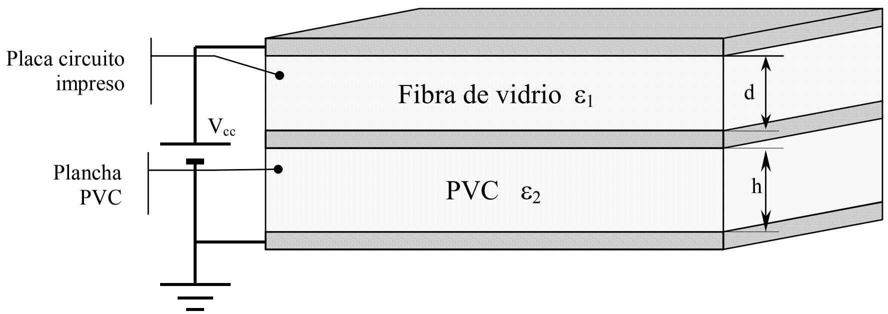
Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial I. **16 de junio de 2.003**
Parte Primera

1.- Tenemos una placa de circuito impreso de doble cara, que consiste en una base de fibra de vidrio de permitividad ε_1 y espesor d, con ambas caras recubiertas de cobre. Debajo de la plancha, se coloca una plancha de PVC de permitividad ε_2 y de espesor h. En la parte inferior, tenemos otra placa conductora que se conecta a tierra, tal como se muestra en el dibujo. La placa superior se conecta a $V_{cc} = 5$ V respecto a tierra. El grosor de las superficies conductoras es δ y se desprecia el efecto de la deformación de las líneas de campo.

a) Si la lámina conductora interior se encuentra descargada, calcular su potencial respecto a tierra. (1 pto.)
b) Calcular la densidad superficial de carga real en las caras de la lámina conductora intermedia. (1 pto.)
c) Si ahora se desconecta la lámina superior de la fuente y se cortocircuita con la lámina intermedia, calcular el potencial respecto a tierra de la lámina intermedia y su carga. (1 pto.)

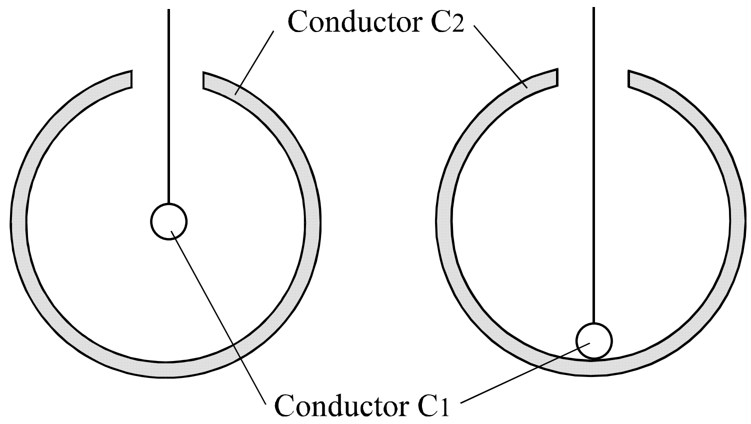
Datos: $h = 1{,}5$ mm; $d = 2$ mm; $\delta << d$; $\varepsilon_1 = 6\cdot\varepsilon_0$; $\varepsilon_2 = 2{,}5\cdot\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ F/m;
$S = 1$ cm^2



Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial I. **16 de junio de 2.003**
Parte Primera

2.- Una esfera conductora, C1, de radio R_1, se encuentra cargada con una carga $Q < 0$. Se dispone de una segunda esfera conductora hueca, C2, de radio interior R_2 y radio exterior R_3 ($R_1 << R_2$) aislada eléctricamente y sin carga, con un orificio circular por donde puede introducirse la esfera C1.
a) Si introducimos C1, sin tocar en ningún momento la esfera C2, hasta que queda concéntrica con ella, calcular la energía electrostática total del sistema en esa situación (estado I). (1 pto.)
b) Si a continuación ponemos en contacto C1 con el fondo del conductor C2, y volvemos a situar C1 en el centro de C2, determinar la energía electrostática del sistema en este nuevo estado (estado II). Calcular el incremento de energía del sistema al pasar del estado I al estado II, indicando claramente su signo e interpretándolo. (1 pto.)

Datos: $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 10$ cm, $R_3 = 11$ cm, $Q = -50$ μC

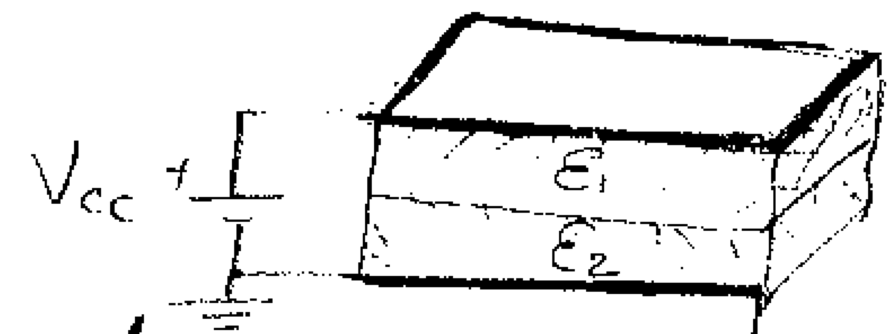


Nota: Los alumnos que tienen pendiente los dos parciales deben resolver los problemas marcados con

EXAMEN 16 DE JUNIO DE 2.003 – PARTE PRIMERA

PRIMER PARCIAL

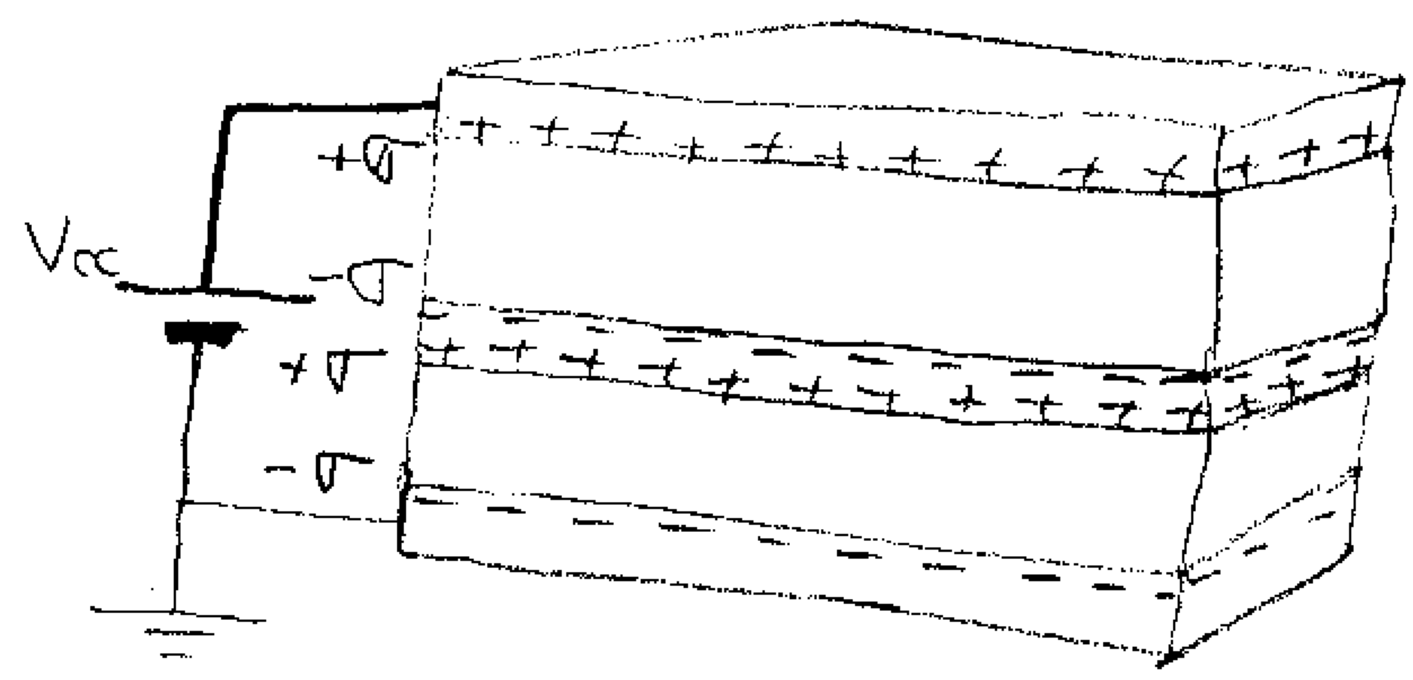
RESULTADOS PROBLEMA 1



– El problema 1 se puede resolver aplicando Gauss o bien utilizando condensadores conectados en serie.

