

Electricidad y Electrometría
Primer Parcial. Primera parte
 1º Electrónicos
 31 de enero de 2003

1.- Un generador de Van de Graaff está constituido por una cúpula esférica, metálica, aislada y muy alejada de la base, también metálica. Se transportan cargas de la base a la cúpula con una cinta dieléctrica que se desplaza mediante rodillos giratorios. La carga se transfiere de la base a la cinta mediante una punta metálica colocada muy próxima a la cinta y se recoge en la cúpula con otra punta metálica conectada a la parte interior de ésta (véanse los detalles en la figuras).

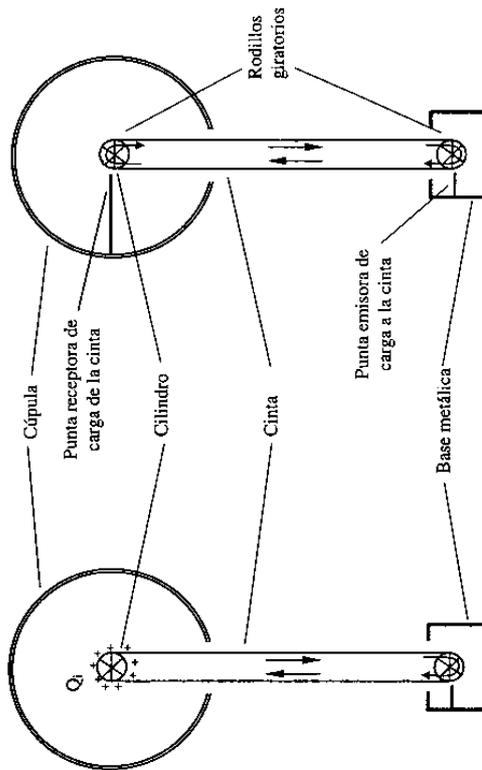
En este caso, la cúpula es una esfera de radio R_1 y grosor δ despreciable con un pequeño orificio por donde pasa la cinta transportadora de carga. Puede considerarse que el orificio y la base metálica inferior no afectan mucho a la distribución de carga en la cúpula y que, en consecuencia, sigue habiendo simetría esférica para el campo eléctrico.

a) Inicialmente, por un fallo de montaje, no se ha colocado la punta colectora de carga de la cúpula por lo que las cargas de la cinta no pueden pasar a ella. En consecuencia, la cúpula puede considerarse aislada. Si inicialmente la cúpula tenía carga Q_c y tras poner la máquina en funcionamiento la cinta transporta al interior de la cúpula una carga Q_1 , calcular la carga real inducida en la pared interior, Q_{int} y en la exterior Q_{ext} de la cúpula. (1 punto)

Tras conectar la punta colectora de la cúpula, las cargas transportadas por la cinta se van acumulando en la cúpula esférica mientras la máquina está en funcionamiento. Esto provoca el incremento del campo eléctrico alrededor de la esfera.

b) Durante el funcionamiento medimos el campo eléctrico a una distancia R_2 de la esfera, obteniendo un valor $|\vec{E}(r = R_2)| = E_2$. Calcular la carga de la cúpula en ese momento. (1 punto)

c) La rigidez dieléctrica del aire puede variar con las condiciones de temperatura, humedad y presión. Si se mide el potencial de la cúpula V_{max} (respecto del infinito) al que se inicia el efecto corona alrededor de la esfera, calcular la rigidez del aire en esas condiciones. (1 punto)



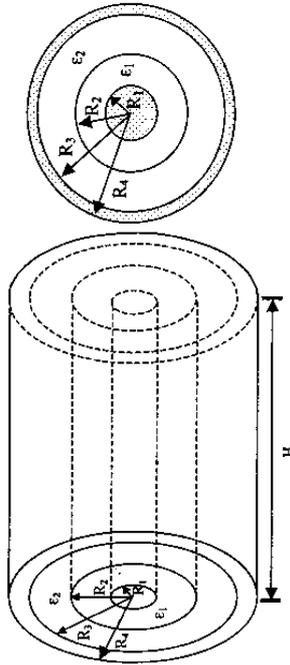
Apartado a)
 Datos: $R_1 = 8 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $E_2 = 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, $K = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$,
 $V_{MAX} = 216 \text{ kV}$, $Q_1 = +10 \text{ nC}$, $Q_c = -30 \text{ nC}$.

2.- Disponemos de un condensador cilíndrico. Una de sus placas es un cilindro metálico de altura H y radio R_1 y la otra un cilindro metálico hueco de la misma altura y radio interior R_2 y exterior R_4 . Entre ambas placas tenemos un dieléctrico de permeabilidad ϵ_1 que se extiende al intervalo $R_1 < r < R_2$ y otro de permeabilidad ϵ_2 entre $R_2 < r < R_4$. Las placas están sometidas a una diferencia de potencial V_0 siendo la placa interior la positiva.

a) Calcular la densidad superficial de carga de polarización total en la superficie de separación de ambos dieléctricos ($r = R_2$) (1 punto)

b) Calcular la energía electrostática asociada al volumen cilíndrico donde está el medio de permeabilidad ϵ_1 ($R_1 < r < R_2$) (1 punto)

Datos: $\epsilon_1 = 3 \cdot \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 5 \cdot \epsilon_0$, $R_1 = 1 \text{ mm}$, $R_2 = 2 \text{ mm}$, $R_3 = 6 \text{ mm}$, $R_4 = 10 \text{ mm}$, $H = 100 \text{ mm}$; $V_0 = 500 \text{ V}$.



Electricidad y Electrometría
Primer Examen Parcial. Segunda parte.

1º Electrónicos
31 de enero de 2003

3.- Los sensores de transferencia de carga son sensores capacitivos basados en el principio de la conservación de la carga eléctrica cuando ésta se redistribuye entre varios condensadores. En el circuito de las figuras se representa esquemáticamente uno de estos sensores, que se pretende usar para medir la distancia entre los dos electrodos del condensador X , d_x . La tensión de la fuente, V_t , es constante y conocida. La capacidad del condensador S , C_s , es constante y conocida. La diferencia de potencial en el condensador C_x , V_s , será la señal que nos permita conocer la distancia buscada. El proceso de medida es el siguiente:

- 1º.- inicialmente, los interruptores S_1 y S_3 se encuentran cerrados y el interruptor S_2 abierto, (figura 1)
- 2º.- se abren los interruptores S_1 y S_3 , (figura 2)
- 3º.- se cierra el interruptor S_2 y se mide V_s (figura 3)

Los dos condensadores son de placas planas paralelas.

- a) Calcular el valor de la distancia d_x en función de V_s y representarla gráficamente (1 pto.)
- b) Calcular el mínimo valor de la distancia d_x entre los electrodos del condensador X , para que el condensador S no se perfora. (1 pto.)
- c) Calcular la energía que se consume al pasar del estado de la figura 1 al estado de la figura 3, en función de la distancia d_x . (1 pto.)

Datos: $V_t = 30 \text{ V}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$

Condensador X : Superficie de los electrodos $A_x = 5 \text{ cm}^2$, $\epsilon_x = \epsilon_0$, $E_{\text{MAX}} = 3 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$

Condensador S : $C_s = 3 \cdot 10^{-12} \text{ F}$, distancia entre los electrodos $d_s = 0,2 \text{ mm}$, $\epsilon_s = 2,5 \epsilon_0$, $E_{\text{MAX}} = 145 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

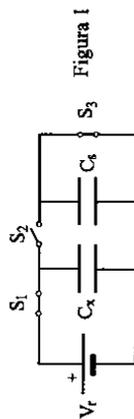


Figura 1

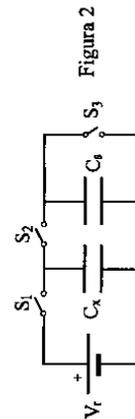


Figura 2

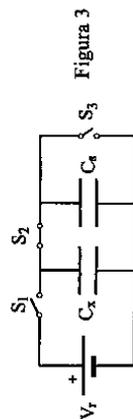
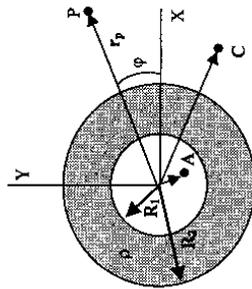


Figura 3

4.- Tenemos un objeto esférico hueco de radio interno R_1 y externo R_2 . Su interior está cargado uniformemente con densidad volumétrica de carga ρ .



