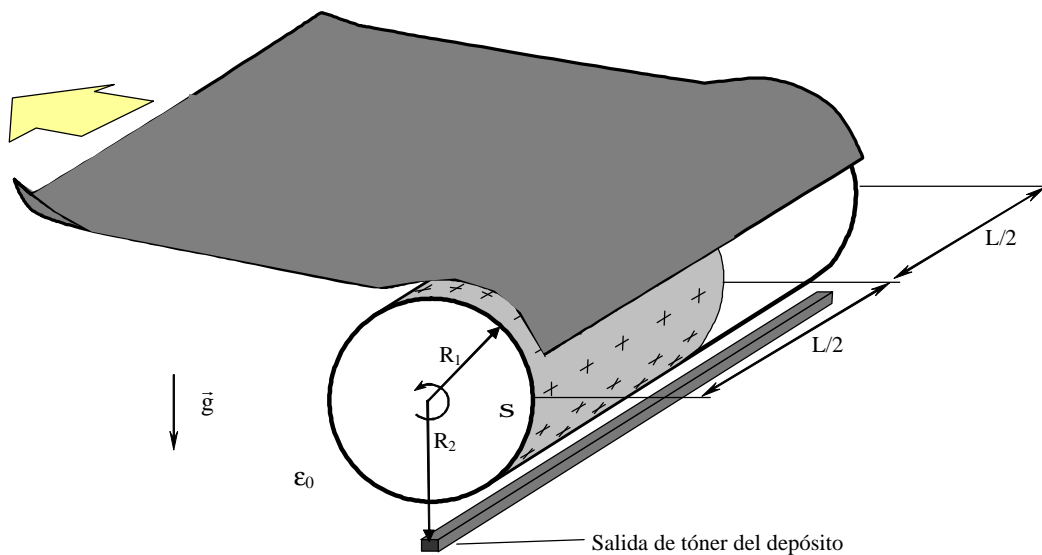


1.- El tambor fotosensible de una fotocopiadora o de una impresora láser es un cilindro con una densidad superficial de carga  $\sigma$  en aquellas partes donde la imagen es oscura y descargado en las zonas blancas. De esta forma, las franjas cargadas atraen a pequeñas partículas de tinta (tónor) que luego se transfieren por contacto al papel y se fijan calentándolo.

Vamos a hacer una fotocopia de una página, la mitad negra y la otra mitad blanca, tal como aparece en el dibujo.

- Calcular la densidad de carga  $s_{min}$  de la zona negra tal que cree una fuerza eléctrica sobre una partícula de tónor a la salida del depósito igual a su peso (cada partícula de tónor tiene una masa  $m$  y una carga  $q$  y está situada a una distancia  $R_2$  del eje del tambor). Suponer que el campo eléctrico es radial (simetría cilíndrica).
- Calcular la densidad de carga  $s_{max}$  del tambor para que no se produzca ionización del aire en ningún punto.
- Calcular el incremento de energía electrostática de la partícula de tónor desde que sale del depósito (estado inicial) hasta que llega a la superficie del tambor (estado final), en función de la densidad de carga  $\sigma$ . ¿Cuánto vale esa diferencia de energía para  $\sigma = s_{min}$ ?



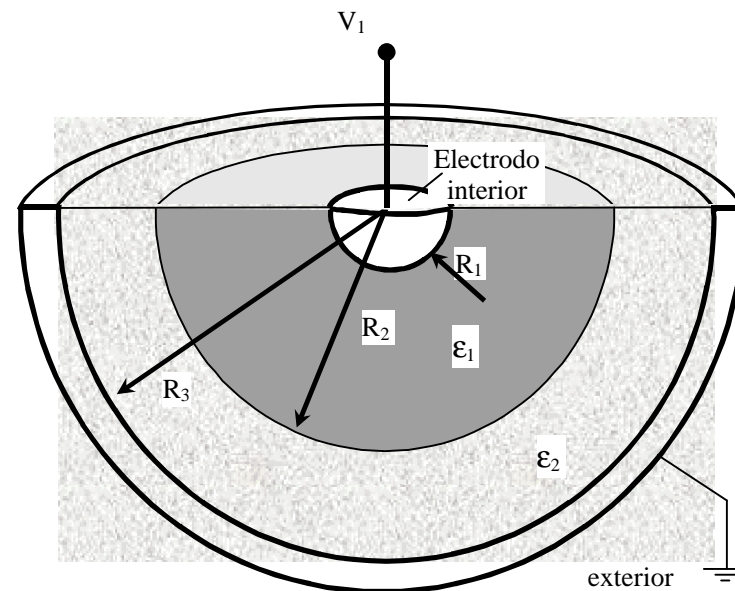
**Datos:**  $R_1 = 47,27 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 50 \text{ mm}$ ,  $L = 210 \text{ mm}$ ,  $q = -10 \text{ pC}$ ,  $m = 1 \text{ mg}$ ,  
Campo de ruptura del aire =  $E_M = 3 \text{ MV/m}$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

**Nota:** Todos los apartados del examen valen lo mismo.

Cada ejercicio debe entregarse por separado.

2.- Disponemos de la vasija semiesférica representada en la figura. Entre los electrodos metálicos, de radios  $R_1$  y  $R_3$ , existen dos dieléctricos dispuestos como se indica.

a) Establecemos una diferencia de potencial entre el electrodo interior y el exterior,  $V_1 > 0$  desconocida, de forma que el módulo del campo eléctrico a una distancia  $r_0 = 25 \text{ mm}$ , valga  $E(r = r_0) = 17,46 \text{ kV/m}$ . Calcular  $V_1$ .



b) Conectamos el condensador anterior a una diferencia de potencial  $V_1 = 800 \text{ V}$ , desconectándolo después, sin tocar sus terminales para evitar que se descargue. Por otra parte tomamos otro condensador de capacidad  $C_2 = 100 \text{ pF}$ , lo cargamos con carga  $Q_2 = 144,27 \text{ nC}$  y lo aislamos. Por último conectamos en paralelo ambos condensadores. Calcular la tensión final que alcanza cada uno de ellos.

