/2$; $y = 0$) y de radio $R = d$, obtener el flujo del campo eléctrico **E** a su través.

b) Calcular $V_2 - V_1$.

Datos numéricos:
$Q_1 = 0{,}3\ \mu C$; $Q_2 = -0{,}1\ \mu C$; $d = 10$ cm;
$x_1 = 5$ cm; $y_1 = 4$ cm; $x_2 = 2$ cm; $y_2 = 7$ cm;
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/(N \cdot m^2)$.

2.- Una carga puntual Q_+ está rodeada de una corona conductora descargada de espesor despreciable y radio R_1. Sobre la mitad de la superficie exterior de la corona conductora hay una semicorona esférica concéntrica de material dieléctrico, de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), y permitividad ε. Rodeando el conjunto se encuentra un conductor esférico hueco, descargado, de espesor despreciable y radio R_2. El resto del espacio se considera vacío (figura 1).

a) Calcular la energía electrostática almacenada en el volumen de material dieléctrico (estado I).

En el estado II, la superficie interior del conductor exterior se conecta a tierra (figura 2).

b) Calcular el incremento de energía electrostática del espacio exterior al conductor ($r > R_2$) al pasar del estado I al estado II, indicando y razonando claramente su signo.

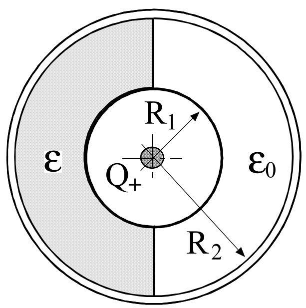


Figura 1 (estado I)

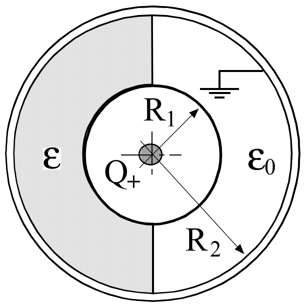
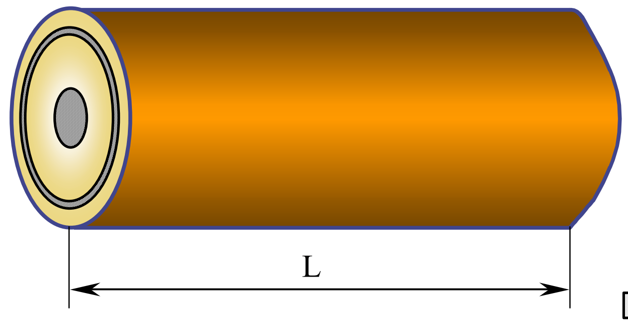


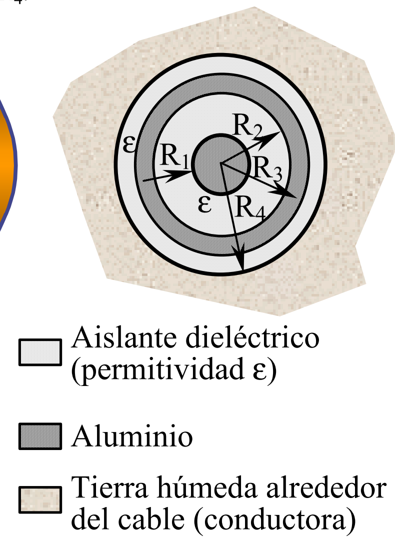
Figura 2 (estado II)

Datos: $R_1 = 2$ cm, $R_2 = 5$ cm, $\varepsilon = 3{,}5\ \varepsilon_0$, $Q_+ = 9{,}5$ nC, $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}\ C^2/N\ m^2$

Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. **Primer parcial.** **15 de junio de 2004**

3.- Se ha enterrado un cable de alta tensión en el terreno. Dicho cable coaxial está compuesto por un conductor central de radio R_1, recubierto de polietileno (permitividad ε) y una malla exterior de radio interior R_2 y radio R_3, que se encuentra desconectada. La malla se encuentra a su vez protegida con una cubierta de polietileno, con lo que el radio exterior del cable es R_4.