- a) Calcular el potencial puntual V de puntos exteriores a la esfera ($R_2 < r < \infty$) respecto a la referencia P , indicando en que región del espacio es positivo y en cual negativo. (1 punto)
- b) Calcular $V_c - V_A$. (1 punto)

Datos:

$R_1 = 3 \text{ cm}$; $R_2 = 6 \text{ cm}$ $\rho = 0,316 \mu\text{C}/\text{m}^3$

Posición de los puntos:

$P \equiv (r_p = 10 \text{ cm}, \varphi = 30^\circ = \pi/6)$

$A \equiv (r_a = 1 \text{ cm}, \varphi = -60^\circ = -\pi/3)$

$C \equiv (r_c = 8 \text{ cm}, \varphi = -30^\circ = -\pi/6)$

Considerar vacío en todos los puntos del espacio.

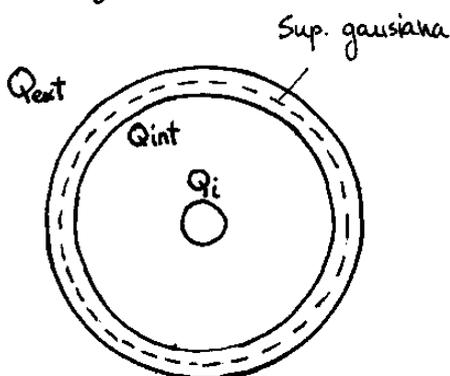
EJERCICIO 1 - GENERADOR DE VAN DER GRAAF

El generador de Van der Graaff es el método que actualmente proporciona un mayor potencial electrostático. En las siguientes referencias se puede encontrar información más detallada de su funcionamiento:

Bibliografía sobre el generador de Van de Graaff:

- Serway 25.8
- Tipler 20.6
- Resnick 30.11
- Franco García, Ángel; Curso de Física por Ordenador, EUITI Eibar
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo-electrico/van_der_graaf/van_der_graaf.htm

1.a) En el apartado a) nos dicen que la cúpula esférica está AISLADA y que su carga TOTAL es Q_c . Posteriormente, se introduce una carga Q_i en el interior. La carga Q_i modifica cómo se distribuye la carga total Q_c entre la superficie interior y exterior, (para lograr que en el conductor de la cúpula el campo eléctrico se siga cumpliendo $E_{conductor} = 0$).



Para resolver el problema, aplicamos Gauss a la superficie esférica marcada con trazo discontinuo

$$\oint_{\text{Esfera interior conductor}} \vec{D}_{int} \cdot \vec{n} \cdot dS = q_{real\ encerrada}$$

Dentro del conductor $E_{\text{conductor}} = 0 \Rightarrow D_{\text{conductor}} = 0$

$$\Rightarrow \oint_{\text{Interior conductor}} \vec{D}_{\text{cond}} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_{\text{Interior conductor}} \vec{0} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \Rightarrow \underline{q_{\text{real encerrada}} = 0}$$

La carga que hay dentro de la superficie punteada es

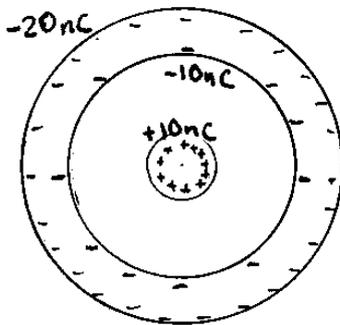
$$0 = q_{\text{real encerrada}} = Q_i + Q_{\text{int}} \quad (1)$$

Por otra parte, la carga total de la cúpula no varía pues está aislada $\Rightarrow Q_c = Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} \quad (2)$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. La solución es

$$(1) \Rightarrow \underline{Q_{\text{int}} = -Q_i = -10 \text{ nC}}$$

$$(2) \Rightarrow Q_c = Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} \Rightarrow -30 \text{ nC} = -10 \text{ nC} + Q_{\text{ext}} \\ \Rightarrow \underline{-20 \text{ nC} = Q_{\text{ext}}}$$

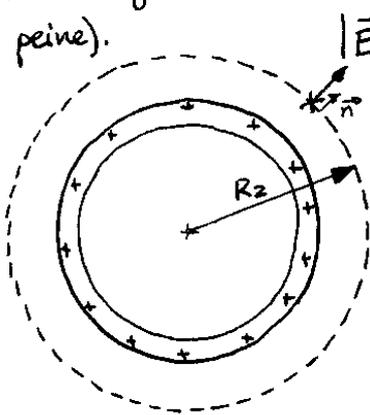


Observación: la cúpula es un conductor y en ausencia de cargas interiores, toda la carga tiende a colocarse en la superficie exterior. Pero al introducir la carga Q_i en su cavidad, la carga total de la cúpula se redistribuye para lograr que dentro del conductor $E_{\text{cond}} = 0$.

Por tanto se induce una carga del mismo valor y de signo contrario a Q_i en la superficie interior de la cúpula.

1.b) Cálculo del campo eléctrico a través de la ley de Gauss

(Ahora ya no tenemos carga en el interior, pues hemos colocado el peine).



$$|\vec{E}(r=R_2)| = E_2 = 1'2 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$$

Aplico la ley de Gauss a una superficie que pasa por el punto donde conozco E

$$\oint_{\text{Esfera } R_2} \vec{D}_{R_2} \cdot \vec{n} \cdot dS = q_{\text{real encerrada}} = Q'_c$$

$\vec{D}_{R_2} \parallel \vec{n}$, $|\vec{D}_{R_2}| = \text{cte}$ en la superficie gaussiana

$$\Rightarrow D_{R_2} \oint_{\text{Esfera } R_2} dS = D_{R_2} \cdot S_{\text{Esfera } R_2} = D_{R_2} \cdot 4\pi R_2^2 = Q'_c$$

$$\Rightarrow D(r=R_2) = \frac{Q'_c}{4\pi R_2^2} \quad \Rightarrow \quad E(r=R_2) = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_c}{R_2^2} = K \frac{Q'_c}{R_2^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q'_c} = \frac{E(r=R_2) \cdot R_2^2}{K} = \frac{1'2 \cdot 10^6 \frac{N}{C} \cdot (0'12 \text{ m})^2}{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}} = \underline{\underline{1'92 \cdot 10^{-6} C = 1'92 \mu C}}$$

Q'_c = nueva carga de la cúpula, que se distribuirá por la superficie exterior

1.c) Cálculo de la rigidez del aire cuando se observa experimentalmente que los fenómenos de ruptura comienzan cuando la cúpula adquiere un potencial (respecto ∞) V_{max} .

Aclaración: Al corregir los exámenes hemos detectado, con sorpresa, que alguno de vosotros habéis confundido la rigidez, (E_{max} = máximo campo que puede soportar un dieléctrico o aislante) con la permitividad (ϵ = propiedad del material que relaciona carga y campo eléctrico, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$). Este fallo se ha considerado un error grave.

$$V_{\max} = - \int_{\infty}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl \cdot \cos \pi = -E \cdot dl}}{=} + \int_{\infty}^{R_1} E \cdot dl \stackrel{dl = -dr}{=} - \int_{\infty}^{R_1} E \cdot dr = - \int_{\infty}^{R_1} K \frac{Q_c''}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow V_{\max} = -K Q_c'' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{R_1} = -K Q_c'' \left[+\frac{1}{R_1} - \frac{-1}{\infty} \right] = K \frac{Q_c''}{R_1}$$

$$\Rightarrow Q_c'' = \frac{V_{\max} R_1}{K} = \text{carga de la cúpula cuando se empiezan a observar fenómenos de ruptura}$$

Los fenómenos de ruptura aparecerán primero en aquellos puntos donde el campo eléctrico sea mayor. Es decir, en la superficie exterior de la esfera

$$E_{\text{rigidez}} = E_{\max} = E(r=R_1) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{ya calculado en el apdo b, por analogía}}}{=} K \frac{Q_c''}{R_1^2} = \frac{V_{\max}}{R_1} = \frac{216.000 \text{ V}}{0,08 \text{ m}}$$

$$\boxed{E_{\max} = 2,7 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 2,7 \frac{\text{MV}}{\text{m}}}$$

Nota: Dado que el problema presenta simetría esférica, algunos cálculos se pueden realizar, alternativamente, suponiendo la carga concentrada en el centro de la cúpula.

EJERCICIO 2 - CONDENSADOR CILÍNDRICO CON DOS DIELECTRÍCOS EN SERIE

2.a) Cálculo de \vec{E}

• Estudio de la geometría y simetría del problema:

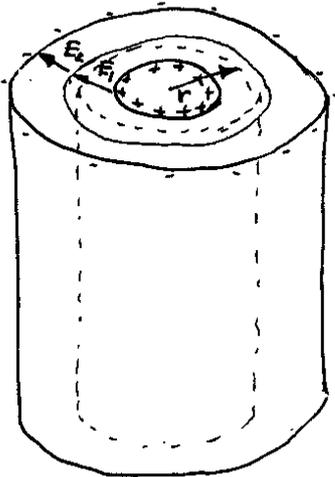
- Elección del sistema de coordenadas cilíndricas

- Por simetría, \vec{E} y \vec{D} son radiales y sólo dependen de la distancia al eje.