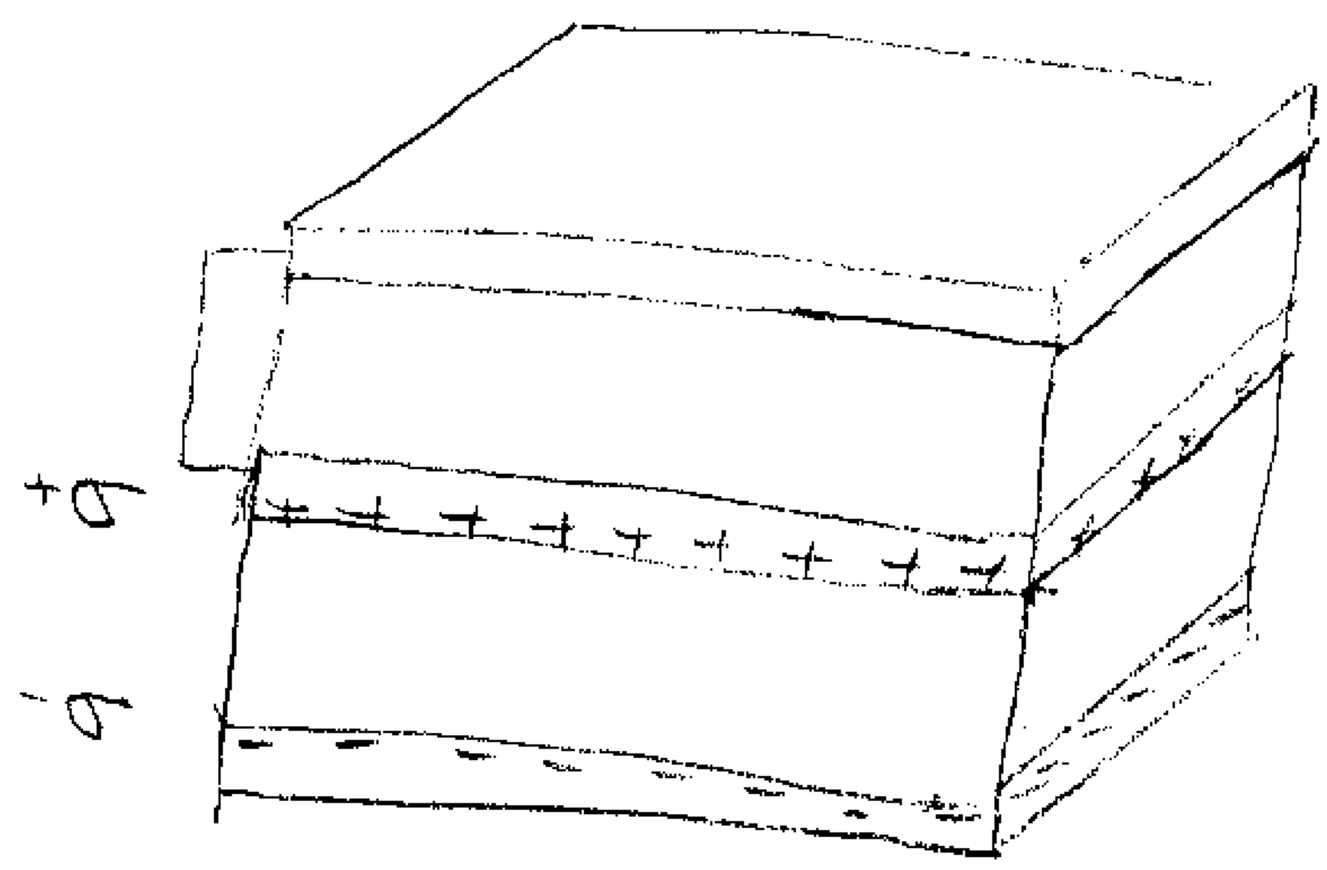
a) $$V_{lámina} = \frac{h\, V_{cc}\, \varepsilon_1}{h\,\varepsilon_1 + d\,\varepsilon_2} = 3'21\,V$$

b) $$\sigma = \frac{V_{cc}}{\frac{d}{\varepsilon_1} + \frac{h}{\varepsilon_2}} = 4'74 \cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$$



c) En este apartado no cambia el potencial de la lámina intermedia. Al unir la placa superior y la lámina intermedia, simplemente se neutralizan las cargas en contacto con la fibra de vidrio

$${}^{II}V_{lámina} = {}^{I}V_{lámina} = 3'21\,V$$



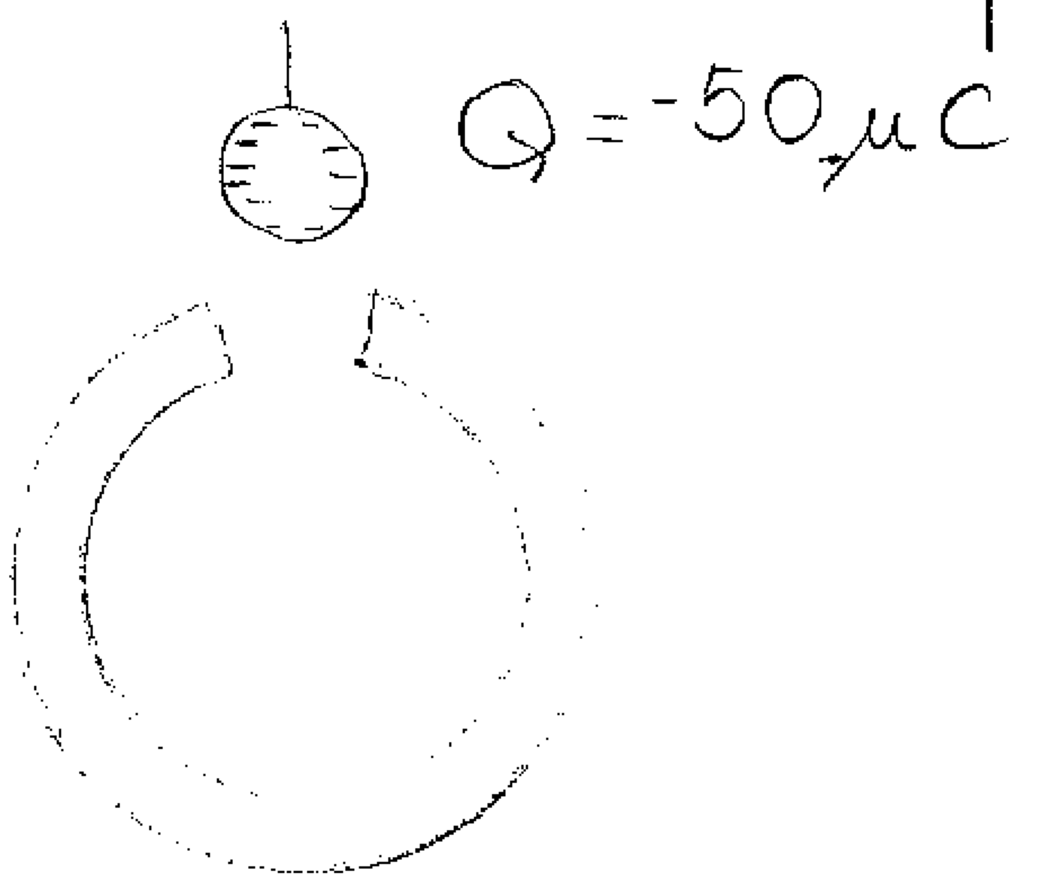
Nota: se propone a los alumnos que resuelvan el ejercicio y en caso de dudas, acudan a tutorías.