✌ a) Calcular la capacidad entre el conductor central, $r < R_1$ y tierra, $r > R_4$, cuando la malla se encuentra desconectada (aislada y sin carga neta).
✌ b) Si se conecta la malla a tierra, calcular la carga que habrá en cada una de las superficies de los conductores, en función del potencial del conductor central, V_1, respecto a tierra.
✌ c) Si la rigidez del polietileno es E_{MAX}, calcular la máxima diferencia de potencial que puede soportar el cable entre el conductor central y la malla, V_1-V_2.

Datos: $R_1 = 1$ cm; $R_2 = 3$ cm; $R_3 = 3{,}5$ cm; $R_4 = 4$ cm; $L = 980{,}5$ m

$$E_{MAX} = 9{,}11 \cdot 10^7\ V/m;\ \varepsilon = 2{,}26\ \varepsilon_0;\ \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Nota 1: Todos los apartados del examen tienen la misma puntuación. Hacer cada ejercicio en hojas distintas.

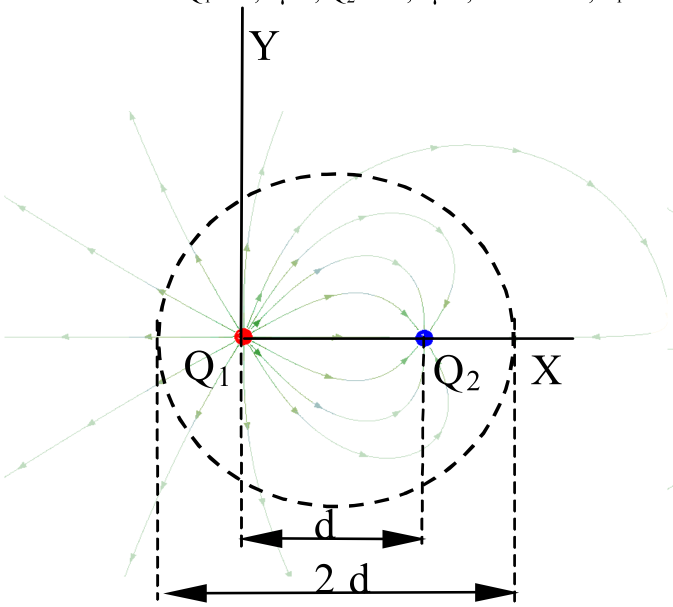
Nota 2: Los alumnos que se presentan a los dos parciales, deben realizar únicamente los apartados marcados con ✌

1.- Disponemos de dos cargas puntuales, Q_1 y Q_2, situadas como se representa en la figura.

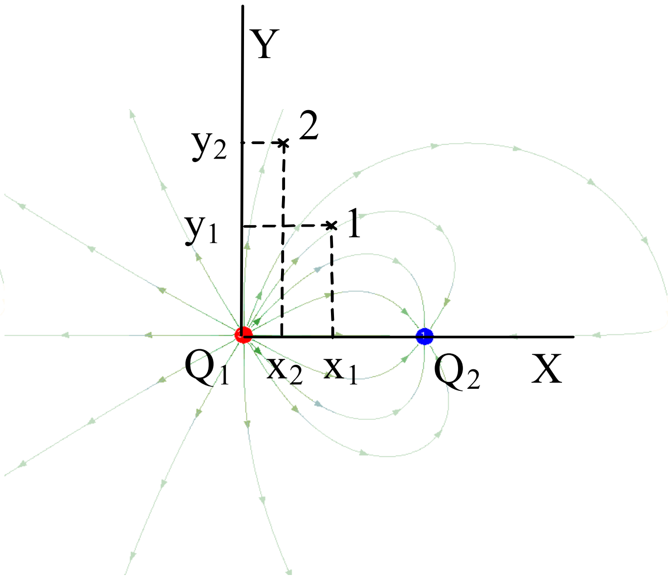
a) Si tomamos una superficie gausiana esférica, centrada en el punto ($x = d/2$; $y = 0$) y de radio $R = d$, obtener el flujo del campo eléctrico **E** a su través.

b) Calcular $V_2 - V_1$.