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1(r) = E_1(r) \cdot \vec{u}_r & R_1 < r < R_2 \\ \vec{E}_2(r) = E_2(r) \cdot \vec{u}_r & R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

- Superficie gaussiana elegida: un cilindro coaxial con el resto del problema. Por comodidad, lo tomo de longitud H .

- Aplico el enunciado de la ley de Gauss



$$\oint_{\text{cilindro gauss.}} \vec{D}(r) \cdot \vec{n} \cdot dS = q_{\text{real encerrada}}$$

Por las tapas $\vec{D} \perp \vec{n}$. Por tanto, sólo hay flujo en la superficie lateral del cilindro y en dicha superficie $|\vec{D}| = \text{cte}$ y $\vec{D} \parallel \vec{n}$

$$\Rightarrow D \int_{\text{sup. lateral cil}} dS = D \cdot 2\pi r H = \sigma_{\text{real}} \cdot 2\pi R_1 H$$

↑
sólo hay carga real en el cilindro conductor R

$$\Rightarrow \vec{D} = \sigma_{\text{real}} + \frac{R_1}{r} \vec{u}_r$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1(r) = \frac{\sigma_{\text{real}} + R_1}{\epsilon_1 r} \vec{u}_r & R_1 < r < R_2 \\ \vec{E}_2(r) = \frac{\sigma_{\text{real}} + R_1}{\epsilon_2 r} \vec{u}_r & R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

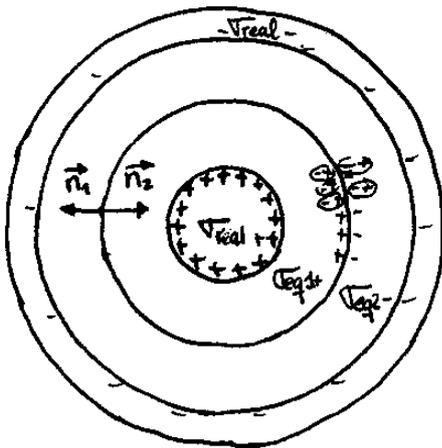
Cálculo de la ddp entre electrodos, V_0

$$\begin{aligned}
 V_0 &= V_{R_1} - V_{R_3} = - \int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \\
 &= + \int_{R_3}^{R_2} E_2 dl + \int_{R_2}^{R_1} E_1 dl \quad \begin{matrix} \uparrow \\ dl = -dr \end{matrix} = - \int_{R_3}^{R_2} E_2 dr - \int_{R_2}^{R_1} E_1 dr = \\
 &= - \int_{R_3}^{R_2} \frac{V_{real} + R_1}{\epsilon_2} \frac{dr}{r} - \int_{R_2}^{R_1} \frac{V_{real} + R_1}{\epsilon_1} \frac{dr}{r} = \frac{V_{real} + R_1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \\
 &+ \frac{V_{real} + R_1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \stackrel{\text{dato}}{=} 500 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores obtengo $V_{real} = 9'81 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

Cálculo de la carga equivalente en los dos dieléctricos en $r=R_2$

Para calcular la densidad de carga equivalente en la separación de los dieléctricos es necesario calcular la polarización en ambos medios, \vec{P}_1 y \vec{P}_2 y aplicar $\sigma_{equiv} = \vec{P} \cdot \vec{n}$



La carga equivalente en el dieléctrico 1 es positiva pues $\vec{P}_1 // \vec{n}_1$ (vector dirigido hacia afuera del dieléctrico 1).

La carga equivalente en R_2 en el dieléctrico 2 es negativa. Esto se puede deducir de que \vec{n}_2 es opuesto a \vec{P}_2 (\vec{n}_2 va hacia afuera de la superficie del dieléctrico 2 en $r=R_2$ y por tanto $\vec{n}_2 = -\vec{u}_r$ y es opuesto a \vec{P}_2).

La carga total de polarización será la suma (respetando el signo de las cargas) de las cargas en los dos dieléctricos,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \epsilon \vec{E} + \vec{P} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{D} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{D}$$

• Dielectrico 1

$$P_1 \Big|_{R_2} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \frac{V_{real} + R_1}{R_2} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{V_{real} + R_1}{R_2} = \frac{2}{3} \frac{V_{real} + R_1}{R_2}$$

$$\vec{P}_1 \Big|_{R_2} = 3'27 \cdot 10^{-6} \vec{u}_r \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\sigma_{eq\ 1} \Big|_{R_2} = \vec{P}_1 \Big|_{R_2} \cdot \vec{n}_1 = P_1 \cdot \cos 0 = P_1 = +3'27 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \quad \oplus$$

$\vec{P}_1 \parallel \vec{n}_1$

• Dielectrico 2

$$P_2 \Big|_{R_2} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right) \frac{V_{real} + R_1}{R_2} = \frac{4}{5} \frac{V_{real} + R_1}{R_2} = 3'927 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

$$\vec{P}_2 \Big|_{R_2} = 3'927 \cdot 10^{-6} \left[\frac{C}{m^2}\right] \cdot \vec{u}_r$$

$$\sigma_{eq\ 2} \Big|_{R_2} = \vec{P}_2 \Big|_{R_2} \cdot \vec{n}_2 = P_2 \cdot \cos \pi = -P_2 = -3'927 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \quad \ominus$$

\vec{P}_2 opuesto \vec{n}_2

• Total

$$\sigma_{eq\ total} \Big|_{R_2} = \sigma_{eq\ 1} \Big|_{R_2} + \sigma_{eq\ 2} \Big|_{R_2} = +3'27 \cdot 10^{-6} - 3'927 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_{eq\ total} \Big|_{R_2} = -0'65 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

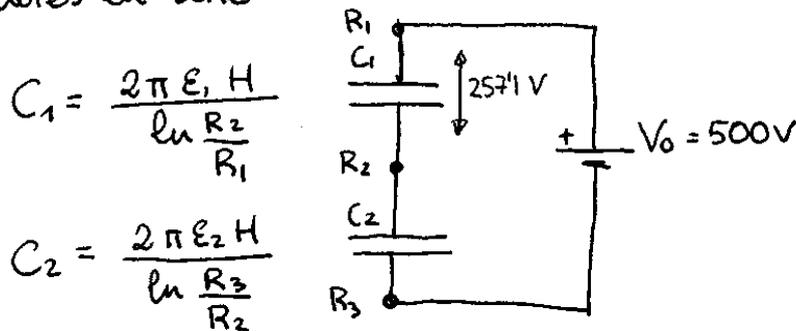
Ésta es la carga equivalente total que aparece en la superficie de separación de los dos dieléctricos debido a que poseen distintas permitividades dieléctricas.

2.b) Cálculo de la energía electrostática entre R_1 y R_2

$$\boxed{W_E = \int_{\text{Vol entre } R_1 \text{ y } R_2} \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\text{Vol}} \quad \frac{\vec{E}}{\vec{D}} = \frac{1}{\epsilon_0} \quad \left(\frac{V_{\text{real}} + R_1}{r} \right) \frac{V_{\text{real}} + R_1}{r \epsilon_0} \cdot \underbrace{2\pi r H \, dr}_{d\text{Vol en cilíndrica}} =$$

$$= \frac{(V_{\text{real}} + R_1)^2 H 2\pi}{3 \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \boxed{0'79 \cdot 10^{-6} \text{ J}}$$

Observación: el sistema se puede asimilar a dos condensadores en serie



$$C_1 = 24 \text{ pF} \quad C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 12'33 \text{ pF}$$

Por tanto, este apartado se puede resolver aplicando C

$$W_1 = \frac{1}{2} Q V_1 = \frac{1}{2} C_1 \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10^{-3} \text{ F} \cdot (257'1 \text{ V})^2 = 0'79 \mu$$

No obstante, esta resolución es más larga y no tiene una interpretación física tan directa como la primera.

Con este método no se puede resolver el primer apartado.