**Datos:**  $R_1 = 10 \text{ mm}$ ;  $R_2 = 20 \text{ mm}$ ;  $R_3 = 30 \text{ mm}$ ;  $\epsilon_1 = 100 \epsilon_0$ ;  $\epsilon_2 = 40 \epsilon_0$ ;  
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

3.- Un folio de acetato utilizado para transparencias se carga fácilmente por rozamiento con un paño. El folio tiene una superficie de  $623,7 \text{ cm}^2$  (tamaño A4) y espesor despreciable (el acetato es un material aislante). El medio que rodea al folio es aire, cuya permitividad se considera igual a la del vacío ( $\epsilon_0$ ). Si se observa que la densidad superficial de carga del folio es  $\sigma_{s+} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$ , calcular :

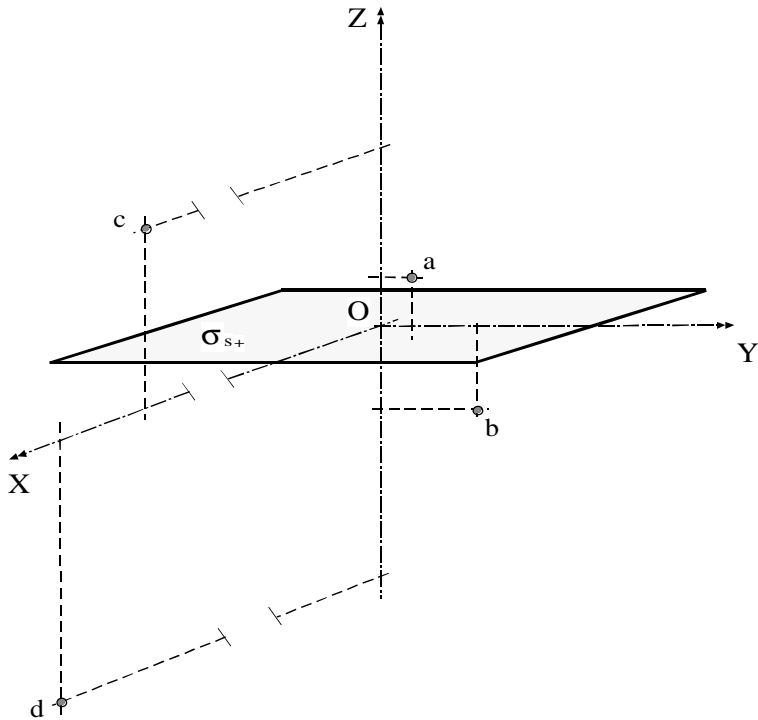
a) la diferencia de potencial entre los puntos a y b de la figura,  $V_a - V_b$ , que se encuentran muy próximos al centro geométrico del folio (punto O) y,

b) la diferencia de potencial entre los puntos d y c de la figura,  $V_d - V_c$ , que se encuentran muy alejados del centro geométrico del folio (punto O).

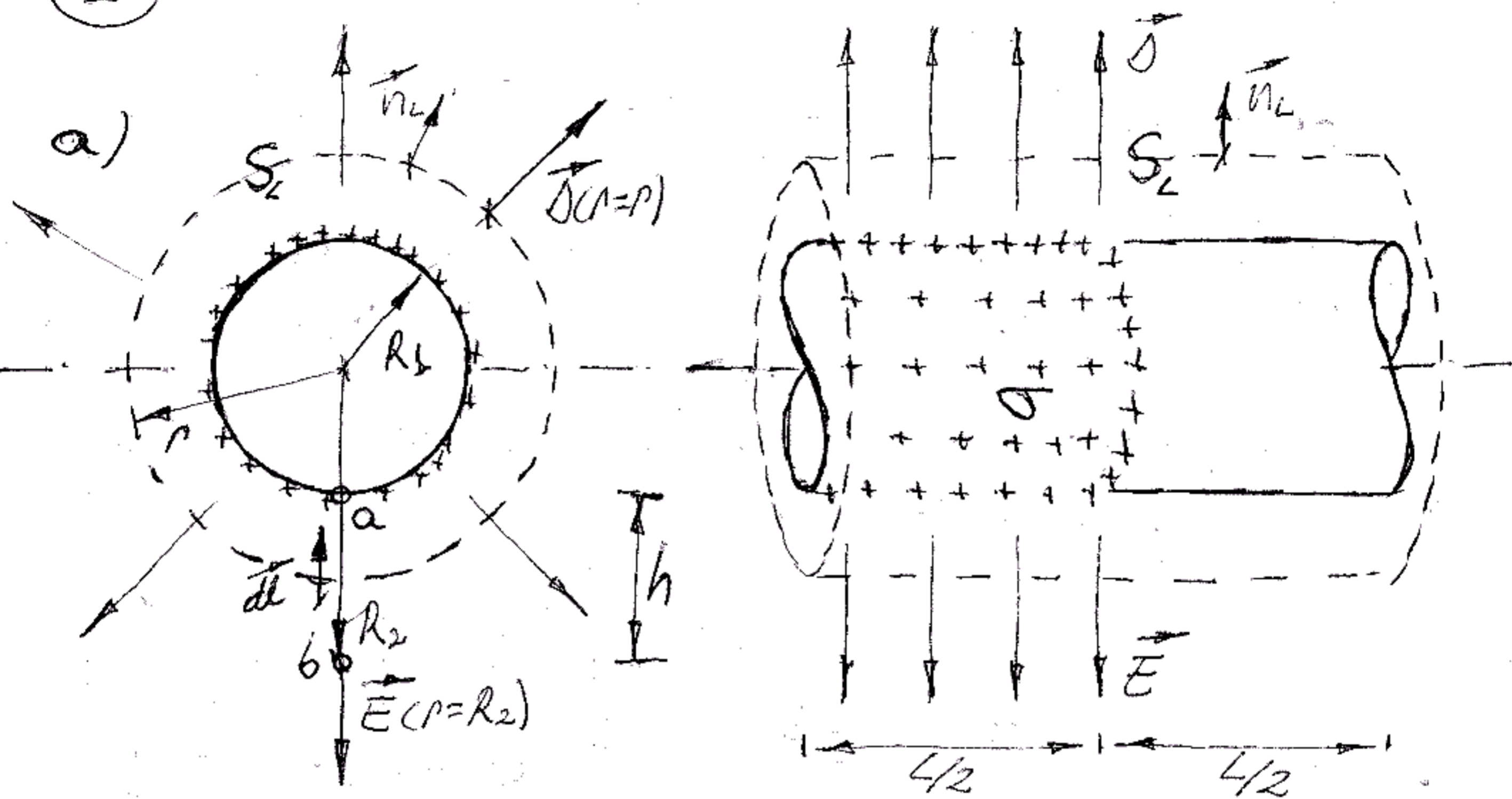
Posición espacial de los puntos (x ; y ; z) en metros:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} ( 0 ; 0,005 ; 0,01 ) \text{ [m]} \\ \mathbf{b} ( 0 ; 0,02 ; - 0,015 ) \text{ [m]} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c} ( 1,5 ; 0 ; 0,5 ) \text{ [m]} \\ \mathbf{d} ( 1,8 ; 0 ; - 0,6 ) \text{ [m]} \end{array} \right.$$