Datos numéricos: $Q_1 = 0{,}3\ \mu C$; $Q_2 = -0{,}1\ \mu C$; $d = 10$ cm; $x_1 = 5$ cm; $y_1 = 4$ cm; $x_2 = 2$ cm; $y_2 = 7$ cm; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ C^2/(N\cdot m^2)$.



a) Calcular el flujo ϕ_E a través de la esfera



b) Calcular $V_2 - V_1$.

a) En el primer apartado, tal como se puede ver en la figura, las líneas de campo eléctrico no son ni perpendiculares a la superficie de la esfera ni el módulo del campo eléctrico es constante en la esfera (la densidad de líneas de campo no es constante). Por tanto, el cálculo directo de la integral de flujo es complejo (sólo lo podemos realizar de forma sencilla cuando tenemos mucha simetría, y este no es el caso).

$$\Phi_E = \int_S \left|\vec{E}\right|\cdot dS\cdot\cos\alpha \ \cancel{\underset{\substack{\cos\alpha\neq cte\\ |\vec{E}|\neq cte}}{=}} \ \left|\vec{E}\right|\cdot Sup_{esfera}$$

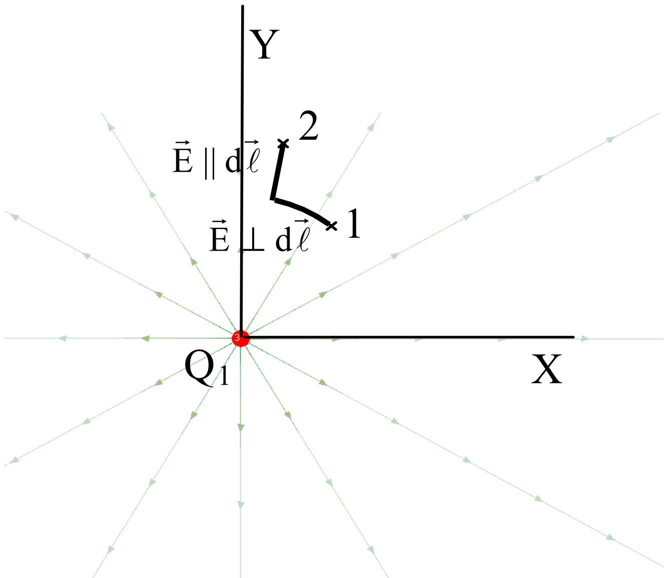
Se ha considerado un error de concepto hacer la simplificación anterior. Para poder resolver el problema es necesario aplicar la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \int_{Esfera} \left|\vec{E}\right|\cdot dS\cdot\cos\alpha = \int_{Esfera} \frac{\varepsilon_0|\vec{E}|}{\varepsilon_0}\cdot dS\cdot\cos\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{Esfera} \varepsilon_0|\vec{E}|\cdot dS\cdot\cos\alpha =$$

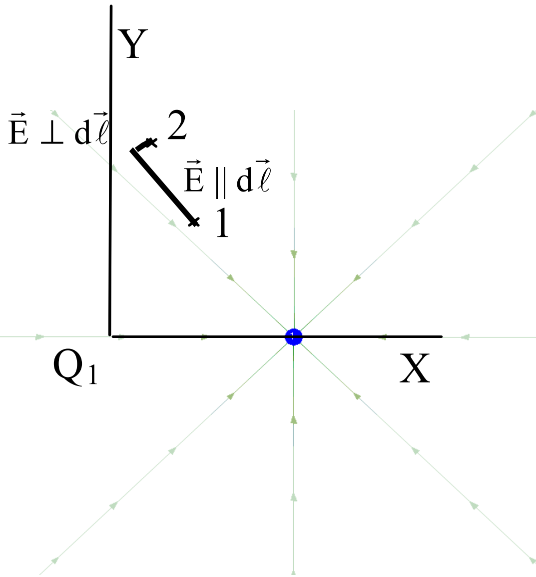
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{Esfera} \left|\vec{D}\right|\cdot dS\cdot\cos\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0}\Phi_D \underset{\text{Ley de Gauss}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{encerrada en la esfera}} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{0{,}3\ \mu C - 0{,}1\ \mu C}{\varepsilon_0} = 22588\frac{N\ m^2}{C}$$

b) El segundo apartado consiste en calcular la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2. El cálculo directo es muy complicado, pues las líneas de campo son complejas y no podemos elegir una trayectoria en donde $\vec{E}$ y $d\vec{\ell}$ sea o bien paralelo o bien perpendicular.

