Problemas de
FÍSICA
y cómo resolverlos

RACSO
EDITORES

Edición 2009

Dirigido por:

DR. FÉLIX AUCALLANCHI VELÁSQUEZ

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú

PROLOGO DEL AUTOR

Al iniciar estas líneas me desprendo de todo pensamiento vano, y sólo expreso mi profunda alegría por la satisfacción de ver culminado un trabajo que ha tomado poco más de 6 años, el que en su inicio se presentara dividido en fascículos, y bajo el título de ***Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería,*** *cuya primera edición se publicó vía Editorial Pirámide en 1986. Recuerdo entonces con nostalgia que sólo fueron tres los fascículos cuyos temas abarcaron hasta Gravitación Universal, y nunca antes al presente trabajo logré completar el curso en esa modalidad. De no haber sido por la gentil insistencia de muchí-simos colegas y estudiantes, no hubiera podido terminar de escribirlos. Sin embargo, debo reconocer que es después de haber viajado fuera del Perú que recién sentí la obligación moral de publicarlo, al ver, comprobar y reconocer que referencialmente el curso de Física en nuestro país se encuentra distante del que se desarrolla en otras latitudes. En el Perú, nuestro curso está bastante abandonado, realidad que he comprobado en el sinnúmero de visitas que vengo realizando desde hace cuatro años a los diferentes centros de enseñanza escolar, pre-universitaria, tecnológica, pedagógica y universitaria de nuestra capital, y sobre todo del interior del país. Con estas palabras anhelo despertar un vivo interés por parte de mis colegas y amigos lectores, en el sentido de que todos quienes vivimos de y por la enseñanza de la Física estamos comprometidos con el desarrollo de ésta y de nuestro país. Espero que este trabajo contribuya con un grano de arena en esta fabulosa tarea.*

Problemas de Física y cómo resolverlos *es un intento importante de ordenar e interconectar todo el curso en un solo volumen, en cuyo desarrollo hemos empleado únicamente el Sistema Internacional de Unidades. En esta edición se presentan nuevos problemas y nuevas resoluciones con respecto a lo publicado en los fascículos precedentes, con lo cual creo cumplir con la expectativa que muchos colegas fijaron sobre nuestras publicaciones anteriores. Los más de 1 500 problemas se han seleccionado respetando: su caracter clásico, los de resolución múltiple, los analíticos y los infaltables originales. Buena parte de estos problemas los he ido ensayando en clase en los últimos años. Sin embargo, debo hacer una mención especial de agradecimiento a los colegas y estudiantes que tuvieron a bien desarrollarlos oportunamente al ser publicados en compendios, prácticas y exámenes en distintos centros pre-universitarios, institutos y universidades.*

Esta edición tiene una nueva característica, cual es la de agregar en el inicio de cada capítulo un resumen teórico de conceptos y principios físicos, así como un listado de las principales fórmulas del tema que en su conjunto no es más que el desarrollo simplificado de una clase. Utilizamos este resumen en la resolución de cada problema, mostrándole al lector el modo lógico de aplicarlas, evitando en lo posible el frío y dogmático uso del cálculo superior, empleando en cambio la amena aplicación de la Matemática Elemental: Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría.

Siendo el objetivo principal de esta obra el mostrar didácticamente la resolución de ejercicios y problemas de Física, no hemos olvidado el carácter formativo que todo texto debe ofrecer al lector; ello lo hemos concebido en la naturaleza misma de los problemas seleccionados, así como las notas u observaciones que colocamos al final de cada solución: Para profundizar un concepto, para discutir una solución, para buscar el aspecto general de la respuesta, y en muchos casos para mostrar un segundo método de resolución.

En la proposición de los problemas se ha recurrido a una división en párrafos de cada capítulo, lo que permitirá al docente hacer una selección adecuada de los mismos según sea su necesidad para su clase y/o grupo de alumnos, sin olvidar ningún modelo o tema del capítulo, buscando así la actualización que todo profesional debe tener en su campo.

Espero que el presente texto constituya la fuente del orden en temas y problemas que todo profesor busca al inicio de su carrera, aliviándole de este modo su labor, pues todos por experiencia sabemos que un ejercicio o problema con características apropiadas, originales, elegantes, de resolución a veces inesperada y directa (pero meditada), y con cálculos algebraicos que siempre conducen a números de fácil operatividad (sin salirse de lo físicamente aceptable), nos permite quedar bien ante nuestros alumnos, provocando en ellos una especial atención por nuestro curso. A todos los estudiantes de la especialidad y a los profesores que se inician en esta actividad, mi mejor deseo es que este libro sirva para tales fines.

Debo confesarle a nuestros colegas experimentados que el mayor énfasis que le he dado a la obra está en la segunda mitad del curso, lo que puede apreciarse en la extensión y profundidad de los resumenes teóricos y de los problemas propuestos. Esto lo he hecho pensando en quienes hasta hoy no han tenido un orden referencial para el desarrollo de algunos temas como: Ondas Mecánicas - Sonido, Potencial Eléctrico, Electrodinámica (1^{ra} y 2^{da} parte), Magnetismo, Electromagnetismo (1^{ra} y 2^{da} parte), Ondas Electromagnéticas, Óptica Física (Fenómenos Ondulatorios de la Luz) y Teoría de la Relatividad (Especial y General), y puedo manifestarles con mucha sinceridad el éxito que en lo personal he conseguido con tal contenido en clases de ensayo.

Para la confección y diagramación del texto hemos utilizado lo último (a la fecha) en procesamiento de textos y fotocomposición laser, acompañados de gráficos y diagramas de excelente calidad, lo que en conjunto constituyen un inmejorable marco para un trabajo que aspira a ser calificado como un libro de ***calidad de exportación.***

Prometo que nuestras siguientes publicaciones serán cada vez mejores, superiores siempre a las anteriores. Para ello espero contar con las siempre bienvenidas sugerencias de parte de quienes hasta hoy nos dispensan con su lectura.

Hasta la próxima publicación!.

Lima, Marzo de 1993 — *Félix Aucallanchi Velásquez*

AL PROFESOR

Es ya conocido por quienes nos dedicamos a la enseñanza de la Física que uno de los principales obstáculos al que nos enfrentramos contínuamente es a la falta de un conjunto de ejercicios apropiadamente seleccionados para que nuestros alumnos intenten resolverlos, buscando con ellos aplicar los conceptos y principios básicos que explicamos en nuestras charlas teóricas. Tal selección, a juicio personal, es siempre una tarea ardua que generalmente desarrollamos con mucho entusiasmo en su inicio, a continuación con intermitencia, y finalmente, por falta de tiempo y/o alicientes, lo dejamos incompleto.

Por haber vivido estas mismas experiencias durante cerca de 17 años de labor docente es que decidí, hace varios años, recopilar una serie de ejercicios y problemas que en lo posible tratara de cubrir el mayor espectro de variedad que pudiera existir (hasta la fecha) en cada tema.

Los colegas que nos han dispensado con la lectura anterior de nuestro texto ***Física- Curso Básico*** *encontrarán que los casos allí resueltos y propuestos son de un nivel de dificultad bastante menor que los que aparecen en este libro; es más, se ha tratado que los problemas no se repitan en ambos textos. Por ello, sugiero a los profesores dirigir estos ejercicios especialmente a alumnos que posean una determinada base, tanto teórica como práctica, aunque ello lo dejo a criterio de cada colega, pues al revisar los contenidos encontrarán siempre problemas de aplicación directa en el incio de la lista de los mismos; luego se proponen ejercicios de un mayor nivel de dificultad, siendo los últimos en cada serie de una resolución que requiere siempre de un mayor raciocinio.*

De acuerdo con el contenido de este texto, los capítulos del curso pueden desarrollarse en el orden que aquí se publican. Sin embargo, por razones técnico-pedagógicas, el tiempo para su dictado, o según sea el grupo humano y/o institución en donde se labore, podemos recomendar el siguiente orden, sin desmedro de la efectividad de este libro. Proponemos:

a) Vectores, Estática, Cinemática, Dinámica, Oscilaciones, Fluidos, Calor, Electricidad, Electromagnetismo, Relatividad.

b) Vectores, Cinemática, Estática, Dinámica, Fluidos, Calor, Electricidad, Optica, Electromagnetismo, Oscilaciones.

Finalmente, debo señalar que muchos de estos problemas pueden ser planteados tanto a alumnos de secundaria, centros pre-universitarios, institutos pedagógicos o de universidades para los cursos de Física Elemental, Intermedia, Básica y Superior respectivamente, aunque para este último grupo hemos evitado en lo posible el cálculo integro-diferencial. A los colegas que nos dispensan con su lectura les prometo proponer nuevos, mejores y más problemas originales para nuestras próximas publicaciones, pues es lo menos que podemos ofrecerles por su deferencia.