El folio es una superficie plana situada en el plano OXY (perpendicular al eje ZZ')



1



la partícula de tóner tiene carga negativa, y se puede considerar puntual. Pero el tambor fotoreensible tiene su carga positiva distribuida en la superficie y está muy cerca de la partícula de tóner. Por lo tanto no puede considerarse una carga puntual, y no podrá usarse la expresión

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q_+ \cdot q_-}{d^2} \cdot \vec{u}, \text{ con } q_+ = 2\pi R_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma$$

Para calcular la fuerza de atracción electrostática que aparece sobre la partícula de tóner y que será capaz de neutralizar (y superar) la atracción gravitatoria, hay que calcular el vector  $\vec{E}$  creado por el tambor en el lugar donde se encuentra la partícula de tóner.  $\vec{E}$  es la fuerza sobre  $+1 \text{ C}$ ; multiplicando  $\vec{E}$  por la carga de la partícula de tóner, se obtiene la fuerza  $\vec{F}_q$ .

\* Cálculo de  $\vec{E} \rightarrow$  ley de Gauss en la superficie S.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot ds = \varphi_{\text{ENCERRADA}}$$

$$\varphi_{\text{ENCERRADA}} = 2\pi R_1 \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{S_L} J(n=r) \cdot ds_L = J(n=r) \cdot \int_{S_L} ds_L = 2\pi r \cdot \frac{L}{2}$$

! Solo hay flujo del vector  $\vec{J}$  a través de la mitad de la superficie lateral!

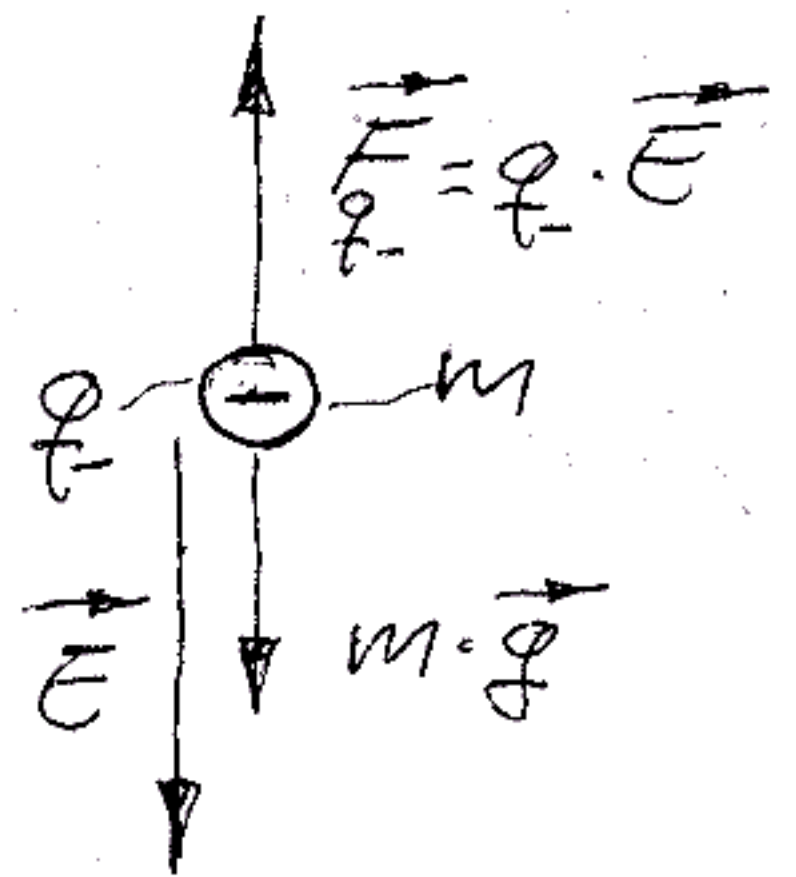
$$2\pi r \cdot \frac{L}{2} \cdot J(n=r) = 2\pi R_1 \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma$$

$$J(n=r) = \frac{R_1 \cdot \sigma}{r}, \quad \vec{J} = \epsilon \cdot \vec{E}, \quad E(n=r) = \frac{R_1 \cdot \sigma}{\epsilon_0 \cdot r}$$

La partícula de tener se encuentra en  $r = R_2$ , luego

$$E(r=R_2) = \frac{R_1 \cdot \sigma}{\epsilon_0 \cdot R_2} \quad \left[ \frac{N}{C} \right]$$

$\vec{E}$  tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{J}$ ; la fuerza es de sentido contrario, al estar aplicada sobre una carga negativa.



$$|\vec{F}_{q_-}| = m \cdot |\vec{g}|, \quad |q_-| \cdot E(r=R_2) = m \cdot |\vec{g}|$$

$$|q_-| \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} = m \cdot g; \quad \sigma_{\text{mín}} = \frac{m \cdot g \cdot \epsilon_0 R_2}{|q_-| \cdot R_1} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{10^{-6} \cdot 9,8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-12} \cdot 47,27 \cdot 10^{-3}} = 9,174 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

b) Para que se produzca ionización del aire, la intensidad del campo eléctrico debe superar el valor del campo de ruptura,  $E_M$ .