Por tanto, para resolver el problema es necesario aplicar el principio de superposición: podemos calcular muy fácilmente la d.d.p. debida únicamente a la carga Q1 o bien, Q2. Para ir del punto 1 al 2, tomaremos una trayectoria con un tramo radial y otro circular. Sumamos los resultados obtenidos por separado y esa es la d.d.p. $V_2 - V_1$ debida al conjunto.



a) Campo $\vec{E}$ creado por la carga Q_1



b) Campo $\vec{E}$ creado por la carga Q_2.

No obstante, la forma más sencilla y directa para resolver este problema es aplicar directamente el concepto de potencial de un punto creado por una carga puntual respecto del infinito.

Potencial en el punto 1 debido a la carga Q1

$$V_{11} = V_1 - V_\infty \Big|_{\substack{\text{Creado por} \\ \text{la carga Q1}}} = -\int_\infty^1 \vec{E}_{\text{carga Q1}} \cdot d\vec{\ell} = k \frac{Q_1}{\text{distancia del punto 1 a la carga } Q_1} = k \frac{Q_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

Potencial en el punto 1 debido a la carga Q2

$$V_{12} = V_1 - V_\infty \Big|_{\substack{\text{Creado por} \\ \text{la carga Q2}}} = -\int_\infty^1 \vec{E}_{\text{carga Q2}} \cdot d\vec{\ell} = k \frac{Q_2}{\text{distancia del punto 1 a la carga } Q_2} = k \frac{Q_2}{\sqrt{(x\text{-}d)_1^2 + y_1^2}}$$

Potencial total en el punto 1

$$V_1 = V_{11} + V_{12} = k \frac{Q_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + k \frac{Q_2}{\sqrt{(x_1\text{-}d)^2 + y_1^2}} = 28085{,}7 \text{ V}$$

Análogamente, podemos calcular el potencial total en el punto 2

$$V_2 = V_{21} + V_{22} = k \frac{Q_1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + k \frac{Q_2}{\sqrt{(x_2\text{-}d)^2 + y_2^2}} = 28594{,}8 \text{ V}$$

