CAMPO MAGNÉTICO (III)

Magnetismo en la materia

Campo Magnético

Magnetismo en la materia

- *Los átomos tienen momentos dipolares magnéticos debido al movimiento de sus electrones y al momento dipolar magnético intrínseco asociado al espin de los electrones*
- *En un material magnéticamente polarizado, los dipolos crean un campo magnético paralelo a los vectores del momento dipolar magnético*

Clasificación de materiales atendiendo a comportamiento de sus momentos magnéticos en un campo externo

- Paramagnéticos
- Diamagnéticos
- Ferromagnéticos

- ***Paramagnetismo***: surge de la alineación parcial de momentos magnéticos atómicos o moleculares en presencia de un campo magnético externo. Los momentos dipolares no interaccionan fuertemente entre sí.
- ***Ferromagnetismo:*** los momentos dipolares interactúan fuertemente entre sí. Se puede conseguir una gran alineación de dipolos magnéticos incluso con campos externos débiles.
- ***Diamagnetismo*****:** surge de los momentos dipolares magnéticos orbitales inducidos por un campo magnético externo. Los momentos inducidos son opuestos al campo externo y debilitan el campo total. Este efecto ocurre en todos los materiales pero como los momentos inducidos son pequeños respecto a los momentos magnéticos permanentes, el diamagnetismo está enmascarado por los efectos paramagnéticos o ferromagnéticos.

Campo Magnético

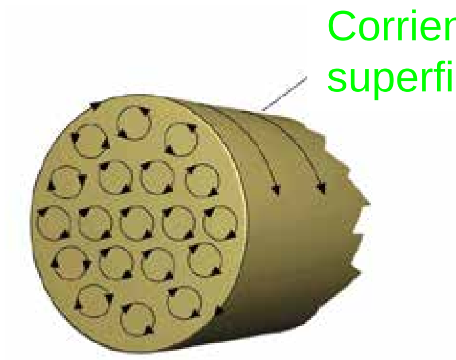
Imantación y susceptibilidad magnética

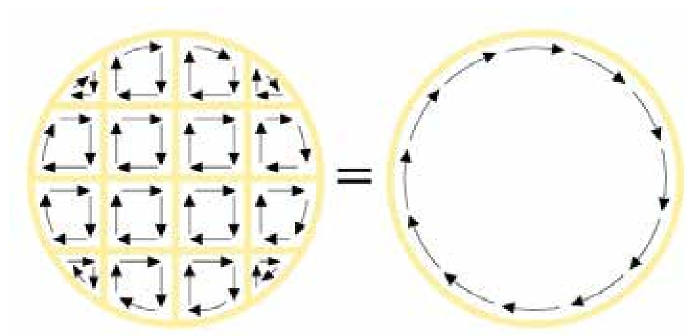
Cuando se sitúa un material en **B**, los momentos magnéticos tienden a alinearse ⟹ El material se magnetiza

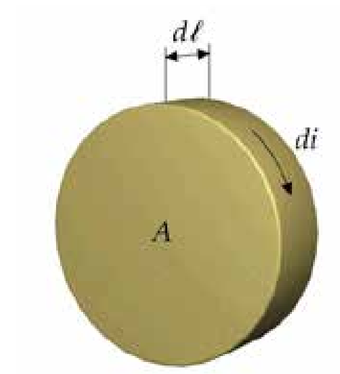
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$ *Imantación : momento dipolar por unidad de volumen*

Ejemplo, cilindro con imantación uniforme ⟹ Efecto macroscópico, corriente superficial

Corriente superficial







$$\mathrm{M} = \frac{dm}{dV} = \frac{Adi}{Adl} = \frac{di}{dl}$$

Campo creado por un solenoide:

$$B = \mu_0 nI$$

nI: corriente por unidad de longitud

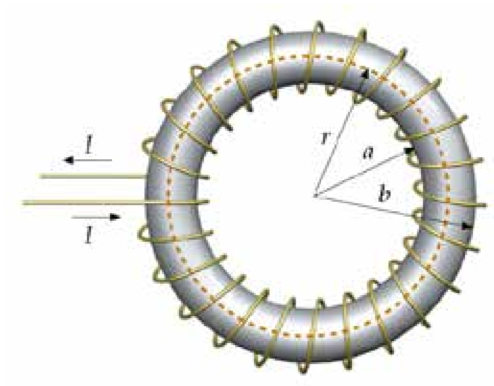
⟹

Campo creado en el material imantado (por analogía):