Atentamente:

El autor

AL ESTUDIANTE

Siempre es grato dirigirse a los lectores que en su calidad de estudiantes del curso de Física aspiran encontrar en un libro la respuesta a sus dudas y solución a sus inquietudes. Es por lo tanto un verdadero reto para un autor satisfacer tales expectativas; por ello debo confesar que estas líneas las escribo con mucho entusiasmo, y a la vez, cuidado de expresar lo justo y necesario.

En primer lugar debemos reconocer que este curso requiere una especial dedicación, pues siempre pone a prueba nuestra habilidad en aplicar un concepto o principio físico a un caso determinado, el mismo que por estar vinculado a la realidad, es decir, a nuestra naturaleza, debe encerrar siempre o casi siempre un hecho por demás lógico y elemental, al menos cuando los casos a resolver corresponden a un curso de Física Elemental o Inter-medio. También es cierto que la gran mayoría de las preguntas de las prácticas y/o examenes giran en torno a un determinado grupo de problemas llamados ***tipos****, y el éxito que tenemos al rendir tales pruebas depende en buena medida de la oportunidad que hemos tenido al haberlos revisado en su totalidad durante nuestra preparación o entrenamiento.*

El presente texto es un trabajo que trata de reunir, sino toda, la mayoría de los ejercicios y problemas tipos existentes en cada tema, desde los medianamente difíciles hasta los más intrincados que demandan del estudiante una gran concentración y destreza en los planteamientos y recursos matemáticos. Cada capítulo tiene un resumen teórico orientado exclusivamente a los problemas propuestos, sin el cual sería prácticamente imposible su resolución. Y a propósito de las resoluciones, éstas se presentan en la sección ***Resoluciones y Respuestas****, los mismos que son un modelo que el estudiante puede tomar como referencia, pero no como el único.*

Recomiendo a los estudiantes en general que antes de resolver un problema de Física (especialmente de este texto) siga las siguientes normas:

1°) Encontrarse muy familiarizado con los resumenes teóricos del capítulo, y de ser posible con los de los capítulos anteriores (Esto es más necesario cuanto más nos sumergimos en el curso).

2°) Extraer los datos del problema y tener en cuenta los resultados de problemas anteriores (esto último es muy frecuente en los "problemas laboriosos").

3°) Confeccionar un esquema (gráfico) y colocar en él los datos disponibles.

4°) Resolver en lo posible en forma algebraica (es decir, en forma literal).

5°) Examinar la veracidad del resultado, eliminando los valores que no sean físicamente aceptables.

Espero sinceramente que ***Problemas de Física y cómo resolverlos*** *te ayude a conseguir un mejor dominio del curso, y de ser posible que cada uno de ustedes alcance el éxito en la empresa en que se encuentren comprometidos: De lograrlo habremos conseguido darle significado a la existencia de esta modesta obra.*

Atentamente:

Félix Aucallanchi Velásquez

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

Este texto se empezó a redactar en Abril de 1992 y se culminó en Junio de 1993. Durante todo este tiempo fué necesario tener mucha dedicación y paciencia para la composición, diagramación y revisión de los contenidos, sin duda una tarea verdaderamente invalorable, por lo que me siento sinceramente agradecido de la colaboración de mis amigos:

Ing. Mecánico (UNI): **Martín Casado Márquez**
Lic. Físico-Matemático (UNCP): **César Romero Quispe**

Asimismo a todos quienes contribuyeron de alguna u otra forma en la elaboración del texto, pero muy especialmente a quienes figuran en la lista de colaboradores.

DEDICATORIA

Dedico esta obra a mi familia, mi esposa Carmela, mis hijos Marlon, Rocío y Daniel, mis alumnos de ayer y hoy y a mi país.

1° Edición Diciembre - 1993
1° Reimpresión - Febrero 1994
2° Reimpresión - Abril 1994
3° Reimpresión - Junio 1994
4° Reimpresión - Agosto 1994
2° Edición - Enero 1995
1° Reimpresión - Marzo 1996
3° Edición - Octubre 1997
1° Reimpresión - Enero 1998
4° Edición - Junio 1998
1° Reimpresión - Abril 1999

1 Análisis Dimensional

1.1. Sistema absoluto

Sub-sistema	L	M	T
CGS	*cm*	*g*	*s*
MKS	*m*	*kg*	*s*
FPS	*pie*	*lb*	*s*

1.2. Sistema técnico

Sub-sistema	L	F	T
CGS	*cm*	*g*	*s*
MKS	*m*	*kg*	*s*
FPS	*pie*	*lb*	*s*

1.3. Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

MAGNITUD FUNDAMENTAL	SIMBOLO	UNIDAD BASICA	SIMBOLO
Longitud	L	*metro*	*m*
Masa	M	*kilogramo*	*kg*
Tiempo	T	*tiempo*	*s*
Temperatura termodinámica	θ	*kelvin*	*K*
Intensidad de corriente eléctrica	I	*ampere*	*A*
Intensidad luminosa	J	*candela*	*cd*
Cantidad de sustancia	N	*mol*	*mol*

MAGNITUD AUXILIAR	UNIDAD BASICA	SIMBOLO
Angulo sólido	radián	*rad*
Angulo diedro	estereorradián	*sr*

Unidad de $(x) = m^a.kg^b.s^c.K^d.A^e.cd^f.mol^g.rad^h.sr^i$

1.4. Fórmula dimensional

$$[x] = L^a\, M^b\, T^c\, \theta^d\, N^g J^f I^e \qquad \textbf{(1.1)}$$

siendo: **a**, **b**, **c**, ... , **g** = números reales.

Las expresiones numéricas como los números reales, funciones trigonométricas. logarítmicas y exponenciales, por ser adimensionales, se les representan por la unidad (1).

1.5. Fórmulas dimensionales más usuales

MAGNITUD DERIVADA	F.D.	MAGNITUD DERIVADA	F.D.
Area	L^2	Periodo	T
Volumen	L^3	Frecuencia	T^{-1}
Velocidad lineal	LT^{-1}	Coeficiente de dilatación	θ^{-1}
Aceleración lineal	LT^{-2}	Capacidad calorífica	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$
Velocidad angular	T^{-1}	Capacidad calorífica específica	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Aceleración angular	T^{-2}	Calor latente específico	L^2T^{-2}
Fuerza	LMT^{-2}	Carga eléctrica	TI
Torque	L^2MT^{-2}	Intensidad de campo eléctrico	$LMT^{-3}I^{-1}$
Trabajo o energía	L^2MT^{-2}	Potencial eléctrico	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
Potencia	L^2MT^{-3}	Capacidad eléctrica	$L^2M^{-1}T^4I^2$
Cantidad de movimiento	LMT^{-1}	Resistencia eléctrica	$L^2MT^{-3}I^{-2}$
Impulso	LMT^{-1}	Carga magnética	LI
Densidad absoluta	$L^{-3}M$	Inducción magnética	$MT^{-2}I^{-1}$
Peso específico	$L^{-2}MT^{-2}$	Flujo magnético	$L^2MT^{-2}I^{-1}$
Presión	$L^{-1}MT^{-2}$	Iluminación	$L^{-2}J$

1.6. Principio de homogeneidad dimensional (*Principio de Fourier*).

Si $[A] + [B] = [D] - [E]$ es una ecuación dimensionalmente correcta, entonces se verifica lo siguiente:

$$[A] = [B] = [D] = [E] \qquad \textbf{(1.2)}$$

1.7. Fórmulas empíricas

Si la magnitud p depende de las magnitudes a, b y c, entonces se deberá verificar la siguiente relación:

$$p = k\, a^x b^y c^z \qquad \textbf{(1.3)}$$

siendo k la constante numérica de proporcionalidad, y los valores de los exponentes x, y, z deberán satisfacer el principio de homogeneidad.

PROBLEMAS

Nota: Todos los problemas se proponen para ser resueltos en el Sistema Internacional de Unidades (S.I).

Fórmulas dimensionales

1.1. Determinar las dimensiones de X para que la relación: $EX = Fv\cos\theta$ sea dimensionalmente correcta. Se sabe que: E = energía cinética, F = fuerza, y v = velocidad.

1.2. La Ley de Gravitación Universal se plasma en la siguiente relación :

$$F = G\,\frac{m_1 . m_2}{d^2}$$

la cual resulta ser dimensionalmente correcta si: F = fuerza, m_1 y m_2 = masas, y d = distancia. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener G para que dicha relación sea completamente homogénea?.

1.3. Para el cálculo de la energía cinética promedio de las moléculas de un gas ideal monoatómico se utiliza la relación de Boltzmann :

$$E = 3/2\,kT$$

siendo E = energía cinética, y T = temperatura absoluta. Determinar la fórmula dimensional de la constante de Boltzmann.

1.4. Sabiendo que la expresión $pV = nRT$ es dimensionalmente correcta, siendo p = presión, V = volumen, n = cantidad de sustancia, y T = temperatura, se pide determinar las dimensiones de R.

1.5. De acuerdo con la Ley de Coulomb para la interacción de dos cargas eléctricas en el vacío, se verifica lo siguiente:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

siendo F = fuerza, q_1 y q_2 = cargas eléctricas, y d = distancia. Se pide encontrar las dimensiones de la permitividad eléctrica en el vacío (ε_o).