Por tanto, podemos calcular V_2 - V_1 por diferencia de potenciales puntuales

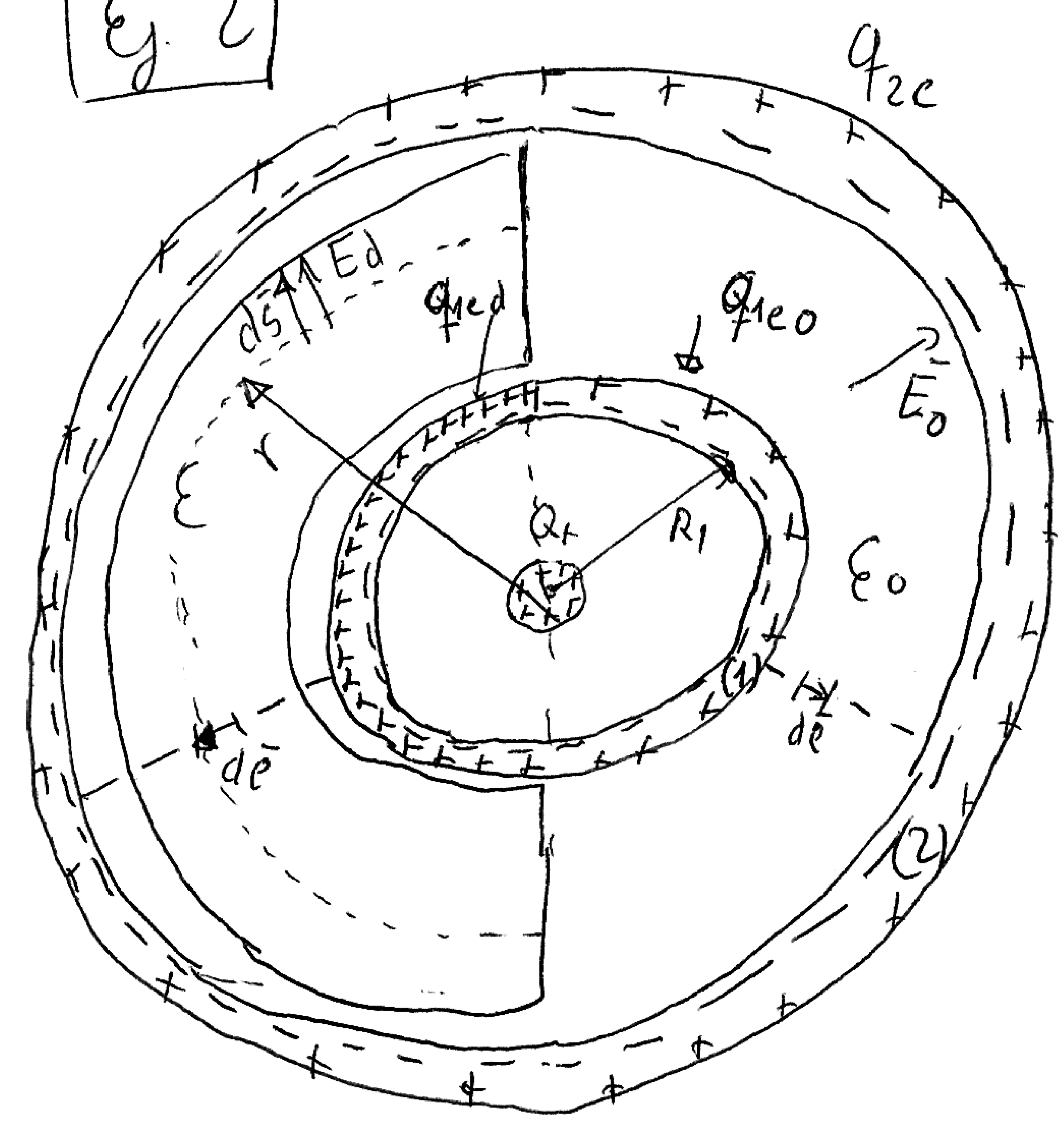
$$\mathbf{V_2 - V_1 = 28594{,}8\ V - 28085{,}7\ V = 509.1\ V}$$

Electriadad y Electrometría.

Convocatoria de Junio 15 - Jan - 04

Primer parcial

Ej. 2



Primero hay que ver como se distribuye la carga en las superficies metálicas.

En la superficie metálica (1) de radio R_1 tenemos que en su interior aparece carga negativa uniformemente distribuida de forma que $q_{1i} = -Q_+$

En la parte exterior de (1) la carga no se distribuye por igual apareciendo más carga en la zona del dieléctrico que en la zona de aire, así que tendremos q_{1ed} y q_{1eo}. Como el conductor (1) está descargado tendrá que cumplirse $q_{1ed} + q_{1eo} = q_+$. Esta desigualdad de cargas es necesaria para que la d.d.p entre el conductor (1) y el (2) sea la misma si se va por el dielectr o por el aire.

En la parte exterior del conductor dos tendremos la carga uniformemente distribuida y su valor total será: $q_{2e} = q_+$

Con estas ideas podemos empezar a resolver el pb

a) Para calc la energ electrostática en el dielectr tengo que calcular los campos; para ello aplicaré gauss. tomando como superficies semiesferas como los punteados en el dibujo.