El generador de Van de Graaff



Electromagnetismo

Campo eléctrico

[La ley de Coulomb](#)

[El motor de Franklin](#)

[Campo y potencial de una carga puntual](#)

[Campo y potencial de dos cargas](#)

[Dipolo eléctrico](#)

[Línea de cargas.](#)
[Ley de Gauss.](#)

[Modelo atómico de Kelvin-Thomson](#)

[La cubeta de Faraday.](#)
[Conductores](#)

► [Generador de Van de Graaff](#)

[Conductores \(II\)](#)

[Carga inducida en un conductor](#)

[Esfera conductora en un campo uniforme](#)

[Un péndulo que descarga un condensador.](#)

[Condensador plano-paralelo](#)

[Modelo eléctrico de un ciclo de Carnot](#)

[Condensador cilíndrico](#)

[Condensador con un dieléctrico.](#)

[Fuerza sobre un dieléctrico](#)

[Carga y descarga de un condensador](#)

[Medida de la velocidad de una bala](#)

[Agrupación de condensadores](#)

[El generador de Van de Graaff](#)

[Campo producido por un conductor esférico cargado.](#)

[Potencial de la esfera conductora](#)

[Potencia del motor que mueve la correa](#)

[Fuerza electromotriz](#)

📄 [Actividades](#)

Cuando se introduce un conductor cargado dentro de otro hueco y se ponen en contacto, toda la carga del primero pasa al segundo, cualquiera que sea la carga inicial del conductor hueco

Teóricamente, el proceso se podría repetir muchas, aumentando la carga del conductor hueco indefinidamente. De hecho, existe un límite debido a las dificultades de aislamiento de la carga. Cuando se eleva el potencial, el aire que le rodea se hace conductor y se empieza a perder carga.

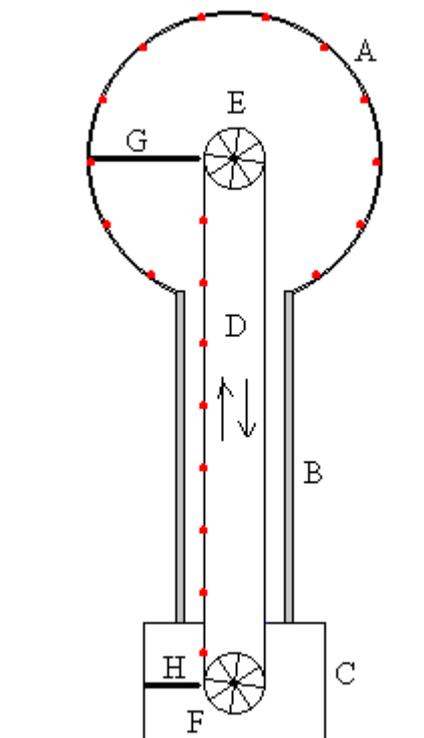
La diferencia entre la [cubeta de Faraday](#) y el generador de Van de Graaff, es que en la primera la carga se introduce de forma discreta mientras que en el segundo, se introduce en el conductor hueco de forma continua mediante una correa transportadora.

El generador de Van de Graaff

Van de Graaff inventó el generador que lleva su nombre en 1931, con el propósito de producir una diferencia de potencial muy alta (del orden de 20 millones de volts) para [acelerar partículas cargadas](#) que se hacían chocar contra blancos fijos. Los resultados de las colisiones nos informan de las características de los núcleos del material que constituye el blanco.

El generador del Van de Graaff es un generador de corriente constante, mientras que la batería es un generador de voltaje constante, lo que cambia es la intensidad dependiendo de los aparatos que se conectan.

El generador de Van de Graaff es muy simple, consta de un motor, dos poleas, una correa o cinta, dos peines o terminales hechos de finos hilos de cobre y una esfera hueca donde se acumula la carga transportada por la cinta.



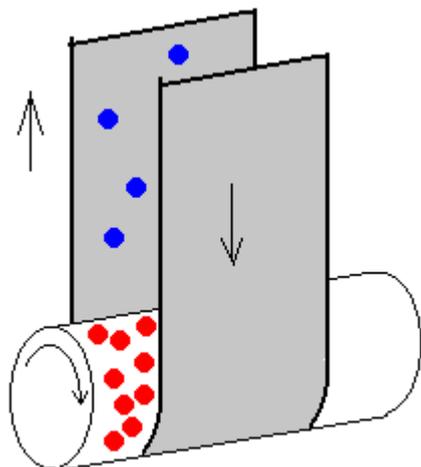
En la figura, se muestra un esquema del generador de Van de Graaff. Un conductor metálico hueco A de forma aproximadamente esférica, está sostenido por soportes aislantes de plástico, atornillados en un pie metálico C conectado a tierra. Una correa o cinta de goma (no conductora) D se mueve entre dos poleas E y F. La polea F se acciona mediante un motor eléctrico.

Dos peines G y H están hechos de hilos conductores muy finos, están situados a la altura del eje de las poleas. Las puntas de los peines están muy próximas pero no tocan a la correa.

La rama izquierda de la correa transportadora se mueve hacia arriba, transporta un flujo continuo de carga positiva hacia el conductor hueco A. Al llegar a G y debido a la propiedad de las puntas se crea un campo lo suficientemente intenso para ionizar el aire situado entre la punta G y la correa. El aire ionizado proporciona el medio para que la carga pase de la correa a la punta G y a continuación al conductor hueco A, debido a la propiedad de las cargas que se introducen en el interior de un conductor hueco (cubeta de Faraday).

Funcionamiento del generador de Van de Graaff

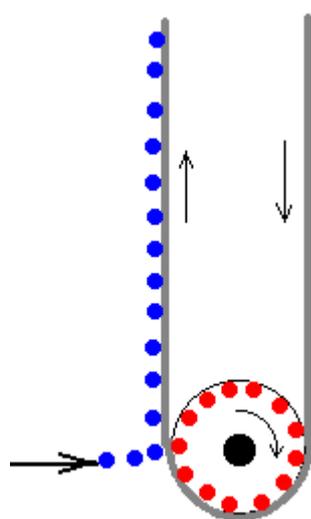
Hemos estudiado en otra página como se produce la [electricidad estática](#), cuando se ponen en contacto dos materiales no conductores. Ahora explicaremos como adquiere la correa la carga que transporta hasta el terminal esférico.



En primer lugar, se electrifica la superficie de la polea inferior F debido a que la superficie de la polea y la correa están hechos de materiales diferentes. La correa y la superficie del rodillo adquieren cargas iguales y de signo contrario.

Sin embargo, la densidad de carga es mucho mayor en la superficie de la polea que en la correa, ya que las cargas se extienden por una superficie mucho mayor.

Supongamos que hemos elegido los materiales de la correa y de la superficie del rodillo de modo que la correa adquiera una carga negativa y la superficie de la polea una carga positiva, tal como se ve en la figura.



Si una aguja metálica se coloca cerca de la superficie de la correa, a la altura de su eje. Se produce un intenso campo eléctrico entre la punta de la aguja y la superficie de la polea. Las moléculas de aire en el espacio entre ambos elementos se ionizan, creando un puente conductor por el que circulan las cargas desde la punta metálica.

Las cargas negativas son atraídas hacia la superficie de la polea, pero en medio del camino se encuentra la correa, y se depositan en su superficie, cancelando parcialmente la carga positiva de la polea. Pero la correa se mueve hacia arriba, y el proceso comienza de nuevo.

La polea superior E actúa en sentido contrario a la inferior F. No puede estar cargada positivamente. Tendrá que tener una carga negativa o ser neutra (una polea cuya superficie es metálica).

Existe la posibilidad de cambiar la polaridad de las cargas que transporta la correa cambiando los materiales de la polea inferior y de la correa. Si la correa está hecha de goma, y la polea inferior está hecha de nylon cubierto con una capa de plástico, en la polea se crea una carga negativa y en la goma positiva. La correa transporta hacia arriba la carga positiva. Esta carga como ya se ha explicado, pasa a la superficie del conductor hueco.

Si se usa un material neutro en la polea superior E la goma no transporta cargas hacia abajo. Si se usa nylon en la polea superior la correa transporta carga negativa hacia abajo, esta carga viene del conductor hueco. De este modo, la correa carga positivamente el conductor hueco tanto en su movimiento ascendente como descendente.

Las características del generador de Van de Graaff que disponemos en el laboratorio de Física de la E.U.I.T.I. de Eibar, son las siguientes:

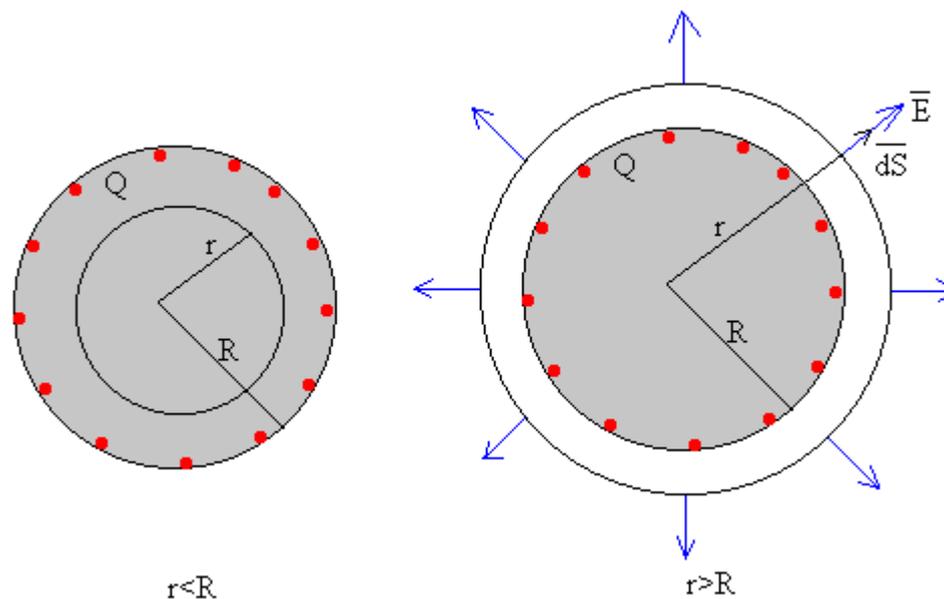
- Diámetro 21 cm
- Capacidad 15 pF
- Tensión máxima 150-200 kV
- Máxima corriente 6 μ A

Campo producido por un conductor esférico de cargado.