EXAMEN 16 DE JUNIO DE 2.003 PARTE PRIMERA

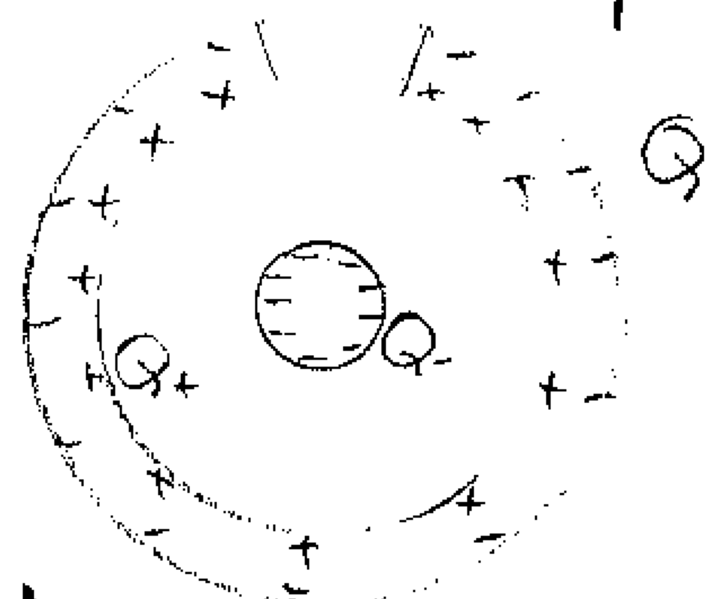
PROBLEMA 2 - 1er parcial

⊛ Análisis previo

i) Introducimos la esfera C_1 en el cascarón sin tocar la superficie



ii) Cuando la bola está dentro del cascarón crea una distribución de carga para que dentro de la esfera conductora C2 se anule el campo eléctrico



⇒ La bola C1, cargada negativamente, induce una carga positiva, del mismo valor pero de signo contrario sobre la pared interior del cascarón. Ésto se puede comprobar aplicando la ley de Gauss a una superficie esférica dentro del cascarón ($R_2 < r < R_3$), donde $\vec{E} = \vec{0}$ por pertenecer esos puntos a un conductor en equilibrio electrostático.

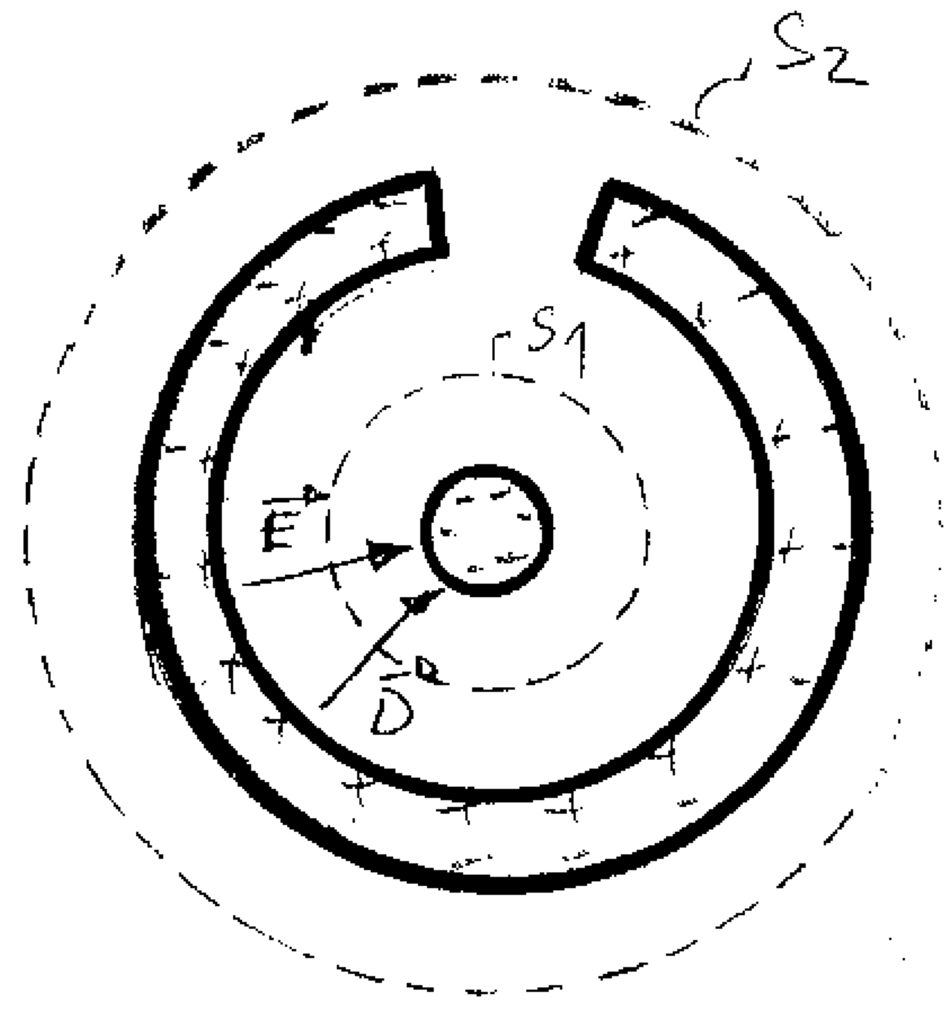
⊛ Cálculo del campo eléctrico

• En los conductores, el campo eléctrico es nulo. Por tanto, sólo hay que calcular $\vec{E}$ en el hueco interior del cascarón ($R_1 < r < R_2$) y en el exterior ($R_3 < r$)

a.1) $R_1 < r < R_2$ (región entre la bola y el cascarón esférico)

Calculamos $\vec{E}$ utilizando la ley de Gauss aplicada a una superficie esférica S_1.

Por simetría, el campo eléctrico en la superficie elegida es constante en módulo y su dirección es perpendicular a la superficie en todos los puntos ($\vec{n}$ opuesto a $\vec{E}$)



$$\phi_D = \oint_{esfera} \vec{D}\,\vec{n}\cdot dS \underset{\uparrow\,vacío/aire}{=} \oint_{esfera} \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = \oint \varepsilon_0 \underset{cte}{|\vec{E}|}\cdot \underset{1}{|\vec{n}|}\cdot \underset{-1}{\cos\pi}\cdot dS =$$

$$= \varepsilon_0 |\vec{E}| \oint_{esfera} dS = \varepsilon_0 |\vec{E}|\cdot S_{esfera} = \varepsilon_0 |\vec{E}|\cdot 4\pi r^2$$

La carga encerrada dentro de la superficie es la correspondiente a la bola, Q_-. Si aplicamos Gauss, $\phi_D = q_{real\ encerrada}$ y despejamos $|\vec{E}|$, obtenemos $E = |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_-|}{r^2}\left[\frac{N}{C}\right]$

Dada la simetría del problema, $\vec{E}$ es radial "hacia adentro"

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_-|}{r^2}(-\vec{u_r})$$

a 2) $R_3 < r$ (región exterior)

Ahora aplico Gauss a la superficie esférica S_2. Dado que se mantienen las condiciones de simetría anteriores, $\phi_D = \varepsilon_0 |\vec{E}|\, 4\pi r$.