Tomando la semiesfera corresp al dieléctrico tengo

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\oint_{\text{Semiesf}} \bar{D}\, d\bar{s} \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{D}\perp d\bar{s} \text{ en tapa plana} \\ \bar{D}\parallel d\bar{s} \text{ en sup esférica}}}{=} \iint_{\text{Semiesf}} D\, ds \underset{\substack{\uparrow \\ D=cte}}{=} D_D\, 2\pi r^2 \\ \\ Q_{enc} = q_{1ed} \end{array}\right\} \begin{array}{l} D_D = \dfrac{q_{1ed}}{2\pi r^2} \\ \Rightarrow \bar{E}_D = \dfrac{q_{1ed}}{2\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\hat{u}_r \quad (R_1<r<R_2) \end{array}$$

Análogamente, tomando la semiesf corresp en el lado del aire

Tengo $D_0 = \dfrac{q_{1e0}}{2\pi}\dfrac{1}{r^2} \Rightarrow \bar{E}_0 = \dfrac{q_{1e0}}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{u}_r \quad (R_1<r<R_2)$

La diferencia de potencial entre ambos conductores tiene que ser la misma si vamos por el lado del aire o por el del dieléctrico, ya que ambas superficies son equipotenciales. Así:

$$V_1 - V_2 = -\underset{\text{(por el dieléctrico)}}{\int_{R_1}^{R_2}} \bar{E}_d\, d\bar{l} = \dots = \frac{q_{1ed}}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_1 - V_2 = -\underset{\text{(por el aire)}}{\int_{R_1}^{R_2}} \bar{E}_0\, d\bar{l} = \frac{q_{1e0}}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

imponiendo que ambas d.d.p sean iguales obtengo

$$\left.\begin{array}{l} q_{1ed} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, q_{1e0} \\ \text{además: } q_{1ed} + q_{1e0} = q_+ \end{array}\right\} \Rightarrow q_{1ed} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}\, q_+$$

Luego: $\bar{D}_D = \dfrac{\varepsilon Q_+}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)}\cdot\dfrac{1}{r^2}\hat{u}_r$; $\bar{E}_D = \dfrac{Q_+}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)}\dfrac{1}{r^2}$

y por tanto: la densidad volúmica de energía vale:

$$W = \frac{1}{2}\bar{D}_D\bar{E}_D = \frac{1}{2}\frac{Q_+^2}{4\pi^2}\cdot\frac{\varepsilon}{(\varepsilon+\varepsilon_0)^2}\cdot\frac{1}{r^4}$$

Ej 2 1º P. cont

La energía total:

$$W = \iiint_{\mathcal{E}} dW \underset{\substack{\uparrow \\ d\mathcal{E} = 2\pi r^2 dr}}{=} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{8} \frac{Q_+^2}{\pi^2} \cdot \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot 2\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{Q_+^2}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+\varepsilon_0)^2} \left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \boxed{\frac{Q_+^2}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+\varepsilon_0)^2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 4{,}2\,\mu J = W}$$

b) El campo $\bar{E}$ en el exterior del sistema en el estado I vale:

$$\bar{E}_{ext} = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r$$

por tanto, la d.d.p. entre infinito y el exterior del conductor 2 vale;

$$V(R_2) = -\int_{\infty}^{R_2} \bar{E}_{ext}\, d\bar{l} = \dots = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

Así que la energía asociada al espacio exterior al conductor 2 es: $W_{I_{ext}} = \frac{1}{2} C V^2(R_2) = \frac{1}{2} Q_+ V(R_2) =$

$$= \frac{1}{2} \frac{q_+^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} = 8{,}1\,\mu J.$$

En el estado II: $\bar{E}_{ext} = 0$, por ser el potencial del conductor exterior igual al del infinito

$\Rightarrow W_{II\,ext} = 0$

Por tanto $\Delta W = W_{II_{ext}} - W_{I_{ext}} = \boxed{-\frac{1}{2} \frac{q_+^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} = -8{,}1\,\mu J = \Delta W}$