El campo eléctrico es debido a las cargas que, distribuidas en la superficie, se encuentran en el tambor. El valor de ese campo se ha calculado en el apartado anterior.

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}; \text{ función inversamente propor-}$$

cional a la distancia que separa el eje del tambor del punto del espacio. Cuanto mayor sea el valor de  $r$ , menor será el módulo de  $\vec{E}$ . Por lo tanto, el máximo valor de  $|\vec{E}|$  (fijado un valor para  $\sigma$ ) aparece en  $r = R_1$

$$|\vec{E}_{MAX}| = \frac{\sigma \cdot R_1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[ \frac{N}{C} \right]$$

Iguando este valor al campo de ruptura,  $E_M$ , obtenemos un valor de  $\sigma$  que provocaría la ionización de los puntos de la superficie del tambor. Cualquier valor mayor, ionizaría moléculas de aire más alejadas del tambor; valores menores no ionizarían el aire. Por lo tanto, ese es el valor que se pide calcular

$$|\vec{E}_{MAX}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_M \Rightarrow \sigma_{MAX} = \epsilon_0 \cdot E_M = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6 = \\ = 26,55 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

c) El sistema formado por la partícula de tóner y el rodillo no es un sist. de cargas puntuales ni un condensador, por lo que no podrán usarse expresiones como

$$W_E = \frac{1}{2} q \cdot (V_a - V_b) \quad \text{ó} \quad W_E = \frac{1}{2} \int_{Vol} \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot dV$$

La partícula de tóner en su posición inicial ( $r=R_2$ ) es equivalente energéticamente a un muelle comprimido, ya que al soltarse sale "disparada" hacia el tambor. Pierde en la trayectoria energía electrostática, pero gana energía potencial ( $m \cdot g \cdot h$ ) y energía cinética ( $\frac{1}{2} m v^2$ ). El incremento de energía electrostática es negativo y será igual al trabajo que un agente exterior al sistema deba realizar para trasladar la partícula de tóner desde  $R_2$  hasta  $R_1$ .

$$\Delta W_E = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\text{el signo - aparece ya que es el trabajo realizado por el ag. exterior})$$

$$- \int_{R_2}^{R_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{R_2}^{R_1} q_- \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = - q_- \cdot \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$= q_- \cdot \left\{ - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right\} = q_- \cdot \frac{W_{b \rightarrow a}}{q} = q_- \cdot (V_a - V_b)$$

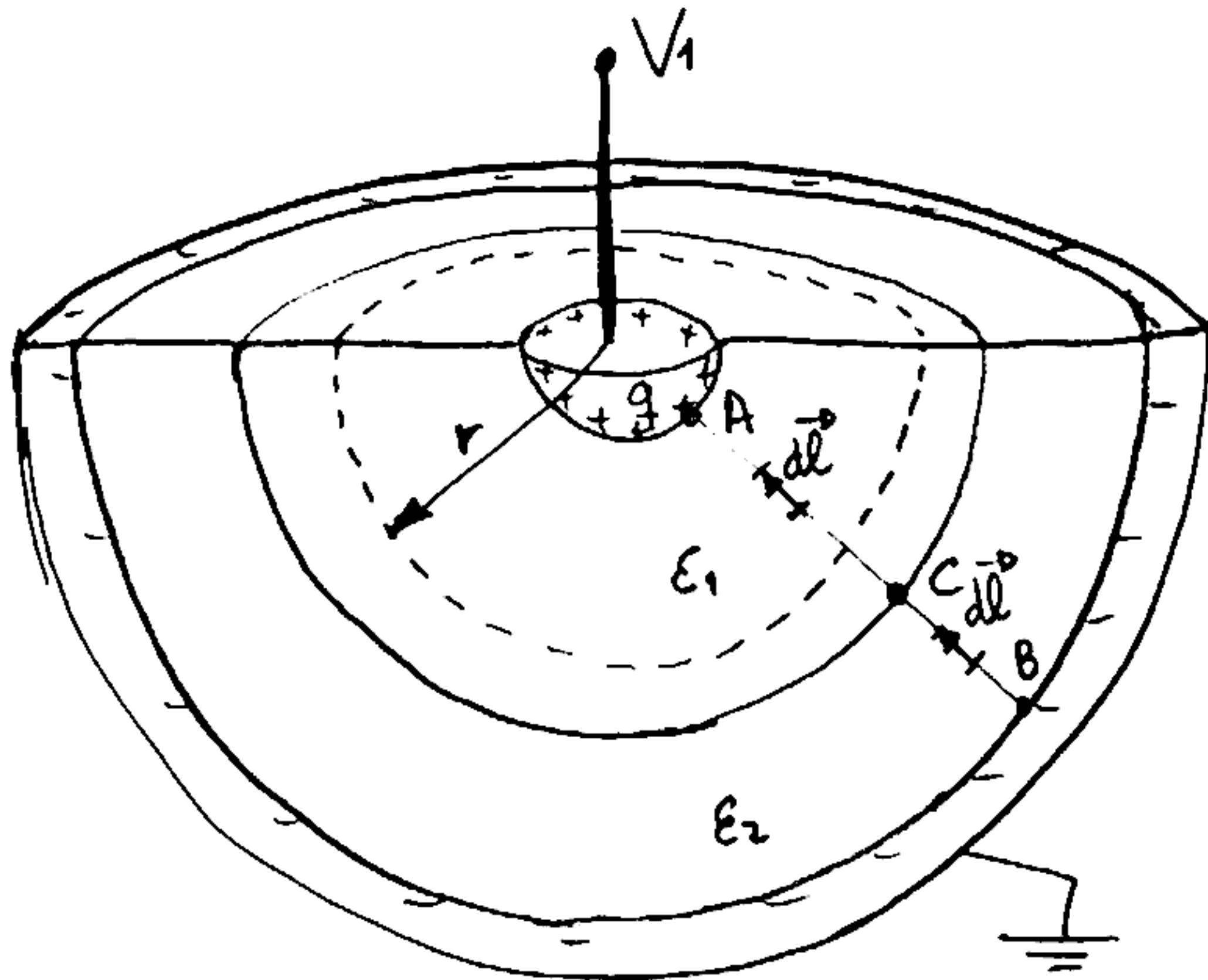
$$(V_a - V_b) = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{|\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos \pi}{-dn} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma \cdot R_1}{\epsilon_0 \cdot r} dr =$$