$$B_m = \mu_0 M$$

Campo Magnético

Imantación y susceptibilidad magnética



Situando un material magnético en un solenoide y aplicando un campo $\mathbf{B}_{ap}$ $\Longrightarrow$ *Campo magnético en el material:*

$$B = B_{ap} + \mu_0 M$$

Materiales paramagnéticos y ferromagnéticos: $\Longrightarrow$ $\mathbf{M} \,//\, \mathbf{B}_{ap}$

Materiales diamagnéticos $\Longrightarrow$ $\mathbf{M}$ se opone a $\mathbf{B}_{ap}$

En presencia de un material magnético

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) = \mu_0 (\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M})$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{(A/m)}$$

Vector intensidad de campo magnético

Medios lineales e isótropos

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

χ_m *: Susceptibilidad magnética*

$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ *: Permeabilidad magnética*

Campo Magnético

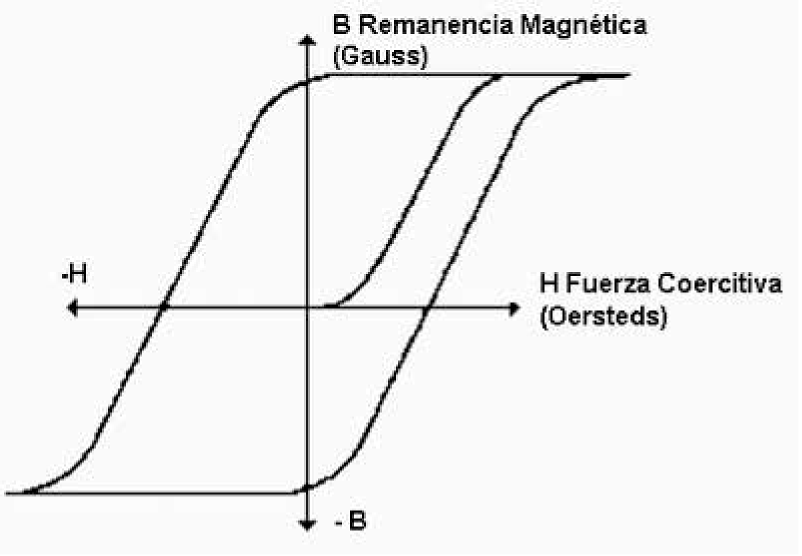
$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad \mu_r = 1 + \chi_m$$