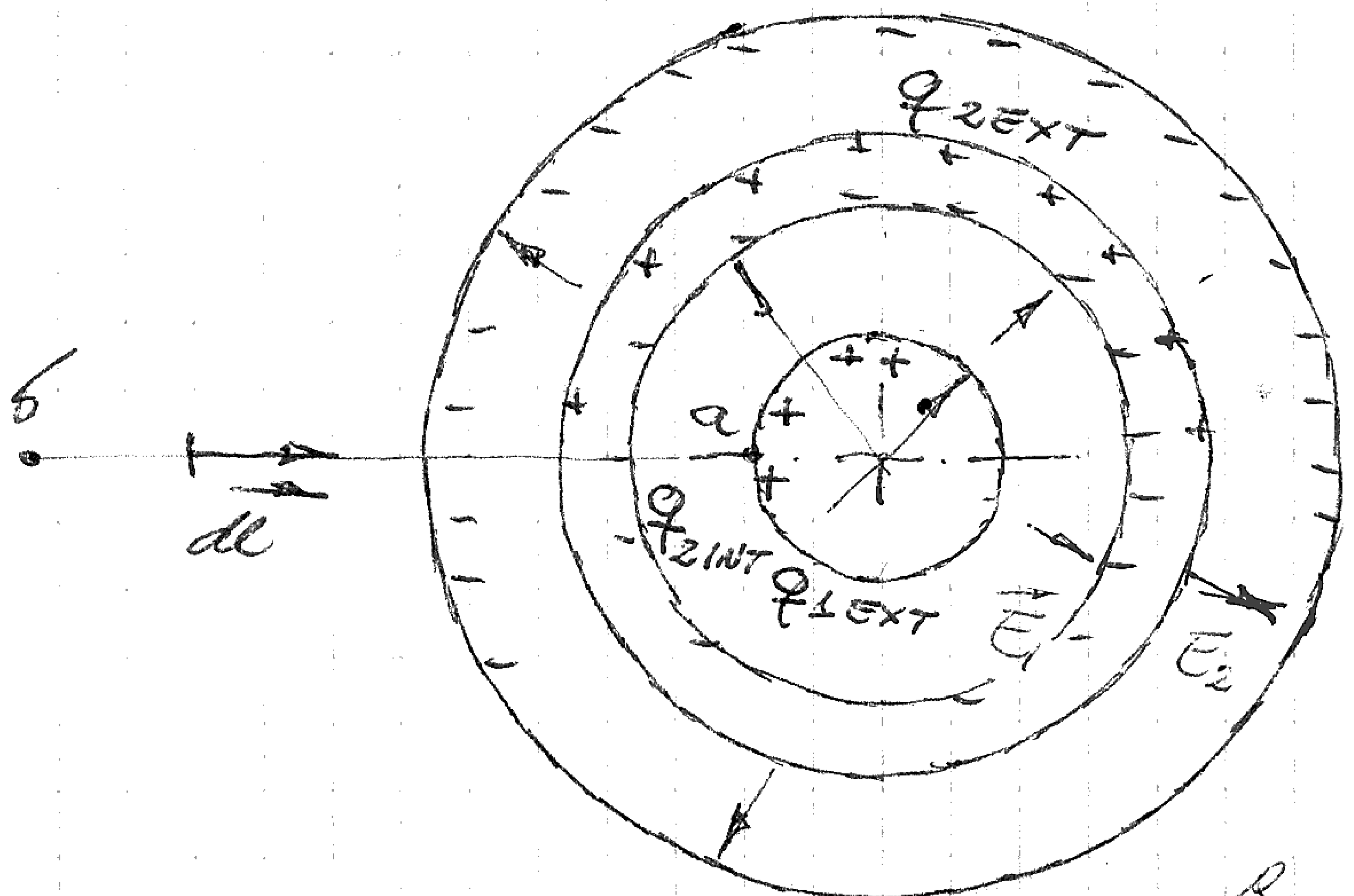
CURSO

2003-2004 1º ELECTRÓNICOS 040615

PARCIAL I

(3)

a)



$$V_a - V_b = \frac{W_{b\to a}}{q} = -\int_{c\,b}^{a} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_{c\,R_4}^{R_3} \vec{E}_2\cdot\vec{dl} - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_1\cdot\vec{dl} =$$

$$= -\int_{R_4}^{R_3} |\vec{E}_2|\cdot\underbrace{|\vec{dl}|}_{-dr}\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \int_{R_2}^{R_1} |\vec{E}_1|\cdot\underbrace{|\vec{dl}|}_{-dr}\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1} =$$

$$= -\int_{R_4}^{R_3} |\vec{E}_2|\cdot dr - \int_{R_2}^{R_1} |\vec{E}_1|\cdot dr = *$$