$$= - \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta W_E = q_- \cdot \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = -27,51 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

↑  
V<sub>mín</sub>

a) En el primer apartado debemos calcular el campo eléctrico en función de la carga de los electrodos. Como sabemos el valor numérico de  $|\vec{E}|$  en un punto, podemos despejar la carga del electrodo y terminar calculando  $V_1$ .



$V_1 > 0 \Rightarrow$  electrodo interior positivo

- Aplico la ley de Gauss a la superficie marcada con trazo discontinua (semiesfera de radio genérico  $r$ , con la tapa horizontal superior para formar una superficie cerrada)

$$\Phi_D = \Phi_{\text{semiesfera}} + \Phi_{\text{tapa superior}} = \int_{\text{semiesfera}} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS + \int_{\text{tapa sup}} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS =$$

$$\vec{D} \parallel \vec{n} \quad \vec{D} \perp \vec{n}$$

$$\vec{D} \perp \vec{n}$$

$$|\vec{D}| \int_{\text{semiesfera}} dS = |\vec{D}| \frac{4\pi r^2}{2} = q_{\text{encerrada}} = q_+$$

$|\vec{D}|$  de en semiesfera

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{q_+}{2\pi r^2} \vec{u}_r \quad (\text{expresión válida para los dos dieléctricos}).$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{q_+}{2\pi \epsilon_1 r^2} \vec{u}_r & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{q_+}{2\pi \epsilon_2 r^2} \vec{u}_r & R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

$$\text{Dato: } |\vec{E}|(r=r_0) = 17460 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{q_+}{2\pi \epsilon_2 r_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_+ = 17460 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot (0.025 \text{ m})^2 \cdot 2\pi \cdot 40 \cdot 8.85 \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = 24.28 \text{ nC}$$

Como ya conocemos el campo eléctrico en los dos dieléctricos, podemos calcular la d.d.p. entre electrodos, yendo de B → C, C → A

$$\boxed{V_1 = V_A - V_B = - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_C^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_B^C E dr - \int_C^A E dr =}$$

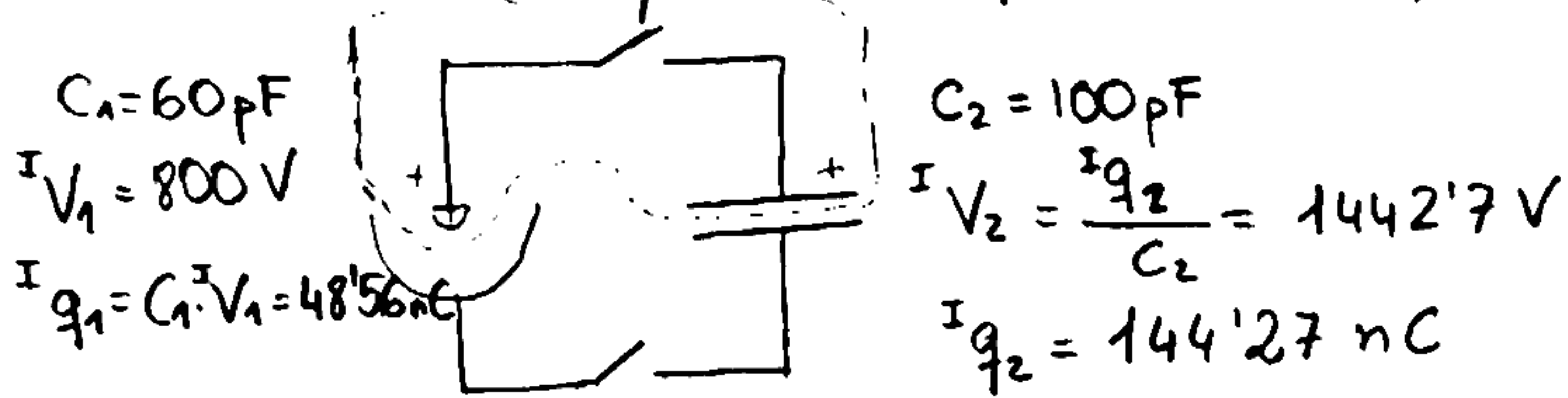
$$= - \int_{R_3}^{R_2} \frac{q_+}{2\pi\epsilon_2 r^2} dr - \int_{R_2}^{R_1} \frac{q_+}{2\pi\epsilon_1 r^2} dr = \frac{q}{80\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{q}{200\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= 181'9V + 218'2V = \boxed{400V}$$

b) Dado que conocemos la ddp entre electrodos y la carga, podemos calcular la capacidad del condensador semiesférico: (con los datos del apartado a, pues en el apdo. b varía la ddp del condensador y por tanto, también variará la carga de los electrodos),

$$C = \frac{q_{\text{apdo a)}}{(V_A - V_B)_{\text{apdo a)}} = \frac{24,28 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{400 \text{ V}} = \boxed{60 \text{ pF}}$$

Ahora sólo falta resolver un problema de transferencia de carga entre condensadores, parecido al que se hizo en prácticas.