1.6. Sabiendo que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas viene dada por la relación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$$

siendo c = velocidad lineal, y ε_o = permitividad eléctrica del vacío. Encontrar la fórmula dimensional de la permeabilidad magnética del vacío (μ_o).

1.7. Se sabe que la energía de una bobina recorrida por una corriente eléctrica viene dada por: $W = \frac{1}{2}Li^2$, siendo W = energía, e i = intensidad de corriente eléctrica. ¿Cuáles serán las dimensiones del coeficiente de autoinducción L?.

1.8. Cuando una corriente eléctrica variable recorre una bobina, ésta presenta una oposición a su paso, que viene dada por: $X_L = 2\pi fL$, siendo f = frecuencia, y L = coeficiente de autoinducción. ¿Qué magnitud física representa X_L? (Consultar con el cuadro **1.4**).

1.9. Las ondas electromagnéticas transportan energía, que de acuerdo con la hipótesis de Planck, al interaccionar con los cuerpos, lo ceden en pequeñas cantidades llamadas **fotones**. Según esta hipótesis, la energía de un fotón viene dada por: $E = hf$, siendo E = energía, y f = frecuencia. ¿Cuáles son las dimensiones de la constante de Planck (h)?.

1.10. En Fotometría se sabe que la iluminación (Y) sobre una superficie está dada por:

$$Y = \frac{\Phi}{d^2\Omega}$$

Si d = distancia, y Ω = ángulo sólido, ¿Cuál es la fórmula dimensional del flujo luminoso (Φ)?.

Ecuaciones dimensionales

1.11. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de A y B para que la ecuación dada sea dimensionalmente correcta?

$$A = \frac{W \operatorname{sen}\theta}{m(B^2 + S)}$$

siendo: W = trabajo, m = masa, y S = área.

1.12. Se da la siguiente ecuación dimensional: $V = 3a/t^3 + (h - b)/c$, siendo: V = volumen, t = tiempo, h = altura ; determinar la expresión dimensional de: $E = b/ac$.

1.13. Si la rigidez (P) de una cuerda está dada por la fórmula: $P = aQ/R + bd^2$, siendo: P = fuerza en *newton*, R = radio, Q = presión, d = densidad . Qué dimensiones deben tener a y b para que dicha fórmula sea dimensionalmente correcta?.

1.14. En la siguiente fórmula empírica: $F = \left(a + b/\sqrt{v}\right)dv^2L$, donde: F = fuerza de rozamiento, d = diámetro de la tubería, v = velocidad lineal, L = longitud, a = coeficiente experimental dimensional. Determinar las dimensiones del coeficiente b.

1.15. La ecuación que permite calcular el caudal (Q) del escape de agua por un orificio es la siguiente:

$$Q = \frac{CA}{\sqrt{1-(A/B)^2}} \sqrt{\frac{2g(p_1 - R)}{\gamma}}$$

siendolas unidades de $Q = m^3/s$, C = coeficiente de descarga, A = área del tubo, g = aceleración de la gravedad, p_1 = presión en el tubo, γ = 0000peso específico. Considerando dimensionalmente correcta a la ecuación dada, ¿Cuáles son las dimensiones de B, C y R ?.

1.16. Si la ecuación dada es dimensionalmente correcta, se pide encontrar la fórmula dimensional de E.

$$P.Q = \left\{ \frac{Rv - aE}{E(F+Q)} \right\}^{\log 4}$$

siendo P = peso, R = trabajo, v = velocidad y a = aceleración.

1.17. Sabiendo que la ecuación: $F = qE + qvB$ es dimensionalmente correcta, determinar la fórmula dimensional de B, siendo E = intensidad de campo eléctrico, y v = velocidad lineal.

1.18. Determinar la fórmula dimensional de A en la siguiente ecuación dimensionalmente correcta: $A = Bk - Ck^3$, siendo B = calor específico, y C = aceleración angular.

1.19. La ecuación propuesta es dimensionalmente correcta, siendo: p = presión, B = diámetro, A = área, m y n = adimensionales. Cuáles deben ser las dimensiones de C, H y D?.

$$p = C(B - nH)\left\{m + (nA/D)^2\right\}D^{3/2}$$

1.20. De la siguiente ecuación dimensionalmente correcta, hallar $E = (x - p)^{(z-y)}$, si:

$$I = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,.m.\left\{ \frac{\left(R_n.\cos\theta_n\right)^x - \left(R_{n-1}.\cos\theta_{n-1}\right)^y}{\left(R_n.\operatorname{sen}\theta_n\right)^z - \left(R_{n-1}.\operatorname{sen}\theta_{n-1}\right)^p} \right\}$$

siendo: I = momento de inercia = masa. (longitud)^2 ; m = masa ; R_n, R_{n-1} = radios; θ_n, θ_{n-1} = ángulos.

1.21. ¿Bajo qué condiciones la ecuación propuesta es dimensionalmente correcta?.

$$\left(Wp^x \cos\theta\right)^2 + \delta\, mg = \left(Wpv^y\right)^{1/\cos\theta}$$

siendo: W = peso, m = masa, g = aceleración, v = velocidad, $\theta = \pi/3$ *rad*, p = 4,44 $m^2.kg/s$.

1.22. Determinar el valor de $R = x + y + w + r + z$, si la ecuación es dimensionalmente correcta.

$$\alpha\omega\sec 30° - Pt = \pi^2 m^x v^y \pm d^z.\rho^w.b^r/\sqrt{2}$$

siendo: P = potencia, t = tiempo, m = masa, v = velocidad, d = densidad, ρ = peso específico, b = espacio recorrido, α = magnitud desconocida.

1.23. Si la expresión propuesta es dimensionalmente correcta, hallar la fórmula dimensional de Q.

$$W = mv^\alpha + Agh - Bx^{\sec 60°} + PC$$

En donde : W = trabajo, m = masa, v = velocidad, g = aceleración de la gravedad, h = altura, x = distancia, P = potencia.

$$Q = A^\alpha.\sqrt[\alpha]{B}/\sqrt{C^\alpha}$$

1.24. Si la siguiente expresión contiene n términos y es dimensionalmente correcta:

$$W = k_1 v_1 + \frac{k_2 v_2^2}{2!} + \frac{k_3 v_3^3}{3!}$$

siendo: W = energía, v_i = velocidad, $n!$ = factorial de n, k_i = constante física. Determinar la fórmula dimensional de E, si $E = k_9 \,.\, k_{17}/k_{12}$.

1.25. En un experimento de Física se comprobó que la relación: $pF = (FAV)^{UNA}$ es dimensionalmente correcta, siendo p = presión, F = fuerza, A = área, V = volumen y U = energía. ¿Cuáles son las dimensiones de N?.

1.26. Determinar las dimensiones de A e y para que la expresión: $y = A.p.e^{(4mA/v)}$ sea dimensionalmente correcta, siendo: p = presión, m = masa, v = velocidad, y e = base de los logaritmos neperianos.

1.27. Si la ecuación dimensional: $mv^2 \operatorname{sen}(\omega y - \phi) = \pi \,.\, \dfrac{\sqrt{x}}{y^2}$

es dimensionalmente correcta, determinar las dimensiones de x e y, siendo m = masa, v = velocidad y ω = velocidad angular.

1.28. Determinar las dimensiones de E, si: $E = xz/y^2$, sabiendo asimismo que la expresión:

$$dv\log(mx/t) = y\,\mathrm{tg}(\theta + ym/z)$$

es dimensionalmente correcta, siendo d = densidad, m = masa, v = velocidad y t = tiempo.

Fórmulas empíricas

1.29. La relación de Louis de Broglie para la interpretación física de la dualidad onda-partícula establece que cualquier masa o partícula que se mueve a cierta velocidad tiene asociada una onda electromagnética cuya longitud de onda (λ) depende de la constante de Planck (h) y de su cantidad de movimiento (P), tal que: $\lambda = h^x . P^y$ ¿Cuáles son los valores de x e y que logran homogenizar la fórmula dada?.

1.30. La potencia (Pot) que requiere la hélice mayor de un helicóptero viene dada por la siguiente fórmula : $Pot = k R^x \omega^x D^z$

siendo: k = número; R = radio de la hélice; ω = velocidad angular; d = densidad del aire. Hallar la expresión final de la fórmula empírica.

1.31. La presión (p) que ejerce un chorro de agua sobre una placa vertical viene dada por la siguiente fórmula empírica:

$$p = kQ^x d^y A^z$$

siendo: k = constante numérica; d = densidad del agua; A = área de la placa; Q = caudal en m^3/s. Determinar la expresión final de la fórmula.

1.32. La frecuencia de oscilación (f) en s^{-1} de un péndulo simple depende de su longitud l y de la aceleración de la gravedad (g) de la localidad. Determinar una fórmula empírica para la frecuencia.

1.33. El periodo de un planeta que gira en una órbita circular depende del radio de la órbita (R), de la masa de la estrella (M) y de la constante G. Sabiendo que G es la constante de Gravitación Universal, determinar una fórmula empírica para el periodo.