El [teorema de Gauss](#) afirma que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga en el interior de dicha superficie dividido entre ϵ_0 .

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Consideremos una esfera hueca de radio R cargada con una carga Q . La aplicación del teorema de Gauss requiere los siguientes pasos:



1.-A partir de la simetría de la distribución de carga, determinar la dirección del campo eléctrico.

La distribución de carga tiene simetría esférica luego, la dirección del campo es radial

2.-Elegir una superficie cerrada apropiada para calcular el flujo

Tomamos como superficie cerrada, una esfera de radio r .

El campo \mathbf{E} es paralelo al vector superficie $d\mathbf{S}$, y el campo es constante en todos los puntos de la superficie esférica por lo que,

$$\int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_s E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E \int_s dS = E \cdot 4\pi r^2$$

El flujo total es por tanto; $E \cdot 4\pi r^2$

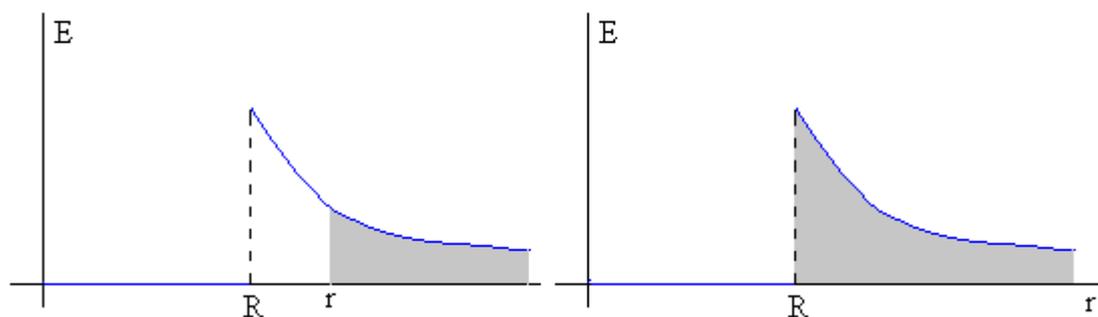
3. Determinar la carga que hay en el interior de la superficie cerrada

- Para $r < R$. No hay carga en el interior de la esfera de radio $r < R$, $q=0$
- Para $r > R$. Si estamos calculando el campo en el exterior de la esfera cargada, la carga en el interior de la superficie esférica de radio r es la carga total $q=Q$.

4.-Aplicar el teorema de Gauss y despejar el módulo del campo eléctrico

$$E = 0 \text{ (para } r < R) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ (para } r > R)$$

En la figura, tenemos la representación del módulo del campo eléctrico en función de la distancia radial r .



El campo en el exterior de la esfera conductora cargada con carga Q , tiene la misma expresión que el campo producido por una carga puntual Q situada en su centro.

Potencial de la esfera conductora

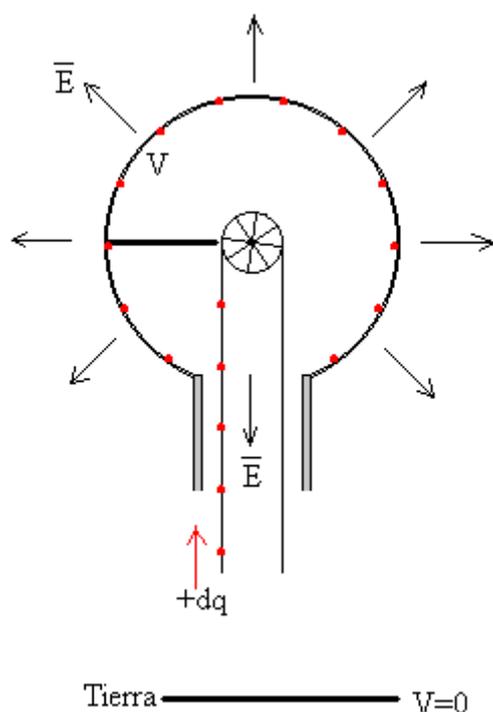
Se denomina potencial a la diferencia de potencial entre un punto P a una distancia r del centro de la esfera y el infinito.

Como el campo en el interior de la esfera conductora es cero, el potencial es constante en todos sus puntos. Para hallar el potencial en la superficie de la esfera basta hallar el área sombreada (figura de la derecha)

$$V = \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Se denomina [capacidad](#) de la esfera (más adelante definiremos con mayor precisión esta magnitud) al cociente entre la carga y su potencial, $C=Q/V=4\pi\epsilon_0 R$.

Potencia del motor que mueve la correa



Supóngase que la diferencia de potencial entre el conductor hueco del generador de Van de Graaff y el punto sobre el cual se esparcen las cargas sobre la correa es V . Si la correa proporciona carga positiva a la esfera a razón de i amperes. Determinar la potencia necesaria para mover la polea en contra de las fuerzas eléctrica.

El [trabajo que hay que realizar](#) para que una carga dq positiva pase de un lugar en el que el potencial es cero a otro en el que el potencial V es

$$dW = Vdq$$

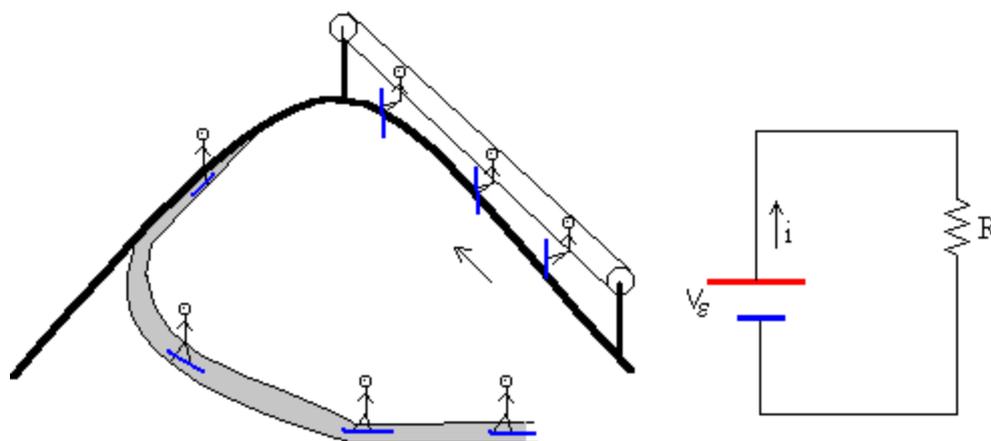
La potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt} = Vi$$

Para el generador de Van de Graaff de nuestro laboratorio que transporta en la correa una carga máxima $6 \mu\text{C}$ en cada segundo, desde un potencial 0 a un potencial máximo de 200 kV, la potencia será $P=200 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 1.2$ watt.

Fuerza electromotriz

El agua que abastece una ciudad baja espontáneamente desde un depósito situado en la cima de una colina. Ahora bien, para mantener el nivel del depósito, es necesario ir llenándolo a medida que el agua se consume. Un motor conectado a una bomba puede elevar el agua desde un río cercano hasta el depósito.



En una pista de esquí, existen instalaciones que suben a los esquiadores por los remontes mecánicos hasta el alto de una colina, luego, los esquiadores bajan pendiente abajo. Los esquiadores son equivalentes a los portadores de carga, el remonte mecánico incrementa la energía potencial del esquiador. Luego, el esquiador baja deslizándose por la colina hasta la base del remonte.

En un conductor los portadores de carga (positivos) se mueven espontáneamente desde un lugar en el que el potencial es más alto hacia otro lugar en el que el potencial es más bajo, es decir, en la dirección del campo eléctrico. Para mantener el estado estacionario es necesario proveer de un mecanismo que transporte los portadores de carga desde un potencial más bajo hasta un potencial más elevado.