• Conservación de carga en el volumen rodeado por la línea

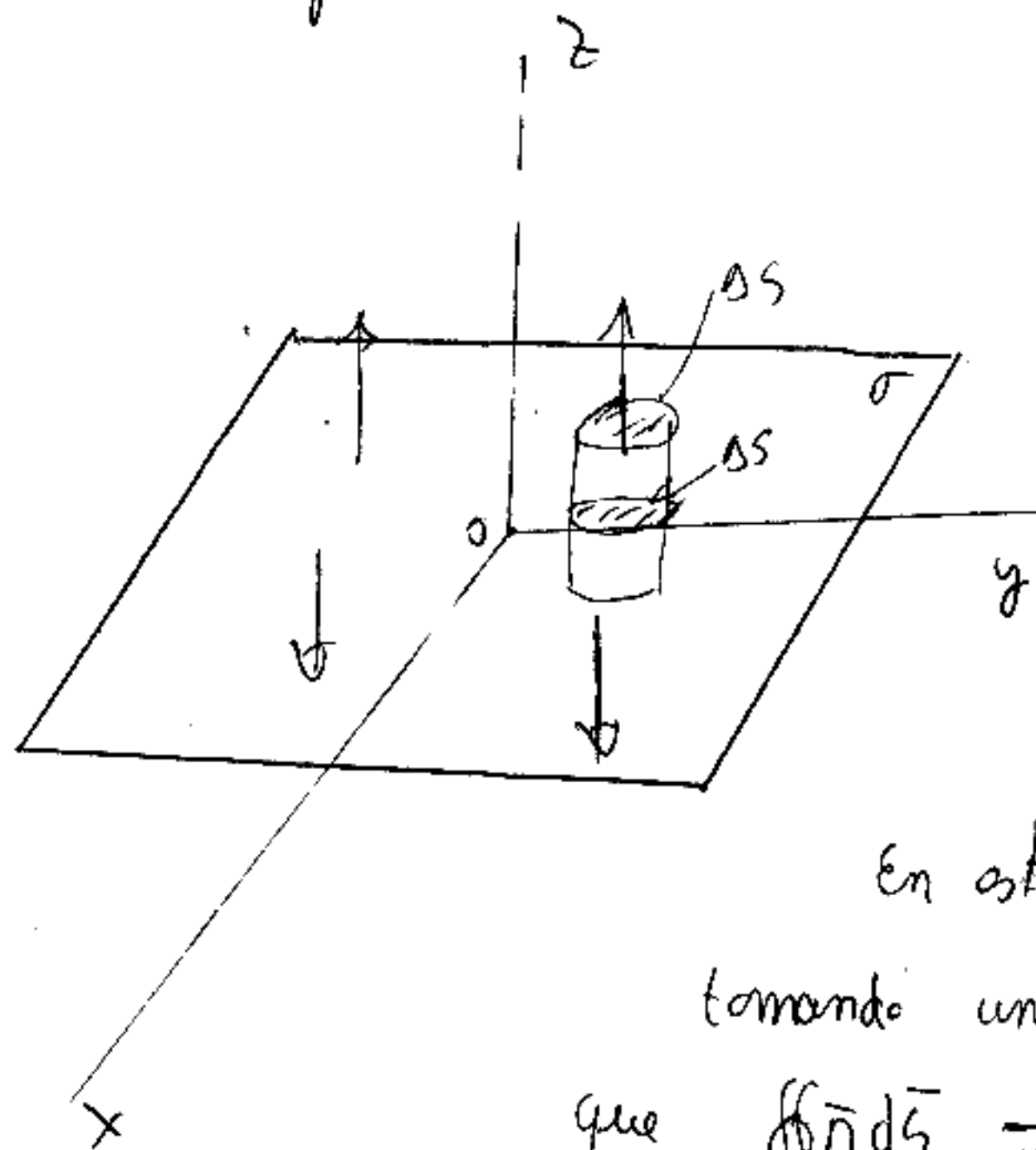
$$I q_1 + I q_2 = II q_1 + II q_2 = 192'8 \text{ nC}$$

• En el estado II, al conectar los condensadores en paralelo, sus ddp. se igualan

$$II V_1 = \frac{II q_1}{C_1} = \frac{II q_2}{C_2} = II V_2 \Rightarrow 192'8 \text{ nC} = II V \cdot C_1 + II V C_2$$

$$\Rightarrow II V = \frac{192'8 \cdot 10^{-9}}{C_1 + C_2} = \boxed{1205 \text{ V} = V_1 = V_2}$$





a) Para este apartado, como los puntos a y b están próximos al centro del plano y cercanos a el podemos considerar la aproximación de plano infinito y calcular el campo usando la ley de Gauss.

En esta aproximación  $\vec{E}$  es  $\perp$  al plano. Así tomando una zesp Gaussiana como la dibujada tenemos

que 
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2 \iint_{\Delta S} D \, ds = 2 D \Delta S$$

$\vec{D} \parallel d\vec{s}$  en las tapas  
superior e inferior  
 $\vec{D} \perp d\vec{s}$  en pared lateral

$D = ck$  en ds

La carga encerrada por esa zesp es: 
$$Q_{enc} = \iint_{\Delta S} \sigma \, ds = \sigma \Delta S$$

$\sigma = ck$

$$\Rightarrow D = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow \begin{cases} z > 0 & \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{K} \\ z < 0 & \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{K}) \end{cases}$$

Dada la simetría es fácil deducir que todos los puntos a la misma distancia z del plano son equipotenciales, y que un punto a una distancia z por encima del plano está al mismo potencial que otro a la misma distancia por debajo

Luego:

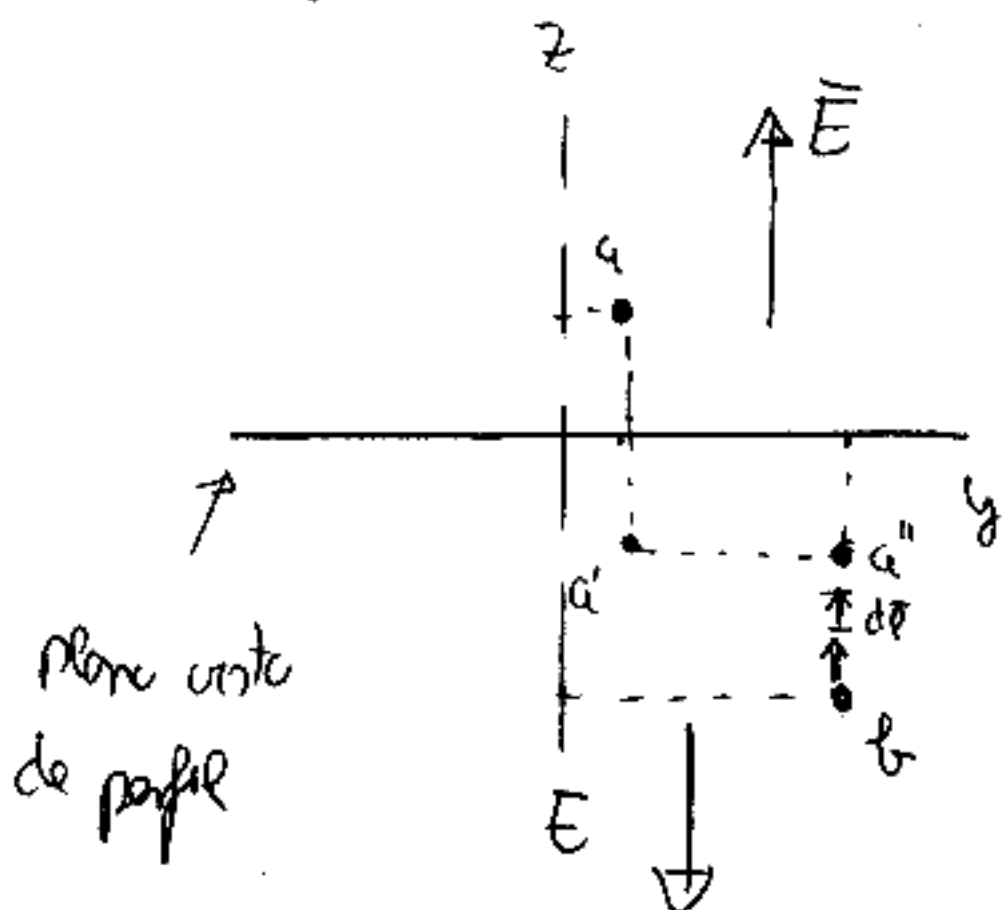
$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_b^{a''} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

es decir para calc la d.d.p. que nos pide, basta que integremos el campo de b  $\rightarrow$  a''

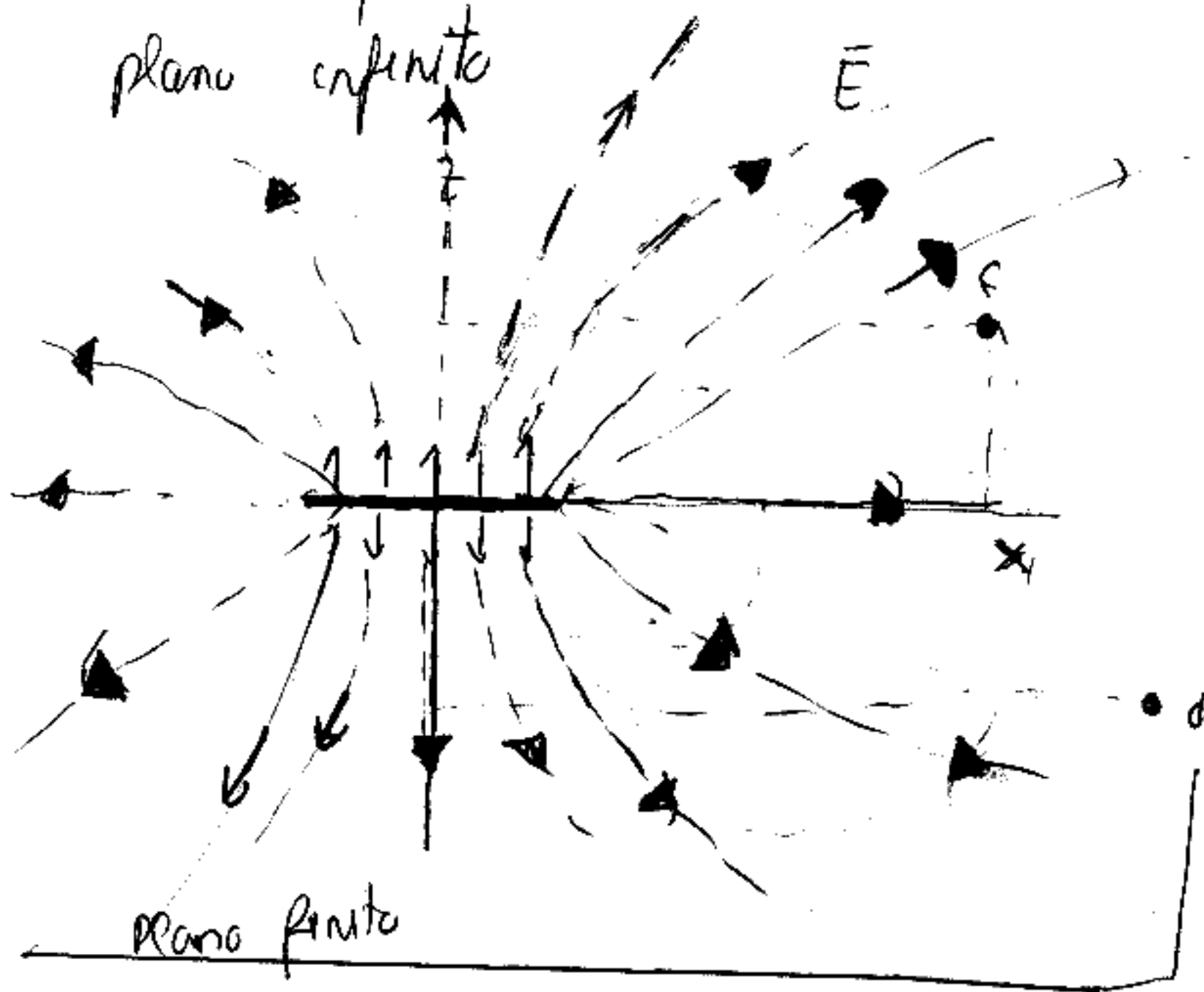
$$\Rightarrow V_a - V_b = - \int_b^{a''} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^{a''} E \, dl = + \int_{-0,015}^{-0,01} E \, dy =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-0,01 + 0,015) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (0,005) = \underline{\underline{3672,3 \text{ V}}}$$