1.34. Rocío, una eficiente enfermera, ha observado que la potencia (P) con que aplica una inyección depende de la densidad (d) del líquido encerrado, de la velocidad (v) del émbolo al expulsar el líquido y del tiempo de aplicación de la inyección (t). Martín, un ingeniero de la UNI le ha conseguido una fórmula con los datos que ella le ha proporcionado. Si $d = 0{,}8\ g/cm^3$, $v = 5\ cm/s$, y $t = 2\ s$, entonces $P = 0{,}9$ *watts*. Cuál será la fórmula descubierta?.

1.35. Si se tomaran como magnitudes fundamentales la aceleración (A), la masa (M) y el tiempo (T), ¿Cuál sería la fórmula dimensional de la constante de gravitación universal (G)?. *Sugerencia*: Utilizar el resultado del problema **1.2**.

1.36. Se forma un sistema de unidades tomando como unidades fundamentales: U(L) = 3m; U(M) = 5kg; U(T) = 3s. Si la unidad de potencia en el Sistema Internacional es el *watt*, hallar la relación con la unidad de potencia U(P) del nuevo sistema formado.

1.37. Se forma un sistema cuyas unidades son:

a) Velucio (Velocidad de la luz = 300 000 km/s).
b) Gravio (Aceleración igual a la gravedad).
c) Trevio (Trabajo necesario para elevar una masa de 1 kg hasta una altura de 1 m.

Hallar la equivalencia entre la unidad de masa del sistema dado y la unidad de masa del sistema CGS absoluto.

1.38. La resistencia W que ofrece el aire en kg/m^2 está dada por: $W = 0{,}05 v^2$, siendo v la velocidad en km/h. ¿Cuál será la expresión que nos permite calcular W en N/m^2 cuando v se da en m/s? (1 kg = 9,8 N; 1 km = 10^3 m; 1 h = 3 600 s).

2 Análisis Vectorial

2.1. Vector

$$\overline{V} = V\underline{/\theta} \qquad (2.1)$$

siendo V el módulo del vector, y θ el ángulo direccional.

2.2. Adición de vectores

2.2.a. Método del paralelogramo (*Fig*. 2.1)

$$\overline{R} = \overline{A} + \overline{B} \qquad (2.2)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (2.3)$$

$$R_{máx} = A + B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \uparrow\uparrow \overline{B} \qquad (2.4)$$

$$R_{mín} = A - B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \uparrow\downarrow \overline{B} \qquad (2.5)$$

siendo A y B los módulos de los vectores, y siempre de signo positivo.

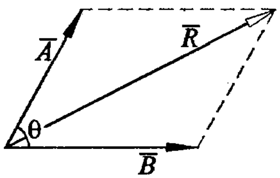

Fig. 2.1

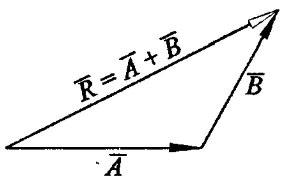

Fig. 2.2

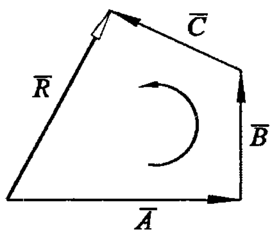

Fig. 2.3

2.2.b. Método del triángulo.- El vector resultante es aquel que cierra el triángulo (*Fig*. 2.2).

2.2.c. Método del polígono (*Fig*. 2.3).- El vector resultante es el que cierra el polígono: $\overline{R} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Nota: Si el polígono vectorial es cerrado, la resultante es **nula.**

2.3. Sustracción de vectores (*Fig*. 2.4)

$$\overline{D} = \overline{A} - \overline{B} \qquad (2.6)$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} \qquad (2.7)$$

$$D_{máx} = A + B \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} \uparrow\downarrow \bar{B} \tag{2.8}$$

$$D_{mín} = A - B \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} \uparrow\uparrow \bar{B} \tag{2.9}$$

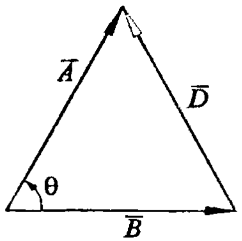

Fig. 2.4

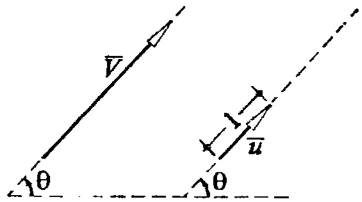

Fig. 2.5

2.4. Multiplicación de un vector por un escalar

$$P = n\bar{V} \tag{2.10}$$

$$\bar{P} = n \,.\, \bar{V} \tag{2.11}$$

$$P \uparrow\uparrow \bar{V} \quad \Leftrightarrow \quad n\,(+) \tag{2.12}$$

$$\bar{P} \uparrow\downarrow \bar{V} \quad \Leftrightarrow \quad n\,(-) \tag{2.13}$$

2.5. Vector unitario (*Fig.* 2.5)

$$\bar{u} = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} \tag{2.14}$$

$$\bar{u} = 1\,\underline{/\theta} \tag{2.15}$$

donde $\bar{u}$ y $\bar{V}$ son siempre codirigidos.

2.6. Condición de codireccionalidad

Dos vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ serán codirigidos si presentan la misma dirección, de modo que sus vectores unitarios serán iguales. Entre los vectores y sus longitudes se verificará que:

$$\frac{\bar{A}}{l_A} = \frac{\bar{B}}{l_B} \tag{2.16}$$

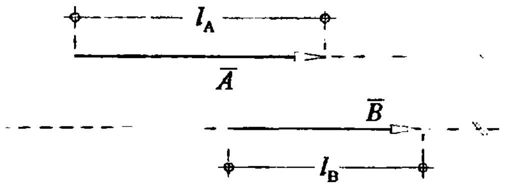

Fig. 2.6

2.7. Descomposición rectangular

$$\bar{V} = \bar{V}_x + \bar{V}_y \tag{2.17}$$

$$\bar{V}_x = (V\cos\theta)\bar{i} \tag{2.18}$$

$$\bar{V}_y = (V\text{sen}\theta)\bar{j} \tag{2.19}$$

siendo $\bar{i}$ y $\bar{j}$ los vectores unitarios en los ejes cartesianos X e Y respectivamente (*Fig*. 2.7).

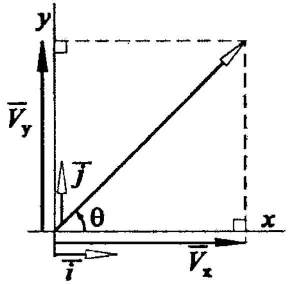

Fig. 2.7

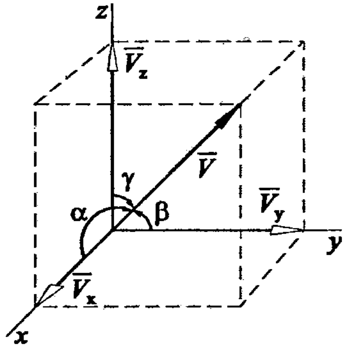

Fig. 2.8

2.8. Composición rectangular

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y \tag{2.20}$$

$$R_x = \Sigma V_x \ ; \ R_y = \Sigma V_y \tag{2.21}$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} \tag{2.22}$$

$$\text{tg}\theta = R_y/R_x \tag{2.23}$$

siendo θ el ángulo que se mide desde el eje X en sentido antihorario.

2.9. Vectores en el espacio

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k} \tag{2.24}$$

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}} \tag{2.25}$$

$$\cos\alpha = V_x/V \ ; \ \cos\beta = V_y/V \ ; \ \cos\gamma = V_z/V \tag{2.26}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{2.27}$$

siendo $\bar{k}$ el vector unitario en el eje de las cotas Z. Asimismo, α, β y γ son los ángulos directores (*Fig*. 2.8).