Diamagnético: $\mu_r \leq 1 \qquad |\chi_m| << 1$

Paramagnético: $\mu_r \geq 1 \qquad 0 < \chi_m << 1$

Ferromagnético: $\mu_r >> 1 \qquad \chi_m >> 1$

Ciclo de histéresis



INTRODUCCIÓN

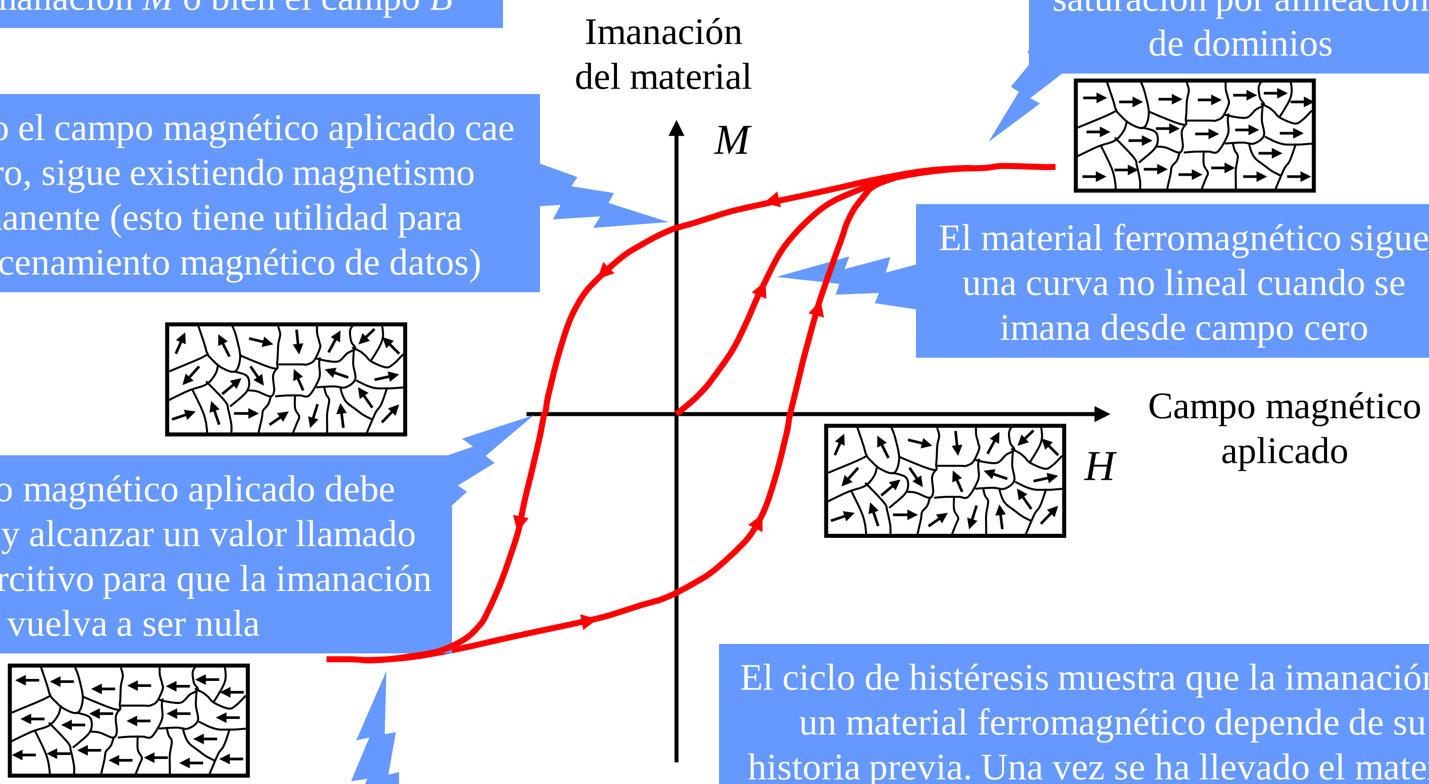
HISTÉRESIS MAGNÉTICA

En el eje de ordenadas puede representarse bien la imanación *M* o bien el campo *B*

Material imanado hasta saturación por alineación de dominios

Cuando el campo magnético aplicado cae a cero, sigue existiendo magnetismo remanente (esto tiene utilidad para almacenamiento magnético de datos)

El material ferromagnético sigue una curva no lineal cuando se imana desde campo cero



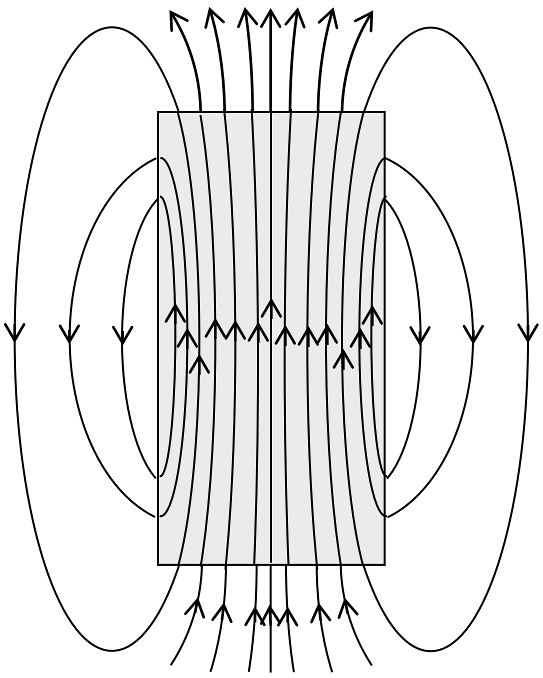
El campo magnético aplicado debe invertirse y alcanzar un valor llamado campo coercitivo para que la imanación vuelva a ser nula

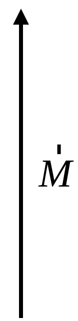
Saturación en sentido

El ciclo de histéresis muestra que la imanación de un material ferromagnético depende de su historia previa. Una vez se ha llevado el material a saturación el campo aplicado *H* puede ser reducido a cero pero el material retiene buena parte de su imanación (“recuerda su historia”).