En este apartado, $q_{real\ encerrada} = \cancel{Q_-} + \cancel{Q_+} + Q_- = Q_-$. Por tanto, el campo eléctrico tiene la misma expresión que en el apartado anterior

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_-|}{r^2}(-\vec{u_r})$$

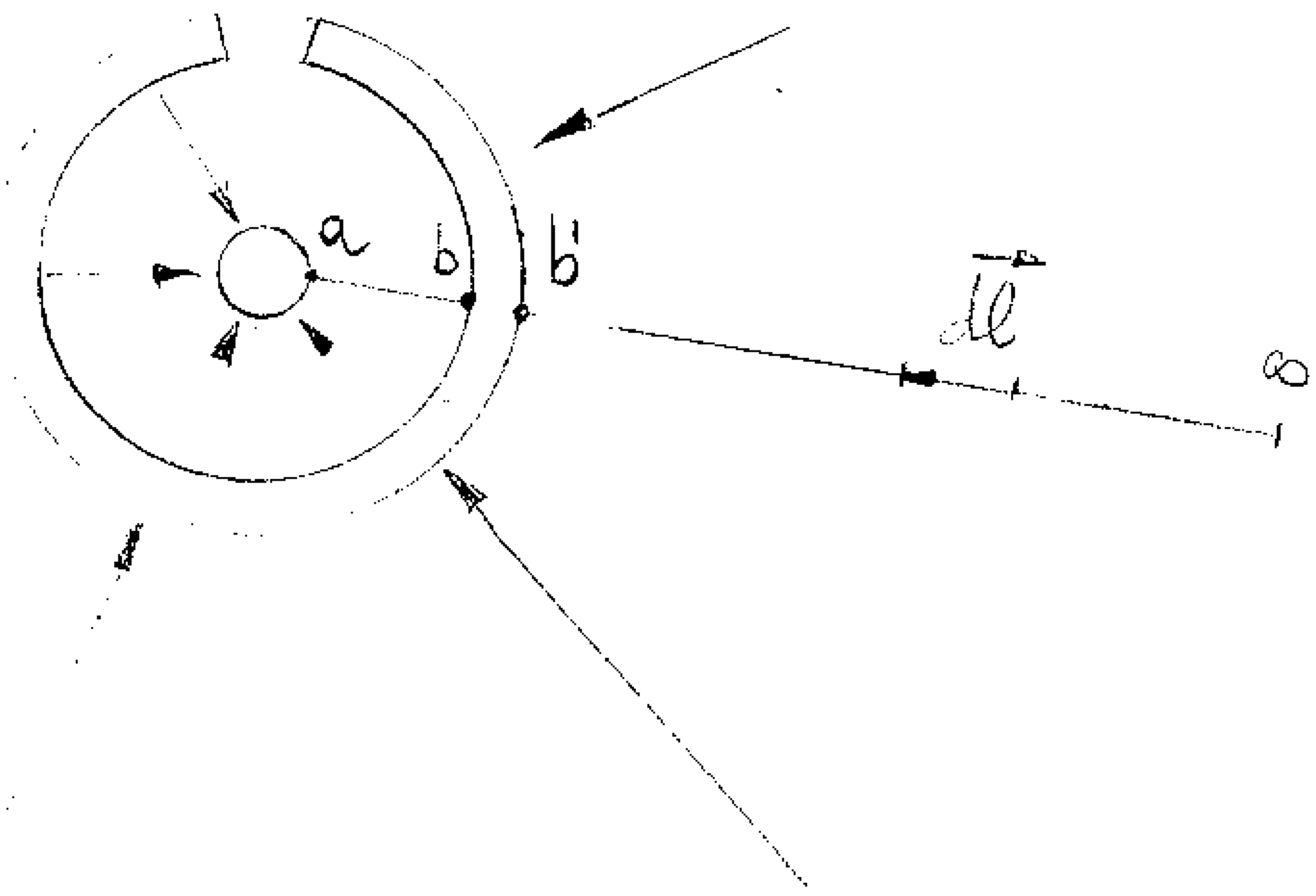
⊛ Cálculo de la diferencia de potencial

Para calcular el potencial de la bola con respecto el ∞, debemos hacerlo en dos pasos. Primero calcularemos el potencial del cascarón con respecto al ∞ y después calcularemos la ddp entre la bola y el cascarón

$$V_{b'} = \frac{W_{\infty\to b}}{q} = V_{b'} - V_\infty = -\int_\infty^{b'} \vec{E}\,\vec{dl} \underset{\uparrow\,\vec{E}//\vec{dl}}{=}$$

$$= -\int_\infty^{b'} |\vec{E}||\vec{dl}| \underset{\uparrow\,dl=-dr}{=} -\int_\infty^{R_3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_-|}{r^2}(-dr) =$$

$$= -\frac{|Q_-|}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_3} - \frac{1}{\infty}\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_-|}{R_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_-}{R_3}$$



$$V_a - V_b = \frac{W_{b\to a}}{q} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{d\vec{l} \,//\, \vec{E}}{=} -\int_b^a E\, dl \underset{dl=-dr}{=} -\int_b^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_-|}{r^2}(-dr)$$

$$= -\frac{|Q_-|}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{Q_-}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$V_a = V_a - V_\infty = (V_a - V_b) + (V_b - V_\infty) = \frac{Q_-}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right]$$

⊛ Cálculo de la energía del sistema

- La energía del sistema se puede calcular a través del potencial al que están las cargas.

$$W = \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{Q_{cascarón}}}_{\text{carga neta } \emptyset} V_{cascarón} + \frac{1}{2} Q_{bola}\cdot V_{bola}$$

Al aplicar la fórmula de la energía asociada a las cargas hay que considerar todas las cargas. No obstante, como el cascarón tiene una carga neta nula, en el apartado a) su término desaparece.

$$W = \frac{1}{2} Q_- \frac{Q_-}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] = 1114'77 \text{ J}$$

- Otro método es calcular la densidad de energía e integrarla a todo el volumen donde hay campo eléctrico

$$w = \text{densidad de energía} = \frac{1}{2} E\cdot D = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q_-^2}{r^4}$$

$$W = \text{energía total del sistema} = \int_{\text{hueco interior}} w\, d\tau + \int_{\text{exterior}} w\cdot d\tau \underset{d\text{Volumen} = d\tau = 4\pi r^2 dr}{=}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q_-^2}{r^4} 4\pi r^2 dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q_-^2}{r^4} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{Q_-^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] = 1114'7 \text{ J}$$

Nota: al integrar la densidad de energía, debemos poner el límite inferior < límite superior para que el diferencial de volumen sea positivo.

La energía almacenada en el sistema es positiva porque para conseguir una distribución de carga, es necesario realizar un trabajo (el agente exterior que translada las cargas desde el ∞ realiza un trabajo).

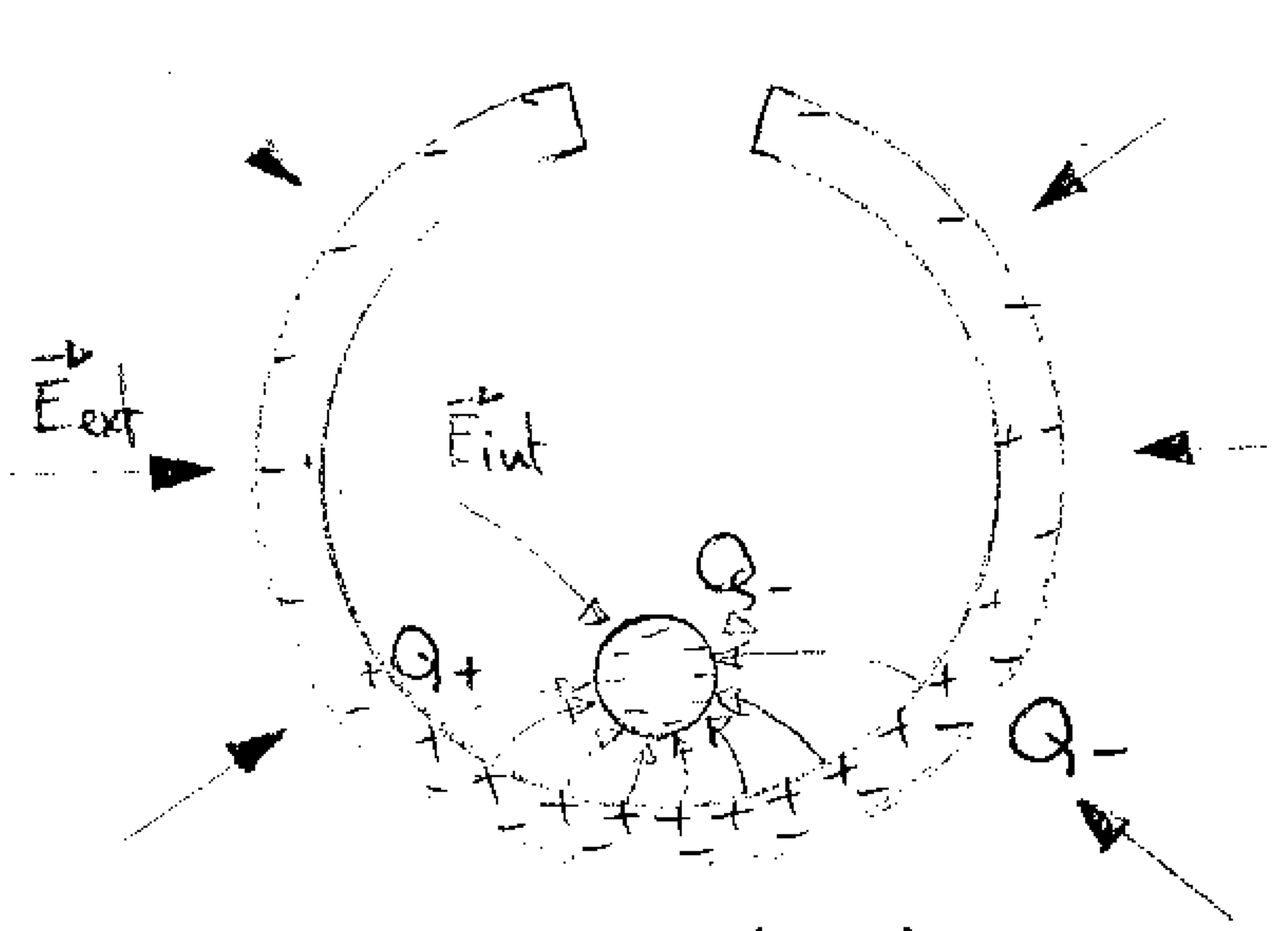
• La última opción es calcular la energía considerando las capacidades del sistema. En este problema hay un efecto capacitivo entre la bola y la superficie interior del cascarón, $C_{int} = \dfrac{|Q_-|}{|V_a - V_b|}$