2.10. Vector posición ($\bar{r}$) (*Fig*. 2.9)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{2.28}$$

$$\bar{r} = (x; y; z)$$

2.11. Producto escalar (*Fig*. 2.10)

Datos: $\bar{A} = (A_x; A_y; A_z) \wedge \bar{B} = (B_x; B_y; B_z)$

$$\bar{A}.\bar{B} = AB\cos\theta \tag{2.29}$$

$$\bar{A}.\bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2.30}$$

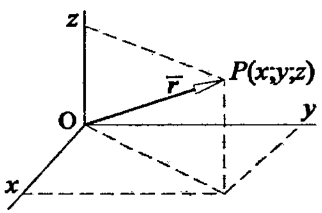

Fig. 2.9

2.12. Producto vectorial

Datos: $\overline{A} = (A_x; A_y; A_z) \wedge \overline{B} = (B_x; B_y; B_z)$

$$\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B} \tag{2.31}$$

$$|\overline{C}| = |\overline{A}|.|\overline{B}|.sen\theta \tag{2.32}$$

$$\overline{A} \times \overline{B} = \bar{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \tag{2.34}$$

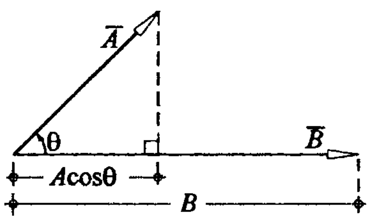

Fig. 2.10

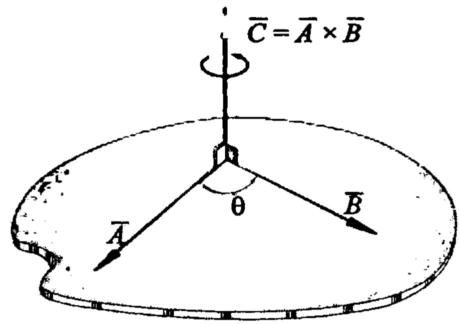

Fig. 2.11

PROBLEMAS

Método del paralelogramo

2.1. Dos vectores de la misma naturaleza poseen módulos $A = 6$ y $B = 10$, formando entre sí un ángulo θ. Determinar la medida del ángulo θ, si su resultante es $R = 14$.

2.2. Dados los vectores: $\overline{A} = 18 \angle 20°$, y $\overline{B} = 24 \angle 110°$, determinar el módulo de la resultante y su correspondiente dirección.

2.3. Dos vectores A y B tienen una resultante máxima de 16 y una mínima de 4. ¿Cuál será el módulo de la resultante de dichos vectores cuando éstos formen 127° entre sí?

2.4. Dos vectores A y B originan una resultante mínima de valor 3. Hallar sus módulos, si cuando forman un ángulo de 60°, la resultante es 39.

2.5. Dos vectores coplanares y concurrentes forman entre sí un ángulo de 60°, y poseen una resultante que mide 35. Sabiendo además que uno de ellos es los 3/5 del otro, ¿Cuál es la suma de los módulos de dichos vectores componentes?

2.6. La resultante de dos vectores mide 21, y es perpendicular a uno de ellos. Si el otro mide 35, ¿Qué ángulo forman entre sí los vectores componentes?

2.7. Se descompone un vector F en dos vectores paralelos a las rectas X_1 e Y_1. Se sabe que $F = 8$, y su componente paralela a Y_1 tiene una magnitud igual a 6. Determinar la magnitud de la otra componente.

2.8. Determinar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si $A = 10$, $E = 6$.

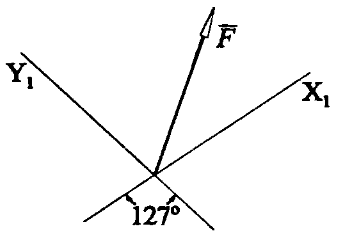

Fig. Prob. 2.7

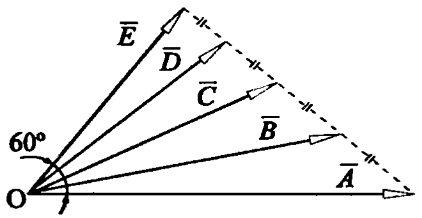

Fig. Prob. 2.8

2.9. La figura muestra tres vectores de módulos iguales. Hallar el valor del ángulo θ, tal que la resultante de los vectores sea mínima.

2.10. Se tienen dos vectores compuestos: $(2\overline{P} + \overline{Q})$ y $(3\overline{P} - \overline{Q})$, que forman entre sí un ángulo de 53°, siendo sus módulos respectivos iguales a 15 y 7 unidades. ¿Cuál es el módulo del vector P?.

2.11. Sabiendo que $|\overline{A} - 2\overline{B}| = 5$, y $|3\overline{A} + 5\overline{B}| = 6$, calcular $|5\overline{A} + \overline{B}|$.

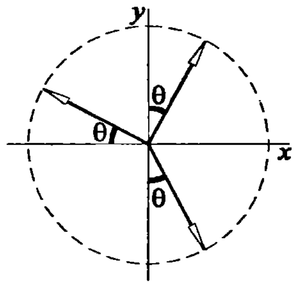

Fig. Prob. 2.9

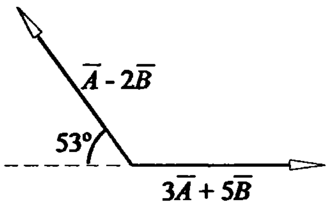

Fig. Prob. 2.11

Método del triángulo

2.12. Determinar el módulo y dirección de la resultante total del conjunto de vectores mostrado.

2.13. Se tiene tres vectores $a = 3$, $b = 4$, y $c = 5$, tal que $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$. Determinar el módulo de x, si: $\overline{x} = (5/3)\overline{a} + 3\overline{b}$.

2.14. Determínese el vector $\overline{x}$ en función de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ (Ver figura).

2.15. Encontrar una expresión para el vector $\overline{x}$ en función de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$. La figura es un paralelogramo.

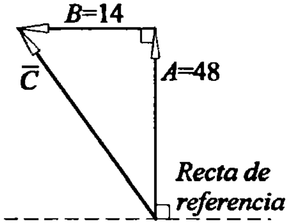

Fig. Prob. 2.12

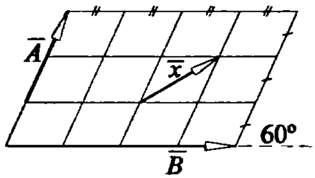

Fig. Prob. 2.14

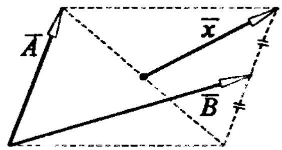

Fig. Prob. 2.15

2.16. Determinar $\overline{x}$ en función de $\overline{A}$ y $\overline{B}$, si ABCD es un paralelogramo (M y N son puntos medios).

2.17. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, sabiendo que PM = 2, MQ = 7 y MS = 1.

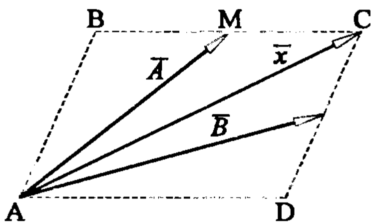

Fig. Prob. 2.16

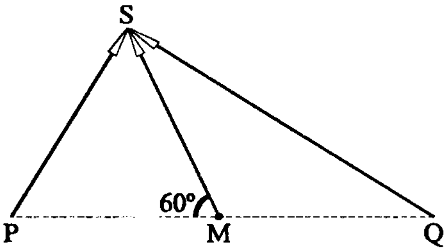

Fig. Prob. 2.17

2.18. Encontrar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si ABCD es un trapecio, siendo M y N puntos medios, y además BC = 8, y AD = 12.

2.19. Encontrar la resultante del conjunto de vectores mostrado.

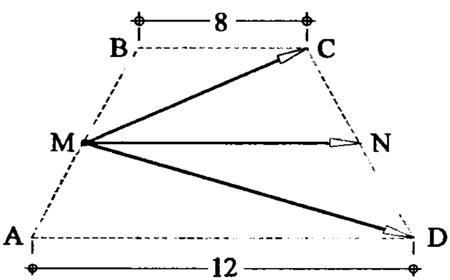

Fig. Prob. 2.18

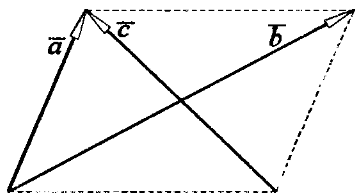

Fig. Prob. 2.19

2.20. Expresar el vector x en función de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, si se sabe también que: AQ/QB = 2/3; AP/PC = 3/5.

2.21. Determinar $\bar{x}$ en función de los vectores a y b, si G es el baricentro del triángulo.

Método del polígono

2.22. Determinar el vector R, si $\bar{R} = \bar{A} - \bar{B} + \bar{C} - \bar{D}$, siendo conocidos los vectores A, B, C y D, tal como se indica en la figura.

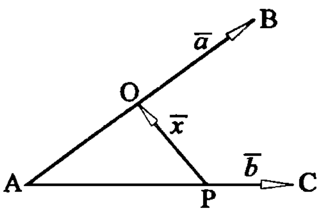

Fig. Prob. 2.20

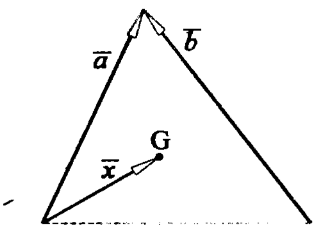

Fig. Prob. 2.21

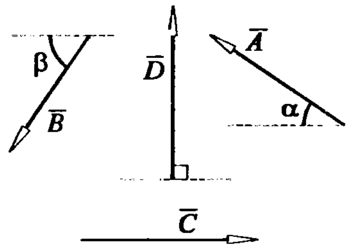

Fig. Prob. 2.22

2.23. Determinar la resultante del grupo de vectores mostrado, indicando su módulo y dirección. $A = 10$, $B = 16$, $C = 13$.