El generador de Van de Graaff es un ejemplo de este mecanismo. Las cargas positivas se mueven en dirección contraria al campo eléctrico, en el que el potencial aumenta, y las negativas en la misma dirección que el campo, en el que el potencial disminuye. La fuerza o la energía necesaria para este transporte de cargas lo realiza el motor que "bombea" las cargas.

Se denomina fuerza electromotriz o fem V_e al trabajo por unidad de carga que realiza el dispositivo. Aunque la unidad de la fem es la misma que la de una diferencia de potencial, se trata de conceptos completamente diferentes. Una fem produce una diferencia de potencial pero surge de fenómenos físicos cuya naturaleza no es necesariamente eléctrica (en el generador de Van de Graaff es mecánica, en una pila es de naturaleza química, magnética, etc.).

Una fem es un trabajo por unidad de carga, este trabajo no lo realiza necesariamente una fuerza conservativa, mientras que la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga realizado por una fuerza eléctrica que es conservativa.

Actividades

En el applet se simula el generador de Van de Graaff, con la descripción dada en la sección anterior. En el generador real la cinta transporta carga de forma continua. En la simulación, se transporta de forma discreta, sobre la cinta aparecen puntos rojos igualmente espaciados, cada uno de ellos representa una unidad de carga positiva cuyo valor genera el programa interactivo de forma aleatoria.

Al igual que en un generador real, el simulado pone un límite al campo máximo en la superficie de la esfera a partir del cual, el aire se ioniza y el generador no puede incrementar más la carga. Podemos aproximar el conductor hueco a una esfera conductora de radio R . Conociendo la carga acumulada Q se calcula el potencial de la esfera V . El campo producido por un esfera conductora de radio R en su superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

El generador deja de acumular carga cuando el aire se vuelve conductor. La intensidad del campo eléctrico límite es de aproximadamente $3.0 \cdot 10^6$ V/m. Para una esfera de radio R podemos calcular la carga máxima que puede acumular y el máximo potencial que adquiere la esfera cargada.

Se introduce

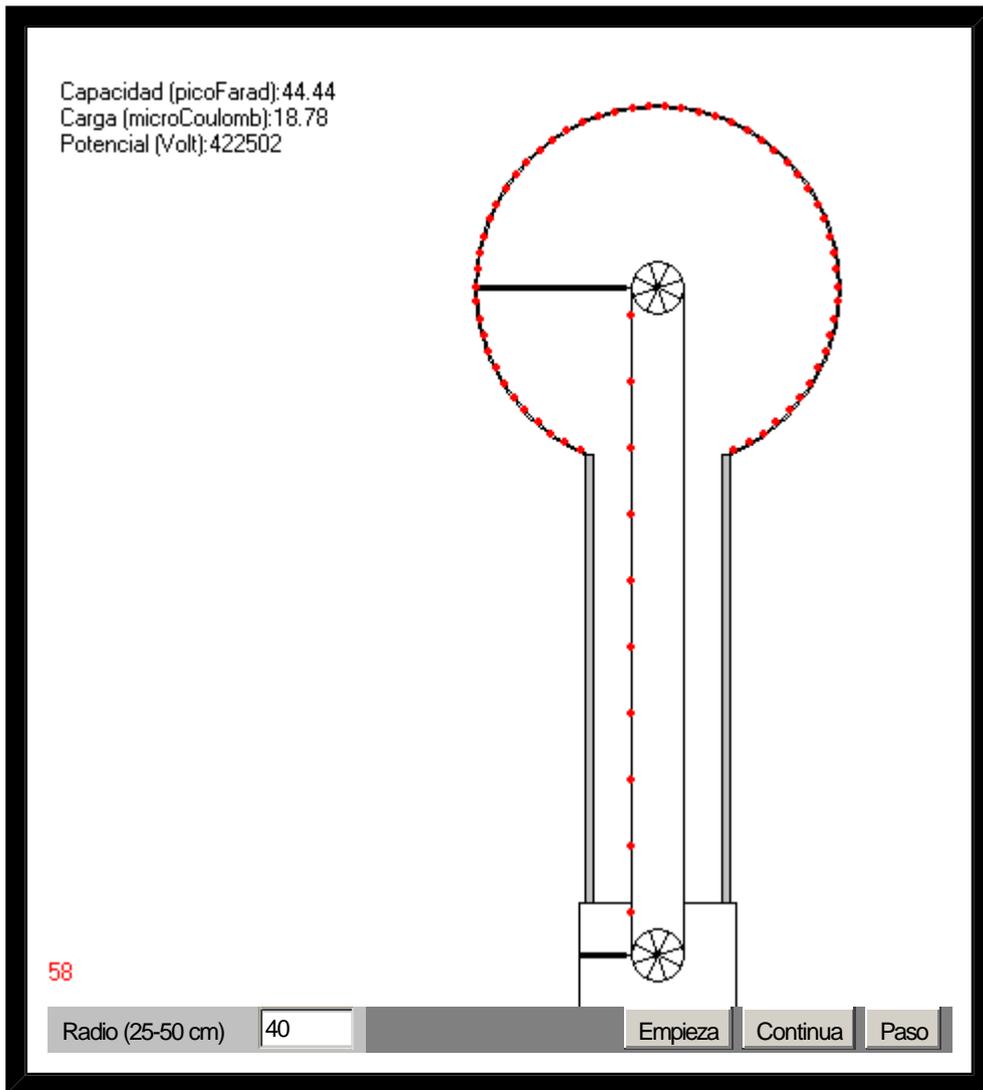
- el radio de la esfera en cm, en el control de edición titulado **Radio**, .

Se pulsa en el botón titulado **Empieza**.

Supongamos una esfera de 40 cm de radio. Comprobar que

- La capacidad de la esfera $C=4\pi\epsilon_0 R$ es 44.4 pF

- La carga máxima que puede acumular es $Q=53.3 \mu\text{C}$ hasta que se produce la ruptura dieléctrica (el campo eléctrico límite es de $3.0 \cdot 10^6 \text{ V/m}$)
- El máximo potencial V es de 1.2 millones de volts.



PROBLEMA 3

a) ESTADO I

$$^I U_x = V_n$$

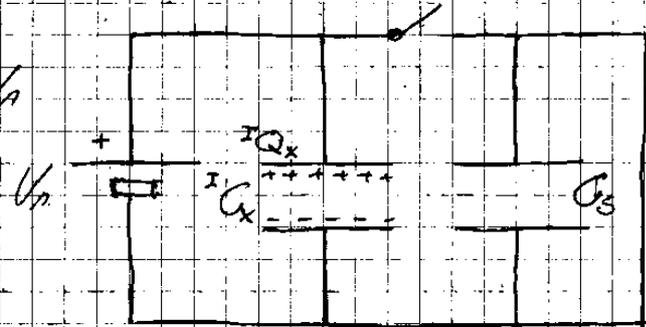
$$^I Q_x = ^I C_x \cdot ^I U_x = ^I C_x \cdot V_n$$

$$^I U_s = 0V$$

$$^I Q_s = 0C$$

$$^I Q_{TOTAL} = ^I Q_x + ^I Q_s$$

$$^I C_x = \epsilon_x \frac{A_x}{d_x} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{5 \cdot 10^{-4}}{d_x} [F]$$



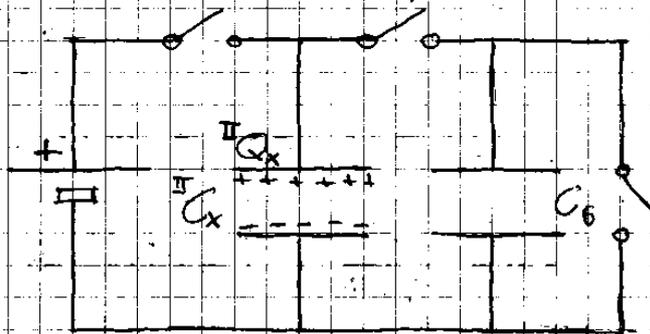
ESTADO II

$$^{II} U_x = ^I U_x = V_n$$

$$^{II} Q_x = ^I Q_x = ^I C_x \cdot V_n$$

$$^{II} U_s = ^I U_s = 0V$$

$$^{II} Q_s = ^I Q_s = 0C$$

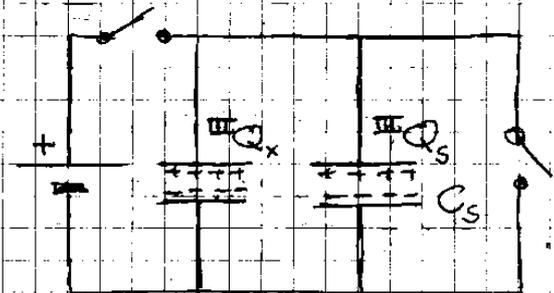


ESTADO III

$$^{III} U_x = ^{III} U_s \neq ^I U_x$$

$$^{III} Q_x = ^I C_x \cdot ^{III} U_x \neq ^I Q_x$$

$$^{III} Q_s = C_s \cdot ^{III} U_s \neq 0C$$



En el estado III los dos condensadores quedan conectados en paralelo y AISLADOS. La carga total en los dos condensadores será la que inicialmente tenía el condensador X. La diferencia de potencial en ambos condensadores será la misma, al quedar conectados en PARALELO. La carga final en cada condensador dependerá de la CAPACIDAD de los condensadores.