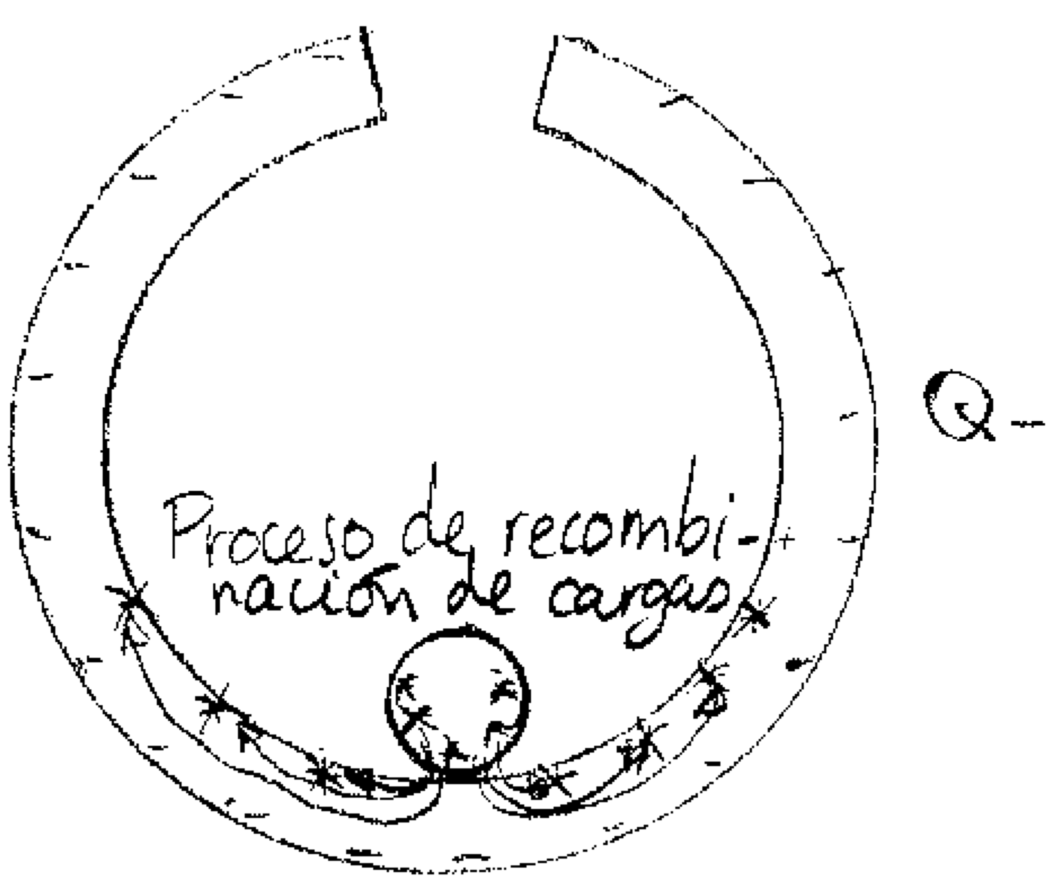
Pero en la superficie exterior de la bola también hay una carga acumulada a un cierto potencial respecto al ∞. Es decir, existe una capacidad respecto al infinito, $C_{ext} = \dfrac{|Q_-|}{|V_{b'} - V_\infty|}$

$$\mathrm{I}\quad W = \frac{1}{2}\frac{Q_-^2}{C_{int}} + \frac{1}{2}\frac{Q_-^2}{C_{ext}} = 1114'7\,J$$

(Este último método de resolución requería tener muy claro el concepto de capacidad).

b) A continuación la bola se baja hasta que toca el cascarón.

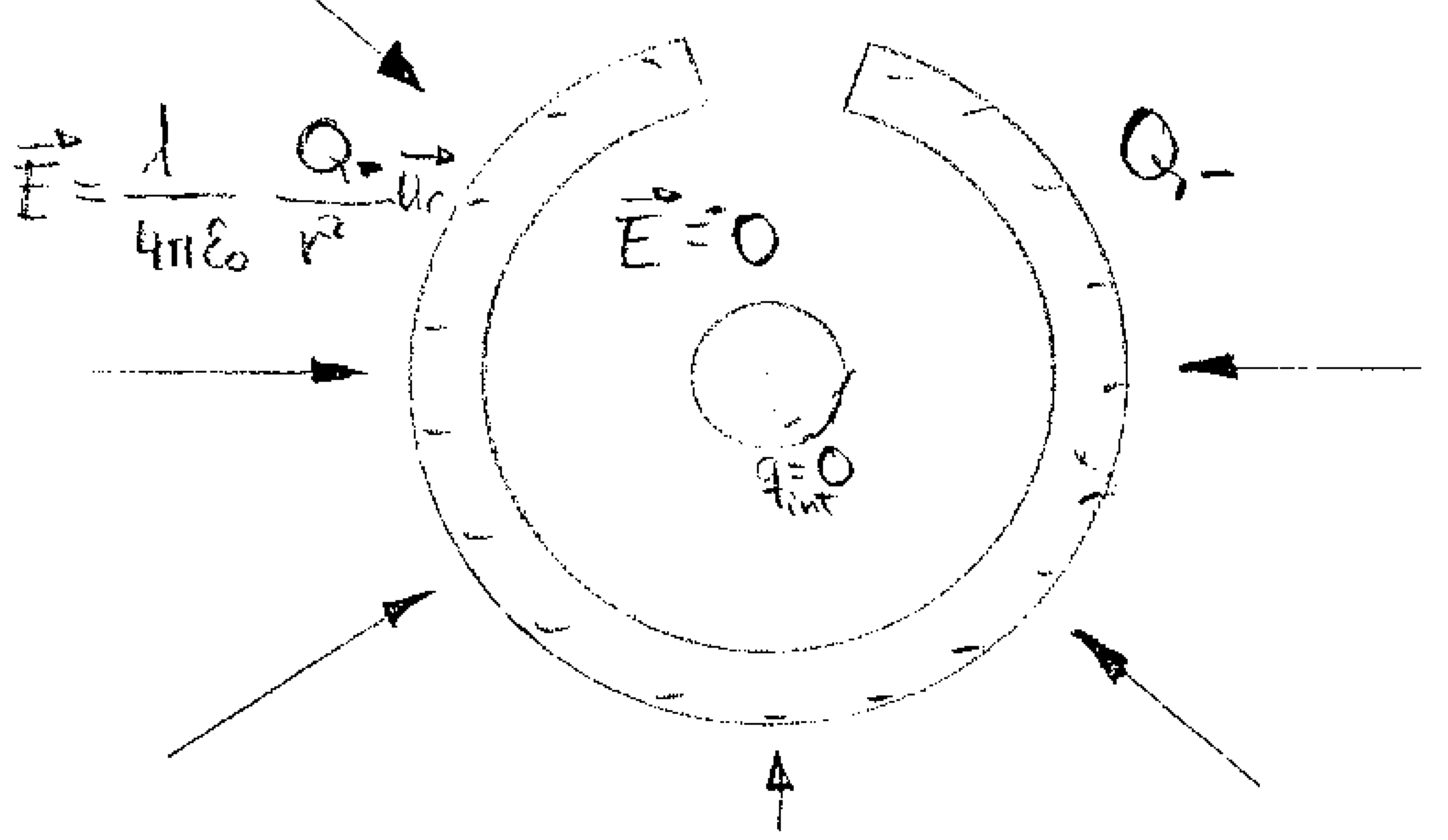




Al bajar la bola, la carga inducida en el interior del cascarón se concentra en las proximidades de la bola

Se produce un chispazo y unas corrientes transitorias en el proceso de cancelación de la carga de la bola con la carga inducida

Al final del proceso de recombinación sólo queda carga en la superficie exterior del cascarón (al descargarse la bola interior, toda la carga tiende a situarse en el exterior, al igual que sucede en el "efecto punta").