2.24. Si ABCDEF son los vértices de un hexágono regular, determinar la resultante de los vectores mostrados.

2.25. Hallar el módulo de la resultante para el conjunto de vectores mostrados.

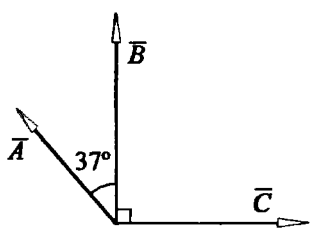

Fig. Prob. 2.23

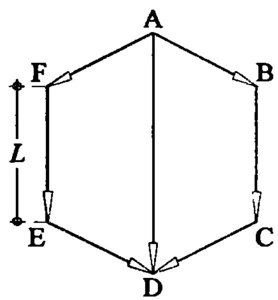

Fig. Prob. 2.24

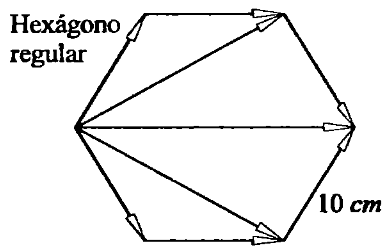

Fig. Prob. 2.25

2.26. Hallar la resultante de los vectores mostrados.

2.27. Si $C = 6\sqrt{3}$, hallar el módulo de $\bar{R}$, si $\bar{R} = \bar{A} - \bar{B} + 2\bar{C} - 2\bar{D}$.

2.28. Dados los siguientes vectores, hallar el módulo de la resultante de los vectores mostrados, si $f = 3$, y $d = 4$, siendo $\bar{f}$ y $\bar{d}$ perpendiculares.

2.29. Determinar la resultante $\bar{R}$ en base al conjunto de vectores mostrados, sabiendo que: $\bar{R} = \bar{p} - \bar{q} + \bar{m} - \bar{d} + \bar{s}$.

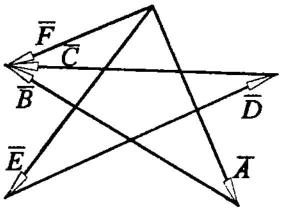

Fig. Prob. 2.26

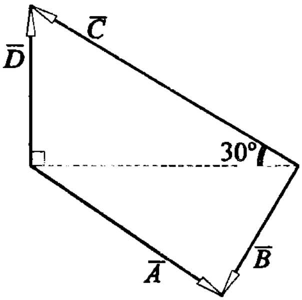

Fig. Prob. 2.27

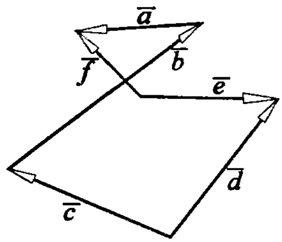

Fig. Prob. 2.28

2.30. Hallar el módulo de la resultante de los vectores mostrados.

2.31. Determine el módulo del vector resultante para el conjunto de vectores mostrados, si se sabe que AB = 2AC = 20 *cm*, y **O** es el centro de la circunferencia.

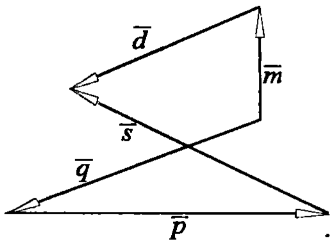

Fig. Prob. 2.29

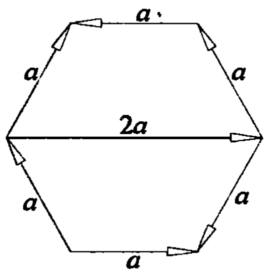

Fig. Prob. 2.30

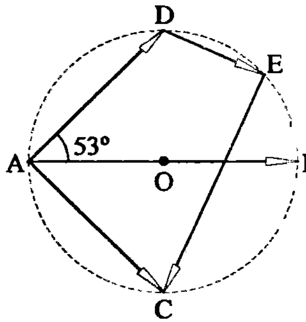

Fig. Prob. 2.31

2.32. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si el lado del hexágono regular mide $6\sqrt{3}$ *cm*.

2.33. Dos hombres y un muchacho desean jalar un fardo en la dirección marcada con X en la figura. Ambos hombres jalan con las fuerzas F_1 y F_2, cuyos valores y sentidos están indicados en la figura. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza mínima que debe ejercer el muchacho.

Sustracción de vectores

2.34. Dos vectores de módulos $A = 50$, y $B = 14$ forman 74° entre sí. ¿Cuál es el módulo del vector diferencia D, si $\overline{D} = \overline{A} - \overline{B}$?.

2.35. Dos vectores coplanares y concurrentes tienen una resultante que mide 74 unidades, y su correspondiente vector diferencia mide 37 unidades. ¿Qué ángulo forman dichos vectores, si se sabe además que sus módulos son iguales?.

2.36. Calcular el módulo de la diferencia $(\overline{A} - \overline{B})$ de los vectores mostrados, y su dirección respecto de la horizontal, si se sabe que $A = 16$, y $B = 12$.

2.37. Conociendo los vectores $\overline{P}$ y $\overline{Q}$, determinar la expresión vectorial de x en función de ellos, sabiendo además que $P = Q$.

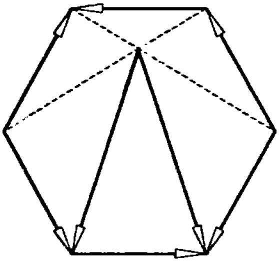

Fig. Prob. 2.32

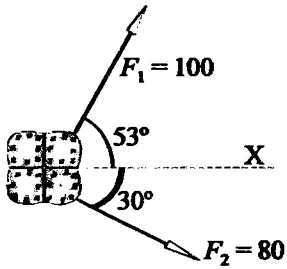

Fig. Prob. 2.33

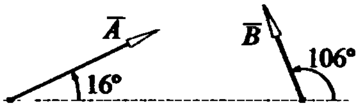

Fig. Prob. 2.36

2.38. Determinar $\overline{x}$ en función de $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

2.39. Para el grupo de vectores mostrado, determinar el vector x en función de $\overline{a}$ y $\overline{b}$, sabiendo además que G: Baricentro del triángulo PQR, y $RN = 4NQ$.

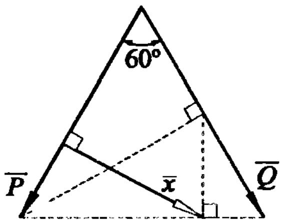

Fig. Prob. 2.37

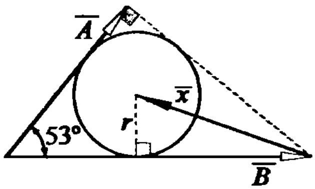

Fig. Prob. 2.38

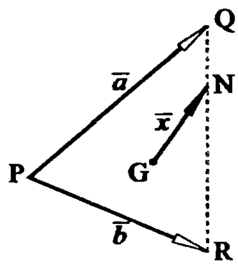

Fig. Prob. 2.39

2.40. Dos vectores A y B cuyos módulos son 15 y 7 respectivamente, tienen un vector diferencia cuyo módulo es 20. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman dichos vectores?.

2.41. Se tienen dos vectores compuestos $(\overline{A} + 3\overline{B})$ y $(\overline{A} + 2\overline{B})$, que forman entre sí un ángulo $0 = 37°$. Si además se sabe que $|\overline{A} + 3\overline{B}| = 40\ u$, y $|\overline{A} + 2\overline{B}| = 14\ u$, calcular $|\overline{B}|$.

Vector unitario

2.42. Sabiendo que ABCD es un cuadrado de lado L, determinar un vector unitario en la dirección de la diagonal AC y DB.

2.43. Sabiendo que ABCD es un cuadrado, determinar una expresión vectorial para $\overline{x}$ en función de los vectores $\overline{M}$ y $\overline{N}$.

2.44. Determinar $\overline{x} + \overline{y}$ en términos de $\overline{A}$ y $\overline{B}$, sabiendo que PQRS es un cuadrado.

2.45. Determinar una expresión vectorial para $\overline{x}$ en función de los vectores A y B, sabiendo que PQRS es un cuadrado.

Descomposición rectangular

2.46. Determinar el módulo de la resultante de los vectores trazados sobre el rectángulo mostrado.

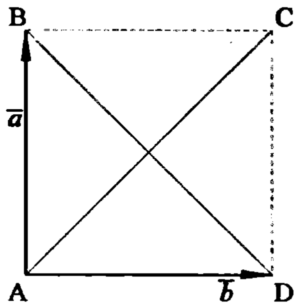

Fig. Prob. 2.42

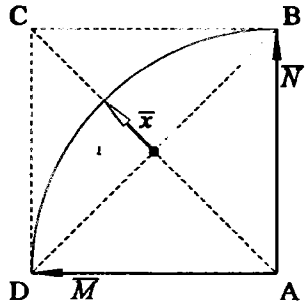

Fig. Prob. 2.43

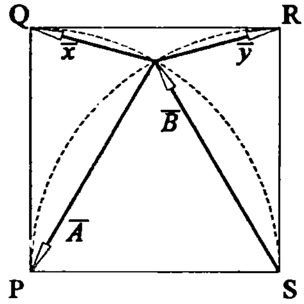

Fig. Prob. 2.44

2.47. Calcular la resultante del conjunto de vectores mostrado, sabiendo que ABCD es un cuadrado de 4 *cm* de lado, siendo M y N puntos medios.