* LEY DE GAUSS.

$$\oint_{S_1} \vec{D}_1\,\vec{ds}_1 = q_{enc.} = q_+ \Rightarrow 2\pi r\cdot L D_1 = q_+$$

$$D_1 = \frac{q_+}{2\pi L}\frac{1}{r} \qquad |\vec{E}_1| = \frac{q_+}{2\pi\cdot L\varepsilon}\frac{1}{r}$$

$$\oint_{S_2} \vec{D}_2\cdot\vec{ds}_2 = q_{enc} = q_+ \Rightarrow 2\pi r\cdot L\cdot D_2 = q_+$$

$$D_2 = \frac{q_+}{2\pi L}\frac{1}{r} \; ; \quad E_2 = \frac{q_+}{2\pi\varepsilon L}\cdot\frac{1}{r}$$

$$V_a - V_b = * = -\int_{R_4}^{R_3} \frac{q_+}{2\pi L \varepsilon} \frac{1}{r} dr - \int_{R_2}^{R_1} \frac{q_+}{2\pi L \cdot \varepsilon} \frac{1}{r} \cdot dr =$$

$$= \frac{q_+}{2\pi L \varepsilon} \ln \frac{R_4}{R_3} + \frac{q_+}{2\pi L \varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} =$$

$$= \frac{q_+}{2\pi \varepsilon L} \left\{ \ln \frac{R_4}{R_3} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right\}$$

$$C_T = \frac{q_+}{V_a - V_b} = 2\pi \varepsilon L \frac{1}{\ln \frac{R_4}{R_3} + \ln \frac{R_2}{R_1}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 2{,}26 \cdot \varepsilon_0 \cdot 980{,}5 \cdot \frac{1}{\ln \frac{4}{3{,}5} + \ln \frac{3}{1}} =$$

$$= 123{,}22 \cdot \frac{10^{-9}}{1{,}232} = 100{,}01 \cdot 10^{-9}\ F =$$

$$= 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ F = 0{,}1\ \mu F$$

b)

$$\left.\begin{array}{ll} r = R_1 & q_{1+} = q_{1EXT} \\ r = R_2 & q_{2-} = -q_{1+} = q_{2INT} \\ r = R_3 & q_{2EXT} = 0\ C \end{array}\right\}$$

$$V_a - V_c = V_a = \frac{W_{\frac{1}{2} \to a}}{q} = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} =$$

$$= \frac{q_{1+}}{2\pi \varepsilon L} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow q_{1+} = 2\pi \varepsilon L \frac{V_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$q_{1+} = 2\pi \cdot 2{,}26 \cdot \varepsilon_0 \cdot 980{,}5 \frac{1}{\ln \frac{3}{1}} \cdot V_a =$$

$$= 112{,}16 \cdot 10^{-9} \cdot V_a \; [C]$$

c/ $$E_{MAX} = E_1(r = R_1) = \frac{q_{MAX}}{2\pi\varepsilon L} \frac{1}{R_1} \Rightarrow$$

$$q_{MAX} = 2\pi\varepsilon L R_1 \cdot E_{MAX} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 2{,}26 \cdot \varepsilon_0 \cdot 980{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{7} =$$

$$= 112{,}25 \cdot 10^{-3} \; C$$

$$(V_1 - V_2) = \frac{q_{MAX}}{2\pi\varepsilon L} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q_{MAX}}{C} =$$

$$= \frac{112{,}25 \cdot 10^{-3}}{112{,}16 \cdot 10^{-9}} = 10^{6} \; V$$