Al ponerse en contacto la bola con el cascarón, se disipa energía en las corrientes transitorias la carga de la bola se recombina totalmente con la carga inducida en el interior del cascarón. Al final, dentro del cascarón se anula el campo eléctricamente y el sistema ha evolucionado al estado de menor energía compatible con el hecho de que el sistema bola-cascarón está aislado.

Si se vuelve a aplicar Gauss a una superficie como la S_2 del apartado a), obtendríamos que el campo en el exterior ha cambiado.

Por tanto, $V_{b'} = \frac{W_{\infty \to b'}}{q} = -\int_{\infty}^{b'} \vec{E}\, d\vec{l} \underset{\uparrow}{=} \frac{Q_-}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

igual que apdo a)

• Si calculamos la energía a través del potencial al que están las cargas obtenemos

$W = \frac{1}{2} Q_{cascarón} V_{cascarón} + \frac{1}{2} \cancel{Q_{bola}} V_{bola} = \frac{1}{2}\frac{Q_-^2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 102'2 J$

• Si utilizamos el método de la densidad de energía asociada al campo eléctrico, en este caso sólo tendremos que integrar entre R_3 e ∞, puesto que ésta es la región del espacio donde tenemos campo eléctrico

$$^{II}W = \int_{R_3}^{\infty} w \cdot dV = \int_{R_3}^{\infty} w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q_-^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3} = 102'27 \text{ J}$$

• Si utilizamos el método de la energía asociada a la capacidad, en este caso tendríamos que considerar la capacidad respecto a un segundo electrodo muy alejado ($r \to \infty$) – capacidad respecto al ∞); $C_\infty = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_3} - \cancel{\frac{1}{\infty}}_{0}} = 4\pi\varepsilon_0 R_3$

$$^{II}W = \frac{1}{2}\frac{Q_-^2}{C_\infty} = \frac{Q_-^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3} = 102'27 \text{ J}$$

La variación de energía ha sido negativa. El sistema ha perdido energía, que se ha transformado en calor en las corrientes transitorias.

$$\Delta W = W_{final} - W_{inicial} = {}^{II}W - {}^{I}W = 1114'7 - 102'2 = -1012'5 \text{ J}$$

El signo negativo indica que el campo eléctrico ha realizado el trabajo (no un agente externo).

<u>Observación</u>: dada la simetría esférica del problema, el campo eléctrico se puede calcular considerando la carga encerrada por la superficie gausiana concentrada en el centro y se puede aplicar las fórmulas correspondientes a una carga puntual.

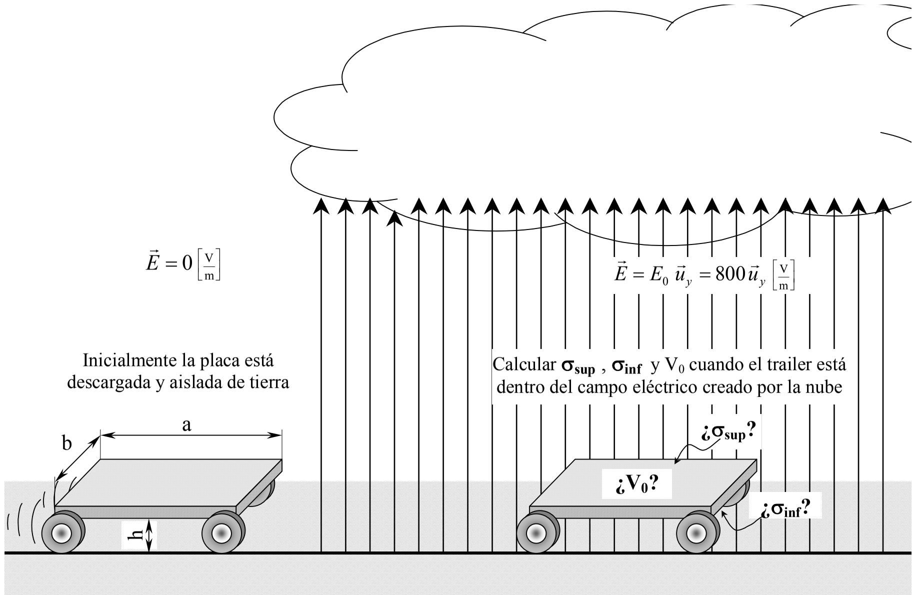
Error tipográfico: $Q_- = -50 \, nC$ en vez de $-50 \, \mu C$

Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial I. **16 de junio de 2.003**
Parte Segunda

3.- Una nube tormentosa crea justo debajo de ella un campo eléctrico. En ese instante, entra en la zona del campo eléctrico un camión, que inicialmente estaba descargado. La plataforma del remolque puede considerarse simplificadamente como una placa conductora, aislada de tierra por los neumáticos.

a) Calcular la carga superficial que se induce en cada una de las caras y el potencial, respecto de tierra, de la plancha cuando el remolque está debajo de la nube (1 pto.).
b) Volver a calcular las cargas superficiales si el remolque, en vez de estar aislado de tierra, va arrastrando unas cadenas metálicas que lo conectan a tierra (1 pto.).

Datos: a = 18 m, b = 2 m, h = 0,8 m.
Despreciar los efectos de curvatura del campo eléctrico y el espesor de la plataforma del trailer.

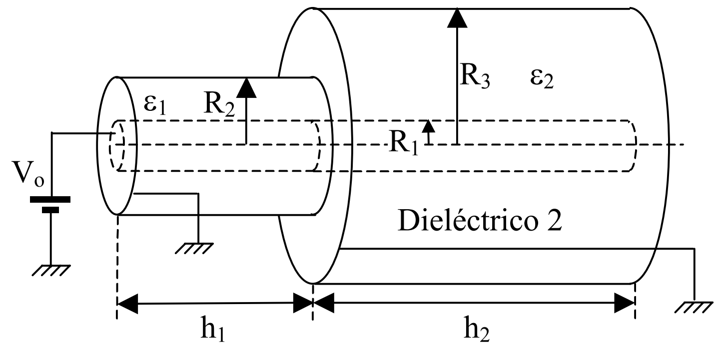


Electricidad y Electrometría **1º Electrónicos**
Convocatoria de Junio. Parcial I. **16 de junio de 2.003**
Parte Segunda.

4.- En un sistema de transmisión de energía se requiere la conexión de dos tramos de cable coaxial. El radio del conductor interno R_1 es idéntico en ambos tramos, mientras que los radios de los conductores externos en cada tramo R_2 R_3 son diferentes. Los dos conductores externos tienen espesor despreciable. Las permitividades de los dieléctricos que separan los conductores cambian en cada tramo. Los conductores exteriores están conectados ente si y a tierra. Los conductores centrales también están interconectados y a un potencial V_o respecto a tierra.

a) Calcular la carga total en el conductor interior y capacidad del conjunto para un trozo del conductor 1 de longitud h_1 y otro trozo del conductor 2 de longitud h_2 (1 pto.)
b) Calcular la máxima diferencia de potencial que puede aplicarse sin que se produzcan fenómenos de ionización, indicando en que tramo se producirán primero. (1 pto.)
c) Calcular las densidades superficiales de polarización en las caras del dieléctrico 2. (1 pto.)