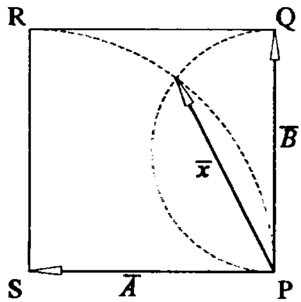

Fig. Prob. 2.45

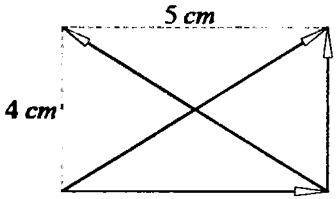

Fig. Prob. 2.46

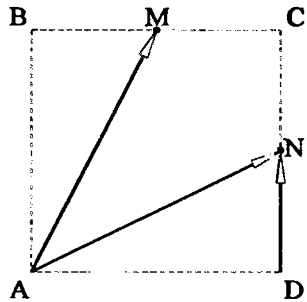

Fig. Prob. 2.47

2.48. Dado el sistema de vectores mostrado, calcular la magnitud de la resultante: $A = 6$, $B = 2$, $C = 2\sqrt{3}$.

2.49. Determinar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si $A = 4$, $B = 8$, $C = 5$.

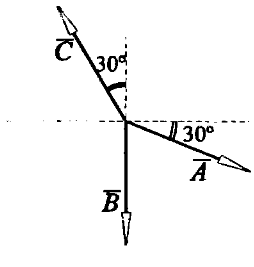

Fig. Prob. 2.48

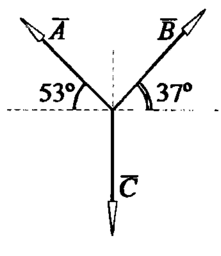

Fig. Prob. 2.49

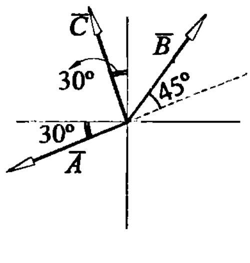

Fig. Prob. 2.50

2.50. Calcular el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado. $A = 55$, $B = 25\sqrt{2}$, $C = 15$.

2.51. Para el sistema vectorial mostrado, se sabe que $A = 2\sqrt{2}$, $B = 6$, y $C = 5$. ¿Cuál es el módulo de la resultante?.

2.52. En la circunferencia de 1 *m* de radio se encuentran los vectores $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ y $\bar{E}$, donde $B = D$, y $\theta = 30°$. ¿Cuál es el módulo de su resultante, si la escala es 50 *cm* <> 1 *N*. **O**: Centro de la circunferencia.

2.53. Sabiendo que la resultante de los vectores mostrados es horizontal, se pide calcular el módulo del vector $\bar{C}$. Además: $A = 18$, $B = 10$.

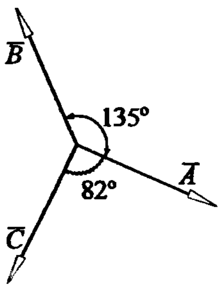

Fig. Prob. 2.51

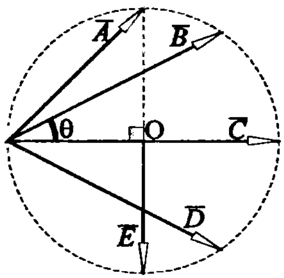

Fig. Prob. 2.52

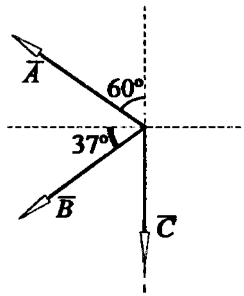

Fig. Prob. 2.53

2.54. Para el conjunto de vectores mostrado, calcular el módulo de su resultante, sabiendo que tiene dirección horizontal. Además $P = 30$.

2.55. La resultante de los vectores mostrados está en la dirección positiva del eje X, y su módulo es 4. Si además $A = 20\sqrt{2}$, y $C = 52$, se pide:

a) El módulo de $\bar{B}$.

b) La medida del ángulo θ.

2.56. Si la resultante del sistema vectorial está en la dirección de $\bar{B}$, siendo $C = 2$, y $D = 12$, calcular el módulo de $\bar{A}$.

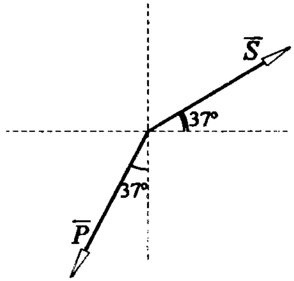

Fig. Prob. 2.54

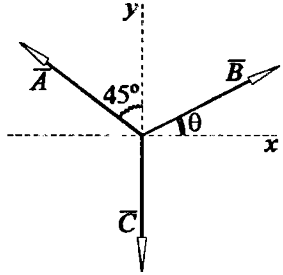

Fig. Prob. 2.55

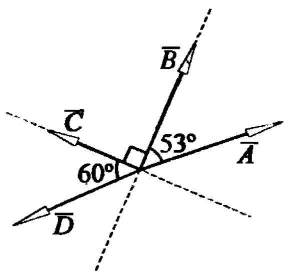

Fig. Prob. 2.56

2.57. Para el sistema vectorial mostrado, determinar el módulo del vector resultante, sabiendo que su dirección es vertical.

2.58. Para el sistema mostrado, hallar el valor de α para que la resultante sea vertical y hacia arriba, y cuyo valor exceda en 20% a A.

2.59. Hallar el valor de α para que la resultante del sistema forme 53° con el eje positivo de X ($\beta = 37°$).

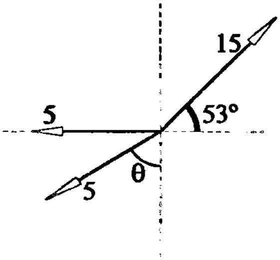

Fig. Prob. 2.57

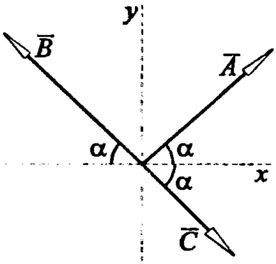

Fig. Prob. 2.58

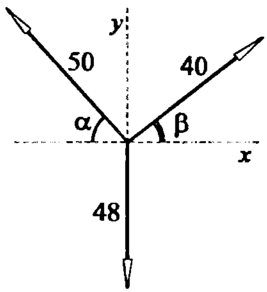

Fig. Prob. 2.59

2.60. Calcular D, si $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} = \overline{0}$, sabiendo además que $A = 5\sqrt{3}$, y $B = 2$.

2.61. En la figura mostrada, se sabe que $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} = \overline{0}$, $B = 3$, $C = 5\sqrt{3}$ y $D = 8$. Calcular:

a) El módulo del vector $\overline{A}$.

b) La medida del ángulo θ.

2.62. Si la resultante del sistema mostrado está en el eje X, y es igual a 3 900 N, encontrar:

a) Las tensiones (1) y (2), si $\alpha = 74°$.

b) ¿Qué valor debe tener α para que T_2 sea mínima?.

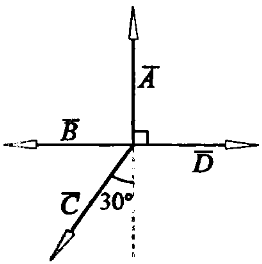

Fig. Prob. 2.60

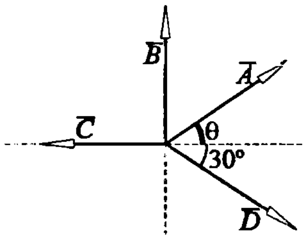

Fig. Prob. 2.61

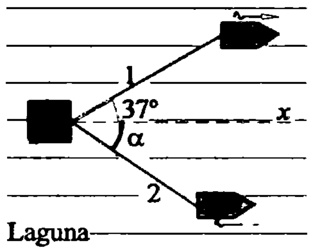

Fig. Prob. 2.62

Vectores unitarios cartesianos en el plano

2.63. Determinar un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

2.64. Calcular el módulo del vector diferencia $\overline{A} - \overline{B}$, si se sabe que: $\overline{A} = \overline{x} + \overline{y}$; $\overline{B} = \overline{P} + \overline{Q}$.

2.65. Determinar el vector $\overline{X} = \overline{A} - \overline{B} + \overline{C} - \overline{D}$.

2.66. El vector $\overrightarrow{AC}$ se ha descompuesto en 2 vectores paralelos a $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AN}$, siendo M y N puntos medios. ¿Cuál es la magnitud del vector paralelo a $\overrightarrow{AM}$?