$dl = -dy$  (porque y crece)



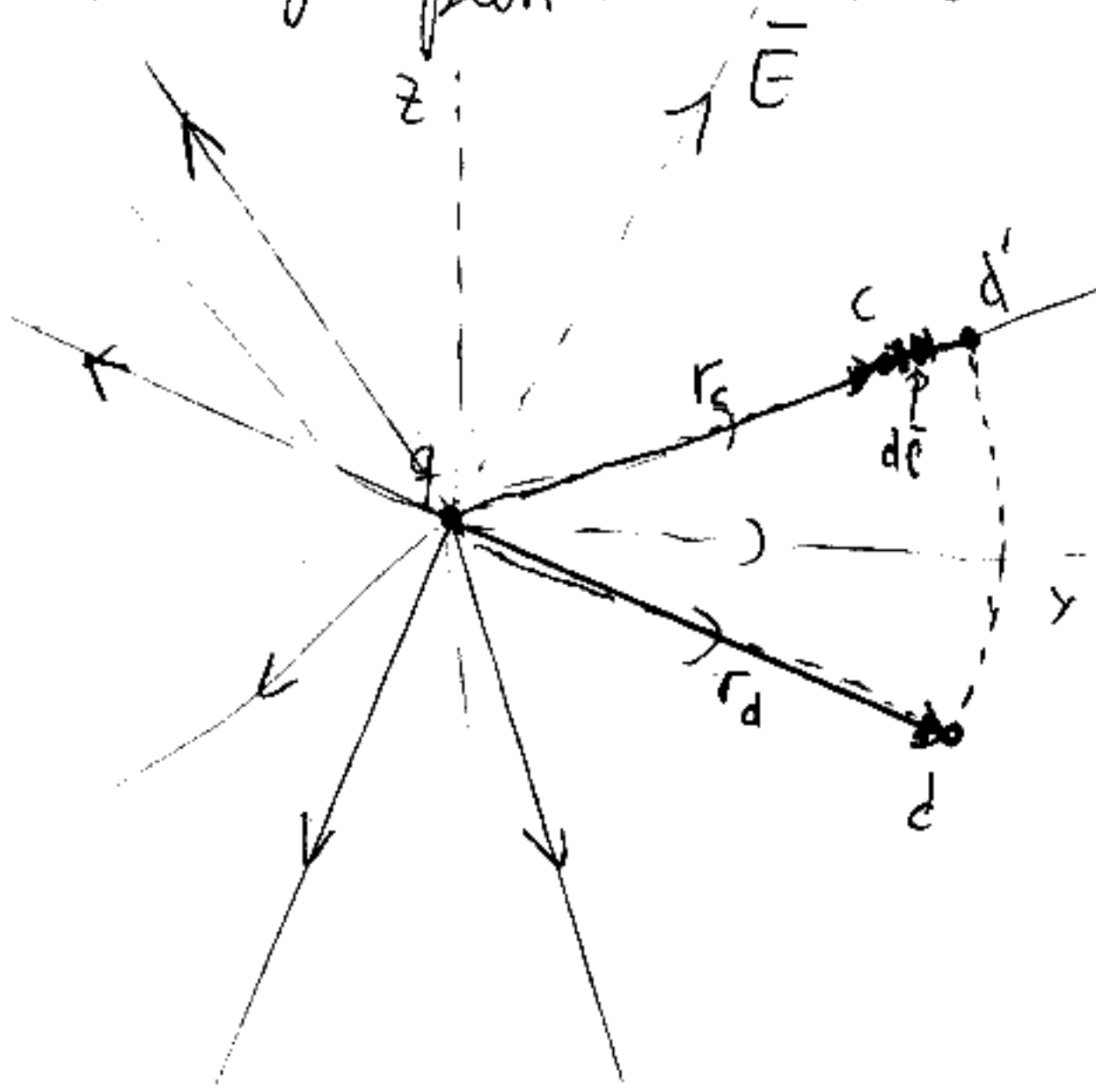
b) Para este apartado los pts están bastante alejados del plano finito, por lo que en ningún caso es válida la aproximación de plano infinito



El cálculo exacto no es posible, dada la falta de simetría del pt. por ello son admisibles, al menos, estas dos soluciones:

- 1º) no puede calcularse dada la falta de simetría
- 2º) Dado que los pts c y d están bastante lejos del

plano podemos considerar la aproximación de que el plano es una carga puntual colocada en el centro. así.



En esta aprox, primero hay que calc la carga total del plano

$$q = \iint_S \sigma ds = \sigma \cdot S = \left(13 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}\right) \cdot 623,7 \text{ cm}^2 = 8,1 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

Luego las distancias de los pts c y d al centro

$$r_c = \sqrt{(1,5)^2 + (0,5)^2} = 1,58 \text{ mm}$$

$$r_d = \sqrt{(1,8)^2 + (0,6)^2} = 1,9 \text{ m}$$

Dada la simetría radial de esféricas que se supone al pt en esta aproximación es fácil deducir que los pts d y d' (que están a la misma distancia del centro) son equipotenciales.

$$\Rightarrow V_d - V_c = V_{d'} - V_c = - \int_c^{d'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_c}^{r_{d'}} E dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_c}^{r_d} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_c} \right) = -776,4 \text{ V}$$

$$\int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r}$$

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$  (campo creado por una carga puntual)