Datos: V_0 = 40 kV; R_1 = 1 cm; R_2 = 2 cm; R_3 = 4 cm; h_1 = 2m; h_2 = 3m;
$\varepsilon_1 = 100\cdot\varepsilon_o$; $\varepsilon_2 = 300\cdot\varepsilon_o$; $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}$;
Campos de ruptura: $E_{r1} = E_{r2}$ = 80 kV/cm.



Nota: Los alumnos que tienen pendiente los dos parciales deben resolver los problemas marcados con

EyE, 16 jun 03, conv Junio

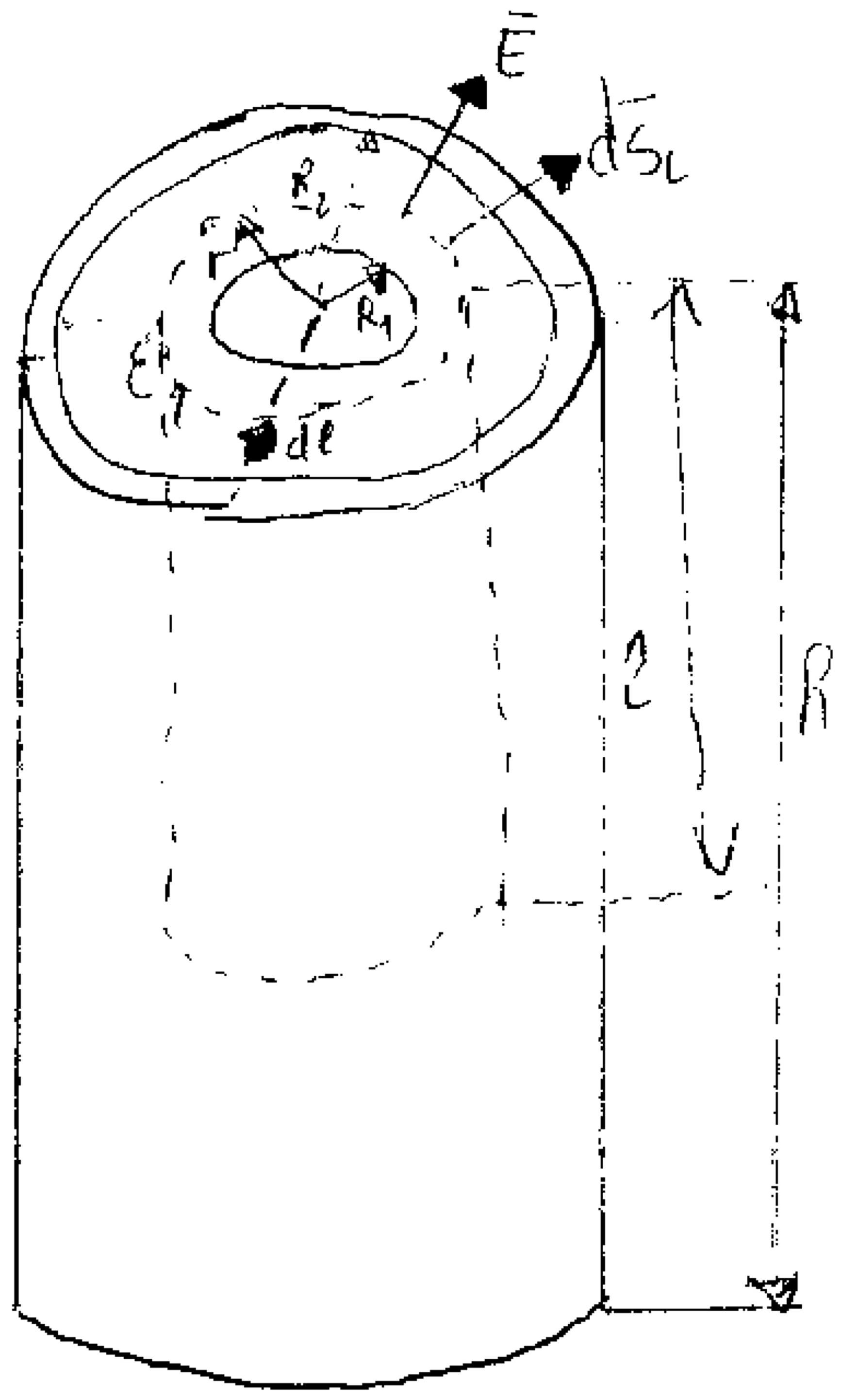
2P, 1er P, 4

PRIMER PARCIAL, 2ª PARTE

Es un sistema formado por dos condensadores cilíndricos en paralelo.

a) Calcular Q total y capacidad del conjunto.

Para ello calcularé primero los campos en el dieléctrico 1 utilizando la superficie gaussiana dibujada tengo:



$$\oiint \bar{D}_1 d\bar{S} \underset{\uparrow}{=} \iint_{S_{lateral}} D_1\, dS \underset{\uparrow}{=} D_1 \iint_{S_L} dS = D_1\, 2\pi r\, l.$$

$\bar{D} \perp d\bar{S}$ en tapas; $\bar{D} \parallel d\bar{S}$ en pared lateral

$D_1 = cte$ en la pared lateral (por ser equidistante al eje.)

$$Q_{real\ encerrada} = \iint_{S_{placa\ interior}} \sigma_1\, dS \underset{\uparrow}{=} \sigma_1 \iint_S dS = \sigma_1\, 2\pi R_1\, l$$

$S_{placa\ interior}$ encerrada en la superficie gaussiana

$\sigma = cte$ (por simetría, despreciando efectos de borde)

(observar que σ no es dato. En este problema el dato es la d.d.p.)

Igualando: $D_1\, 2\pi r\, l = \sigma_1\, 2\pi R_1\, l \implies \bar{D}_1 = \sigma_1 R_1 \cdot \frac{1}{r}\, \hat{u}_r$

La dirección de $\bar{D}_1$ es radial (de cilíndricas) hacia afuera. Esto se deduce de la simetría.

$$\implies \bar{E}_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{r}\, \hat{u}_r$$

Para poner el campo en función del dato tengo que calcular la d.d.p. entre los cilindros interior y exterior. Esto es:

$$V_0 = -\int_{R_2}^{R_1} \bar{E}_1\, d\bar{l} \underset{\uparrow}{=} \int_{R_2}^{R_1} |\bar{E}||d\bar{l}| \underset{\uparrow}{=} -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{r}\, dr = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_1}{R_2} = \boxed{\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} = V_0}$$

$\bar{E}_1$ op $d\bar{l}$ (porque voy de fuera a dentro, punto inicial en R_2)

$|d\bar{l}| = -dr$ (porque la variable de integración r va decreciendo cuando voy del pto inicial hacia el final)

Por analogía para el dieléctrico 2 obtengo

$$\bar{D}_2 = \sigma_2 R_1 \cdot \frac{1}{r} \hat{u}_r \quad ; \quad \bar{E}_2 = \frac{\sigma_2 R_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{r} \hat{u}_r$$

Según los datos del pb la ddp es la misma para las placas de este condensador, así que;

$$\boxed{V_0 = \frac{\sigma_2 R_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_1}}$$

De las expresiones anteriores es fácil obt lo que nos piden. así, despejando σ_1 y σ_2 tengo

$$\sigma_1 = \frac{V_0 \cdot \varepsilon_1}{R_1} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad ; \quad Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_1 \, ds \overset{\sigma_1 = ck}{=} \sigma_1 \iint_{S_1} ds = \sigma_1 2\pi R_1 h_1 = \boxed{\frac{2\pi h_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \varepsilon_1 \cdot V_0 = Q_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{V_0 \varepsilon_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \quad ; \quad Q_2 = \sigma_2 2\pi R_1 h_2 = \boxed{\frac{2\pi h_2}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \cdot \varepsilon_2 \cdot V_0 = Q_2}$$

Por lo tanto la carga total del conductor interior será;

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \left(\frac{2\pi h_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \varepsilon_1 + \frac{2\pi h_2}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \varepsilon_2 \right) \cdot V_0 = \underline{2,1 \, mC}$$