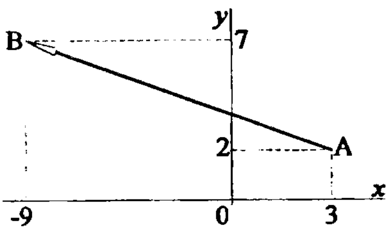

Fig. Prob. 2.63

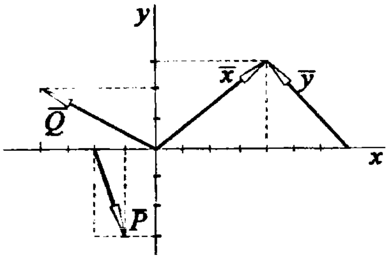

Fig. Prob. 2.64

2.67. En la figura mostrada, consideremos que $\overrightarrow{ON} = m\overrightarrow{OM} + n\overrightarrow{OM}'$. Hallar $(m + n)$, si se sabe que $OM' = 100$ es el vector ortogonal a $\overrightarrow{OM}$.

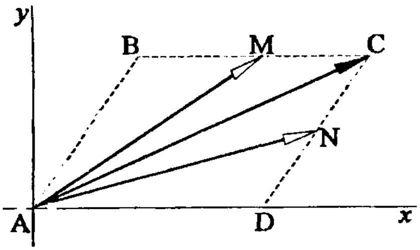

Fig. Prob. 2.66

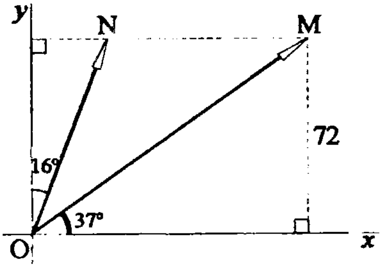

Fig. Prob. 2.67

2.68. Los vectores $\overline{A} = 9\bar{i} + 12\bar{j}$ y $\overline{B} = 12\bar{i} - m\bar{j}$ son codirigidos. Calcular el valor de m.

Vectores en el espacio

2.69. Determinar la expresión vectorial para el vector $\overline{V}$, si $V = 75$.

2.70. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado.

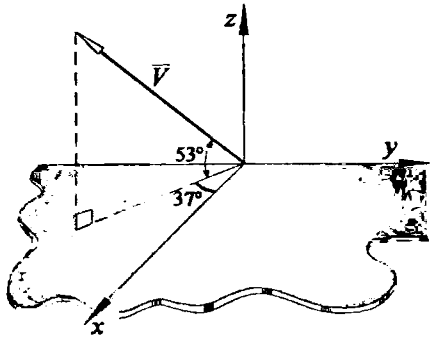

Fig. Prob. 2.69

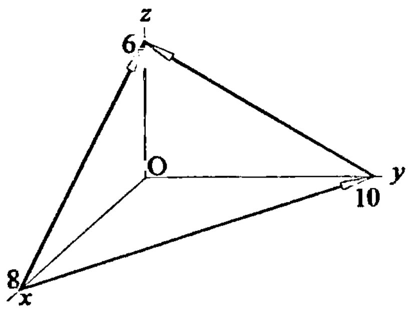

Fig. Prob. 2.70

2.71. Determinar una expresión vectorial para la fuerza $\overline{Q}$, cuyo módulo es 30 N.

2.72. Hallar el vector $\overline{F}$, si $\overline{F} = \overline{T} + \overline{P}$, sabiendo además que $T = 50\,N$, y $P = 52\,N$.

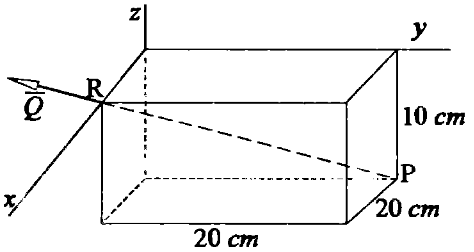

Fig. Prob. 2.71

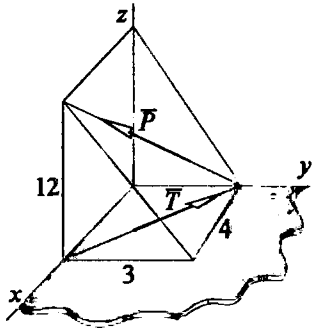

Fig. Prob. 2.72

2.73. Hallar el módulo y los cosenos directores del vector $\overline{a}$, que va desde (1; -1; 3) al punto medio del segmento comprendido entre el origen y el punto (6; -6; 4).

2.74. Hallar el vector resultante, si: $\overline{A} = 6\overline{i} + 10\overline{j} + 16\overline{k}$; $\overline{B} = 2\overline{i} - 2\overline{j}$, y $C = 10\sqrt{2}$.

2.75. Si $a = b = c = 60$, determinar la resultante del conjunto de vectores mostrado.

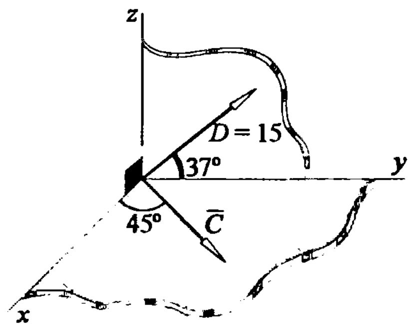

Fig. Prob. 2.74

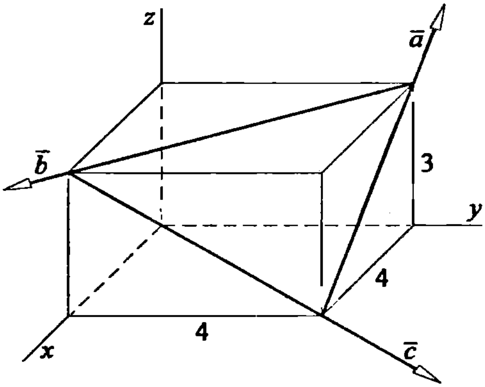

Fig. Prob. 2.75

2.76. Hallar la expresión vectorial de la fuerza resultante de $\overline{F}$ y $\overline{T}$, si $F = 25\,N$, y $T = 30\,N$.

2.77. Calcular el ángulo que forman los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$, si $\overline{A} = 8\overline{i} - 6\overline{j}$, y $\overline{B} = 24\overline{i} + 7\overline{j}$.

2.78. Determinar el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{PM}$ y $(\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PU})$. ST = SU, y $\measuredangle$ TSU = 74°.

2.79. Calcular la menor distancia que existe entre el punto P y la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto A, sabiendo que sus coordenadas son (2; 2; 1) y (4; 3; 12) respectivamente.

2.80. Un vector P tiene una dirección perpendicular al triángulo ABC, y posee un módulo de $8\sqrt{61}$. Determinar una expresión vectorial cartesiana para $\overline{P}$.

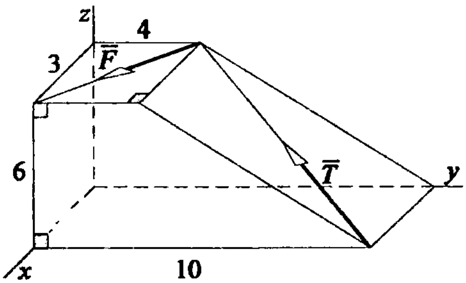

Fig. Prob. 2.76

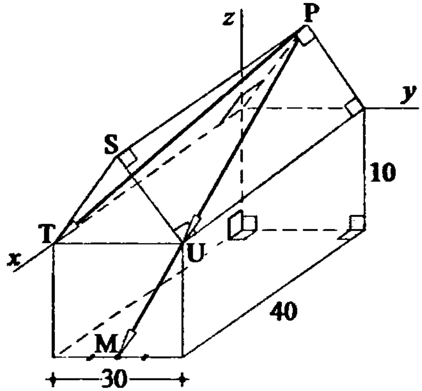

Fig. Prob. 2.78

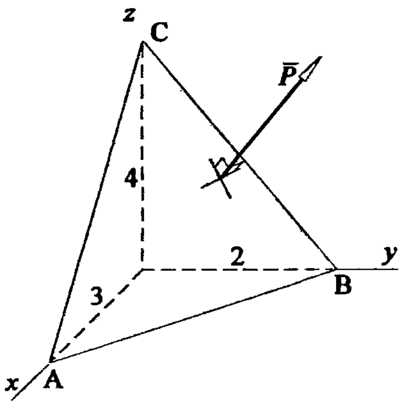

Fig. Prob. 2.80

2.81. Calcular la mínima distancia existente entre el punto **P** (2; 3; -1) y el plano que contiene a los puntos **A**, **B** y **C**, siendo sus coordenadas (-4; 3; -2), (1; 1; 0) y (2; -3; 1) respectivamente.

2.82. Calcular la mínima distancia que existe entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, si se sabe que los puntos **A** (-2; 0; 3) y **B** (4; 1; -2) están contenidos en la recta $\mathcal{L}_1$ y los puntos **C** (0; 1; -2) y **D** (-1; 1; 1) están contenidos en la recta $\mathcal{L}_2$.