$$\text{III } Q_{\text{TOTAL}} = \text{III } Q_X + \text{III } Q_S = \text{II } Q_X = \text{I } Q_X = \text{I } C_X \cdot U_0$$

$$\text{I } C_X \cdot \text{III } U_X + C_S \cdot \text{III } U_S = \text{III } U_S (\text{I } C_X + C_S) = \text{I } C_X \cdot U_0$$

III U_S es la señal eléctrica que nos permite conocer la distancia $\text{I } dx$.

$$\text{III } U_S = \frac{\text{I } C_X}{\text{I } C_X + C_S} \cdot U_0 = \frac{\epsilon_0 \frac{A_X}{\text{I } dx} \cdot U_0}{\epsilon_0 \frac{A_X}{\text{I } dx} + C_S} = \frac{\epsilon_0 \cdot A_X \cdot U_0}{\epsilon_0 \cdot A_X + \text{I } dx \cdot C_S}$$

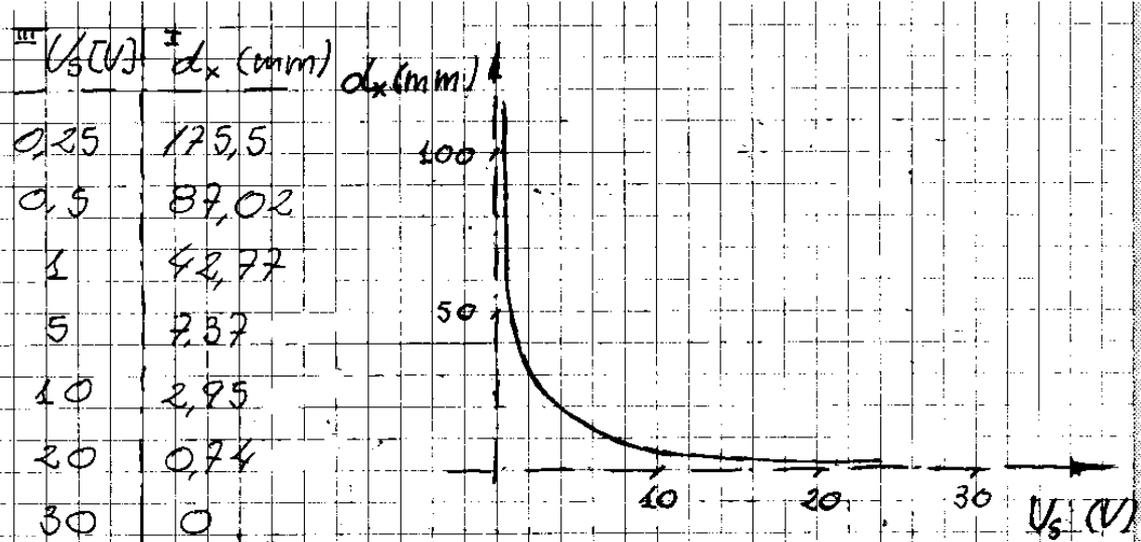
$$\epsilon_0 \cdot A_X \cdot \text{III } U_S + \text{I } dx \cdot C_S \cdot \text{III } U_S = \epsilon_0 \cdot A_X \cdot U_0$$

$$\text{I } dx = \frac{1}{C_S \cdot \text{III } U_S} \left\{ \epsilon_0 \cdot A_X \cdot U_0 - \epsilon_0 \cdot A_X \cdot \text{III } U_S \right\}$$

$$\boxed{\text{I } dx = \frac{\epsilon_0 \cdot A_X \cdot U_0}{C_S} \cdot \frac{1}{\text{III } U_S} - \frac{\epsilon_0 \cdot A_X}{C_S}}$$

Sustituyendo valores.

$$\text{I } dx = \frac{44,25 \cdot 10^{-3}}{\text{III } U_S} - 1,425 \cdot 10^{-3} \text{ [cm]}$$



b) $U_{s \text{ MAX}} = E_{\text{MAX}/\text{COND.5}} \cdot d_s = 145 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 29 \text{ V}$

$$d_{x \text{ min}} = \frac{44,25 \cdot 10^{-3}}{U_{s \text{ MAX}}} - 1,475 \cdot 10^{-3} = \frac{44,25 \cdot 10^{-3}}{29} - 1,475 \cdot 10^{-3} = 0,051 \text{ mm}$$

c) Energía consumida $\Delta W_E = W_E - W_E$

$$W_E = \frac{1}{2} C_x \cdot U_p^2$$

$$W_E = \frac{1}{2} (C_x + C_s) \cdot U_s^2 = \frac{1}{2} (C_x + C_s) \left\{ \frac{C_x}{C_x + C_s} U_p \right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{C_x^2}{C_x + C_s} U_p^2$$

$$\Delta W_E = \frac{1}{2} C_x U_p^2 \left\{ \frac{C_x}{C_x + C_s} - 1 \right\} = \frac{1}{2} C_x U_p^2 \left\{ \frac{-C_s}{C_x + C_s} \right\}$$

$$\Delta W_E = -\frac{1}{2} V_n^2 \left\{ \frac{I C_x \cdot C_s}{I C_x + C_s} \right\} = -\frac{1}{2} V_n^2 \left\{ \frac{C_s}{1 + \frac{C_s}{I C_x}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} V_n^2 C_s \left\{ \frac{1}{1 + C_s \frac{I d_x}{\epsilon_0 A_x}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} 30^2 \cdot 3 \cdot 10^{-12} \left\{ \frac{1}{1 + 3 \cdot 10^{-12} \frac{I d_x}{\epsilon_0 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}} \right\} =$$

$$\Delta W_E = -1,35 \cdot 10^{-9} \left\{ \frac{1}{1 + 677,97 \cdot I d_x} \right\} \text{ [J]}$$

$\Delta W_E < 0 \rightarrow$ la energía del ESTADO III es menor que la energía del ESTADO I. El proceso de medida consume energía.

Sensórica

10

A fondo

Sensores de transferencia de carga

Los sensores de transferencia de carga son sensores capacitivos basados en el principio de la conservación de la carga eléctrica cuando ésta se redistribuye entre varios condensadores. En el circuito de la figura se cierran momentáneamente los interruptores S1 y S3 para que el condensador C_x , que es el que se desea medir, se cargue a la tensión V_r y C_s se descargue. Si a continuación se cierra brevemente el interruptor S2 y se abren S1 y S3, la carga eléctrica Q_r que se había almacenado en C_x ($Q_r = C_x V_r$), se redistribuye entre C_x y C_s ($Q_r = Q_x + Q_s$), de manera que:

$$C_x V_r = C_x V_s + C_s V_s$$

y de aquí:

$$V_s = V_r \frac{C_x}{C_x + C_s} \approx V_r \frac{C_x}{C_s}$$

donde la aproximación es válida cuando C_s es mucho mayor que C_x . Si se conocen C_s y V_r , midiendo V_s se puede determinar el valor de la capacidad desconocida C_x mediante:

$$C_x \approx C_s \frac{V_s}{V_r}$$

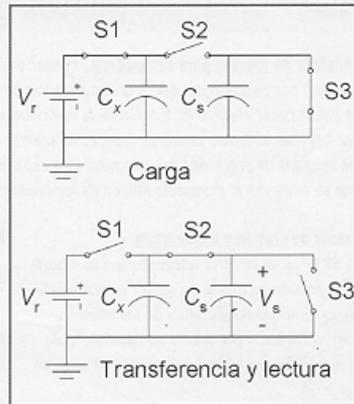
Una ventaja de este método es su alta resolución: conectando brevemente en paralelo con C_x un condensador cargado a una tensión negativa predeterminada, se pueden detectar, por ejemplo, cambios de 0,01 pF en condensadores de 1 nF. Además, si S3 se mantiene abierto, al repetir sucesivamente el proceso de cierre instantáneo (y alternativo) de S1 y S2, la tensión V_s es proporcional al valor medio de C_x , cancelándose así posibles fluctuaciones erráticas de su valor. Dado que el único elemento activo que hay entre el sensor (C_x) y C_s es un interruptor MOSFET (S1), el ruido electrónico es muy bajo. Por otra parte, el sensor es inmune a las interferencias porque el tiempo de cierre de los interruptores es breve, y los campos eléctricos externos sólo afectarán durante dichos instantes. Por contra, en un sensor capacitivo convencional donde la impedancia se mide continuamente, por ejemplo mediante excitación senoidal, los campos eléctricos externos afectan también continuamente. Por esta misma razón, no hay interferencias

entre sensores de transferencia de carga próximos, salvo que funcionen sincrónicamente.