El cálculo de la capacidad es inmediato, aplicando $Q_T = C V_0$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi h_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \varepsilon_1 + \frac{2\pi h_2}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \cdot \varepsilon_2} = \underline{52,1 \, nF} \begin{cases} C_1 = 16 \, nF \\ C_2 = 36,1 \, nF \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = 5,1 \cdot 10^{-3} \, C/m^2 \longrightarrow Q_1 = \sigma_1 2\pi R_1 h_1 = 0,64 \, mC \\ \sigma_2 = 7,7 \cdot 10^{-3} \, C/m^2 \longrightarrow Q_2 = \sigma_2 2\pi R_1 h_2 = 1,44 \, mC \end{array} \right\} Q = \underline{2,1 \, mC}$$

2P, 1erP, 4 (16, Jun, 03)

b) Para calc la máxima tensión de ruptura pondré los campos en función de Vo, usando los resultados anteriores.

así: $\bar{E}_1 = \dfrac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \hat{u}_r$; $\bar{E}_2 = \dfrac{V_0}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \cdot \dfrac{1}{r} \hat{u}_r$

Como $R_3 > R_2 \Rightarrow \ln \frac{R_3}{R_1} > \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \dfrac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} > \dfrac{V_0}{\ln \frac{R_3}{R_1}}$

luego la ionización se producirá antes en el medio 1 que en el 2. Por otra parte, como el campo decrece con r, resulta que el campo máximo se da para $r = R_1$. Así:

$$|\bar{E}_{1_{Max}}| = E_1(r=R_1) = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{R_1}$$

La ionización se iniciará cuando $E_{1_{MAX}} = E_{r_1}$, por tanto la máxima tensión admisible sin que se prod ionización será:

$$\frac{V_{0max}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{R_1} = E_{r_1} \Rightarrow V_{0_{max}} = R_1 E_{r_1} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} = \underline{55{,}45 \text{ kV}}$$

c) A partir de $\bar{D}$ y $\bar{E}$ calcularé $\bar{P}$ usando la expresión

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \Rightarrow \bar{P} = \bar{D} - \varepsilon_0 \bar{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\bar{E}$$

así:

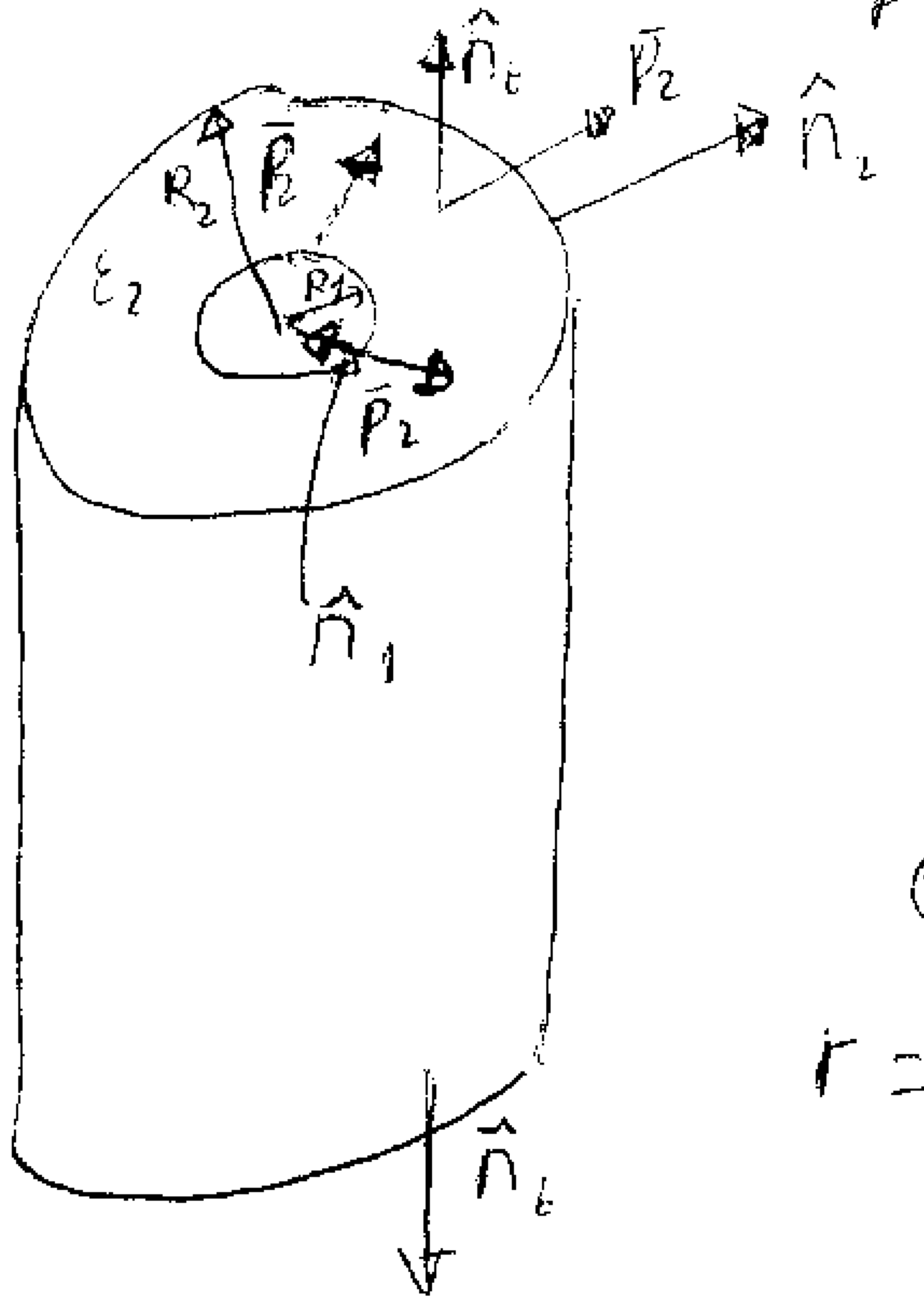
$$\bar{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\bar{E}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1} \cdot \sigma_1 R_1 \cdot \frac{1}{r}\hat{u}_r = \frac{(\varepsilon_{1r} - 1)}{\varepsilon_{1r}} \cdot \sigma_1 R_1 \cdot \frac{1}{r}\hat{u}_r$$

$$\bar{P}_2 = \frac{(\varepsilon_{r_2} - 1)}{\varepsilon_{r_2}} \cdot \sigma_2 R_1 \cdot \frac{1}{r}\hat{u}_r$$

Donde ε_{r_1} y ε_{r_2} son las permitividads relativas de cada medio

Como sólo nos preguntan para el dielectr 2 sólo necesitamos P_2

Para calcular σ_P usaremos la expresión $\sigma_P = \bar{P} \cdot \hat{n}$



Según lo indicado en el dibujo vemos que los vectores normales a las tapas del dieléctrico ($\hat{n}_t$) son perpendiculares a $\bar{P}_2$ y portanto en ellas $\sigma_{P_{tapa}} = \bar{P}\,\hat{n}_t = 0$, para todos los pts de ellas. En las paredes laterales tenemos dos casos

$$r = R_1 \Rightarrow \sigma_{P_1} = \bar{P}_2 \cdot \hat{n}_1 \underset{\bar{P}_2 \text{ op } \hat{n}_1}{=} -P_2(r = R_1) = -\frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{\varepsilon_{r_2}} \cdot \sigma_2 = \sigma_{P_1}$$

$$r = R_3 \quad \sigma_{P_2} = \bar{P}_2 \cdot \hat{n}_2 \underset{\bar{P}_2 \parallel \hat{n}_2}{=} P_2(r = R_3) = \frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{\varepsilon_{r_2}} \cdot \sigma_2 \frac{R_1}{R_3} = \boxed{|\sigma_{P_1}| \cdot \frac{R_1}{R_3} = \sigma_{P_2}}$$

$$\sigma_{P_1} = -\frac{299}{300} \cdot \sigma_2 \simeq \sigma_2 = \boxed{-7,7 \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^2} = \sigma_{P_1}}$$

$$\sigma_{P_2} = |\sigma_{P_1}| \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2} m}{4 \cdot 10^{-2} m} = \frac{|\sigma_{P_1}|}{4} = \boxed{1,9 \cdot 10^{-7} \frac{C}{m^2} = \sigma_{P_2}}$$