La capacidad C_x puede venir determinada por cualquier objeto conductor que no esté conectado a tierra (y que actúa como el electrodo superior de C_x en la figura) y tierra (que es el electrodo inferior de C_x).

Los objetos no conductores pueden recubrirse con una superficie conductora (pintura, adhesivo) o se puede incrustar en ellos un hilo conductor, para convertirlos así en electrodos virtuales. Un cambio de distancia entre dichos objetos y tierra, o la presencia de cualquier objeto adicional (conductor o aislante), alterará la distribución de las líneas de campo eléctrico entre el electrodo y tierra, y en consecuencia C_x cambiará. La humedad, que es un problema en muchos sensores capacitivos porque hace parcialmente conductores a los materiales dieléctricos, puede obviarse cerrando los interruptores durante tiempos muy breves (100 ns).

Dado que prácticamente cualquier objeto conductor puede actuar como un electrodo, y los objetos no conductores pueden convertirse en electrodos virtuales, las aplicaciones de estos sensores son numerosas. Así, por ejemplo, algunos "electrodos" empleados son: grifos, archivadores, vehículos, lámparas, aviones, pomos de puertas y el propio cuerpo humano. De esta forma, simplemente acercando la mano se puede activar un grifo que tenga una electroválvula, o encender una lámpara. Como sensores de proximidad, los sensores de transferencia de carga se han empleado para evitar colisiones de brazos de robots. Algunos ejemplos de electrodos virtuales son: suelos cerámicos o de madera, superficies de mesas, sillas de madera, estatuas de piedra, lámparas de cerámica y paredes. La proximidad del cuerpo humano a alguno de estos objetos puede iniciar entonces una acción predeterminada.



Webgrafía

Advanstar Communications publica mensualmente desde 1984 la revista Sensors Magazine. Paralelamente a esta publicación ha creado la página de internet Sensors online (www.sensorsmag.com), que es un reflejo digital de la revista, complementado con las novedades y las noticias de empresas del mundo de los sensores. A partir de su página principal, en cuya zona central destacan los contenidos publicados en el último número de la revista, es muy fácil acceder a las diferentes secciones. Muchas de estas podrían ser consideradas nuevas páginas web por la amplia información que ofrecen y constituyen nuevas revistas electrónicas. A pesar de este gran volumen de datos, la navegación por toda la web es muy cómoda gracias a la simplificación que ofrecen los buscadores disponibles en cada sección.

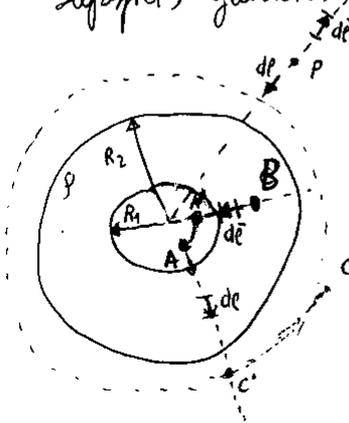
www.sensorsmag.com

Entre los enlaces que ofrece cabe destacar:

- **Articles Index:** Incluye los contenidos de todos los números publicados de la revista. De los años 1984 a 1995 sólo está el índice de los contenidos, pero a partir del año 1996 aparecen enlaces a los textos de los artículos.
- **Sensors Express:** En esta página, que ha estrenado recientemente un buscador más potente, es posible encontrar información sobre los productos y la tecnología para desarrollar nuevas aplicaciones. La suscripción es gratuita y permite recibir, a través del correo electrónico, información semanal sobre nuevos productos del mercado.
- **Industry news:** Actualizada semanalmente, recoge toda la información sobre nuevos servicios, desarro-

- llos, premios y ayudas a las empresas, así como reportajes sobre la evolución del mercado de los sensores.
- **SpecSearch:** Es un cómodo buscador de sensores a partir de sus especificaciones. Para recibir la información hay que suscribirse, gratuitamente.
- **Events Calendar:** Recoge todos los seminarios, conferencias o ferias relacionadas con los sensores y los sistemas de adquisición. El grupo editorial organiza dos reuniones anuales que se celebran en Estados Unidos y cuya información se recoge en Sensor Expo.
- **Sensor Business Digest:** Es un extracto de la revista del mismo nombre, publicada mensualmente por Vital Information Publication, y que recoge información sobre la industria de los sensores y en concreto sobre la evolución de los mercados, productos y aplicaciones.

4. a) Para calcular la diferencia de potencial que nos piden (11) primero hemos de calcular el campo \vec{E} . En este apartado sólo nos preguntan por puntos exteriores, pero en el siguiente también hay puntos internos, así que ahora calculemos el campo \vec{E} en todos los puntos. Para ello usaremos Gauss. Dada la simetría esférica elegiremos como superficies gaussianas, esferas concéntricas a la distribución.



$$\oint_{\text{sup. esfera } (S)} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_S D ds = D \iint_S ds = D 4\pi r^2$$

$D = D$ porque los puntos de la esfera equidistan del centro

carga real encerrada por la superficie de Gauss. Aquí hay que distinguir varias regiones:

$$r > R_2 \quad Q_{enc} = \iiint_Z \rho d\tau = \rho \tau$$

$\rho = \rho$
(dato del enunciado)

donde τ es el volumen del obj cargado encerrado por la superficie. En este caso al tomar una sup gaussiana de $r > R_2$ encerramos todo el objeto.

De la observación de la geometría del problema es fácil deducir que el volumen del obj es el de una esfera de radio R_2 menos el de otra esf de radio R_1

$$\Rightarrow \tau = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) = 7,91 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\text{Luego } Q_{enc} = \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) = Q \equiv \text{Carga total del obj} = 0,25 \text{ nC}$$

análogamente:

$$R_1 < r < R_2 \quad Q_{enc} = \iiint_{Z'} \rho d\tau = \rho \tau' = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$$

Z' (volumen del obj encerrado por la sup de Gauss)

y para $r < R_1 \quad Q_{enc} = 0$

así:

$$r < R_1 \quad Q_1 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \bar{D}_1 = 0 \Rightarrow \bar{E}_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \quad Q_2 4\pi r^2 = \frac{9}{3} 4\pi (r^3 - R_1^3) \Rightarrow \bar{D}_2 = \frac{9}{3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \hat{u}_r \Rightarrow \bar{E}_2 = \frac{9}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \hat{u}_r$$

$$R_2 < r < \infty \quad Q_3 4\pi r^2 = Q \Rightarrow \bar{D}_3 = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r \Rightarrow \bar{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r$$

Cuando calculo la $d\bar{p}$ respecto al punto p . tengo que distinguir puntos con distancia $r > r_p$ y puntos con $r < r_p$ en cuanto al sentido que toma $d\bar{p}$ (véase figura) $d\bar{p} = dr$ (porque r crece de p al infinito)

$$\text{Así, para } r > r_p. \quad V = - \int_{r_p}^r \bar{E}_3 \cdot d\bar{p} = - \int_{r_p}^r E_3 dr = - \int_{r_p}^r E_3 dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_p}^r \frac{1}{r^2} dr =$$

$\left(\int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r} \right)$ $\bar{E} \parallel d\bar{p}$ $(\bar{E} \cdot d\bar{p} = E dr)$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_p}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right) < 0 \quad (\text{porque } r > r_p)$$

$$\text{Para } r < r_p \quad V = - \int_{r_p}^r \bar{E}_3 \cdot d\bar{p} = \int_{r_p}^r E_3 d\bar{p} = - \int_{r_p}^r E_3 dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_p}^r \frac{1}{r^2} dr =$$

$d\bar{p} = -dr$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right) > 0 \quad \text{ahora es positivo porque } r < r_p$$

b) Es claro, por la simetría esférica del problema que para calcular las diferencias de potencial pedidas solo influye la distancia al centro y no el ángulo que forman los vectores posición respecto al eje x

Así que $V_C - V_A$ puede calcularse siguiendo la trayectoria radial diligada

$$V_C - V_A = - \int_A^C \bar{E} \cdot d\bar{p} = - \int_A^C \bar{E} \cdot d\bar{p} = - \int_A^C E dr = - \int_{R_2}^{R_1} E_1 dr - \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr - \int_{R_2}^{R_C} E_3 dr =$$

$(\text{en todas las regiones})$

$$= 0 - \frac{9}{3\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_C} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{9}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{R_2}^{R_C} = - \frac{9}{6\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) +$$

$$+ \frac{9}{3\epsilon_0} R_1^3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_C} \right) = -16,1V + 5,4V - 9,4V = -20,1V$$