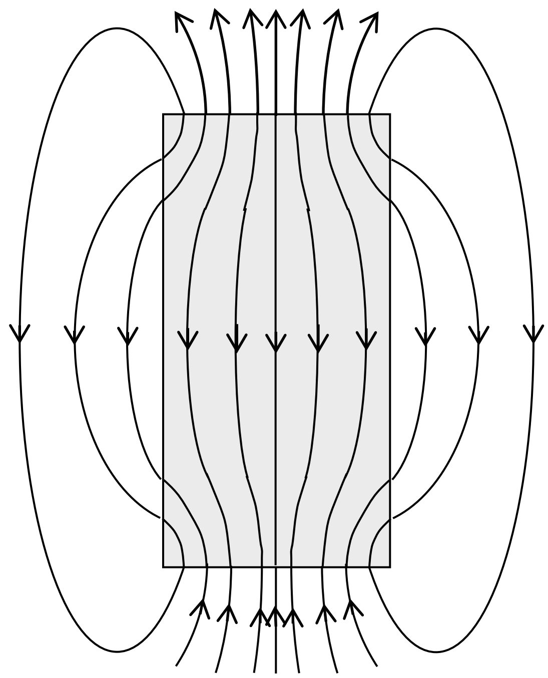
MATERIALES FERROMAGNÉTICOS. LÍNEAS DE CAMPO

Líneas de campo ***B***

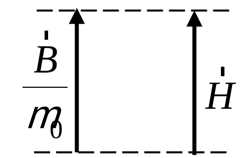




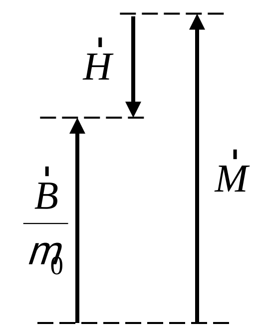
Líneas de campo ***H***



En el espacio libre



Dentro del material ferromagnético



$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

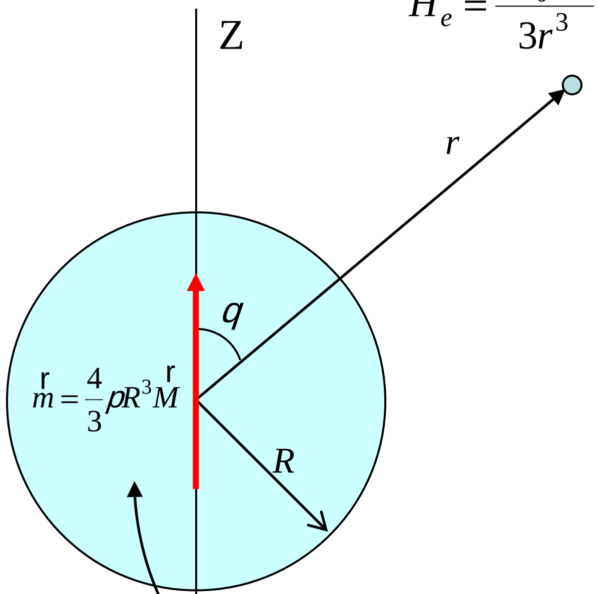
INTRODUCCIÓN (3)

ESFERA FERROMAGNÉTICA UNIFORMEMENTE IMANADA

Imanación $\vec{M} = M_0 \vec{u}_z$

$$\vec{H}_e = \frac{M_0 R^3}{3r^3}\left(2\vec{u}_r \cos\theta + \vec{u}_\theta \sin\theta\right)$$

$$\vec{B}_e = \mu_0 \frac{M_0 R^3}{3r^3}\left(2\vec{u}_r \cos\theta + \vec{u}_\theta \sin\theta\right)$$



Fuera de la esfera uniformemente imanada

El mismo campo que produciría un dipolo magnético $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$ centrado en la esfera

Dentro de la esfera uniformemente imanada

Campos uniformes. El campo *H* tiene sentido opuesto a la imanación (campo desimanador)

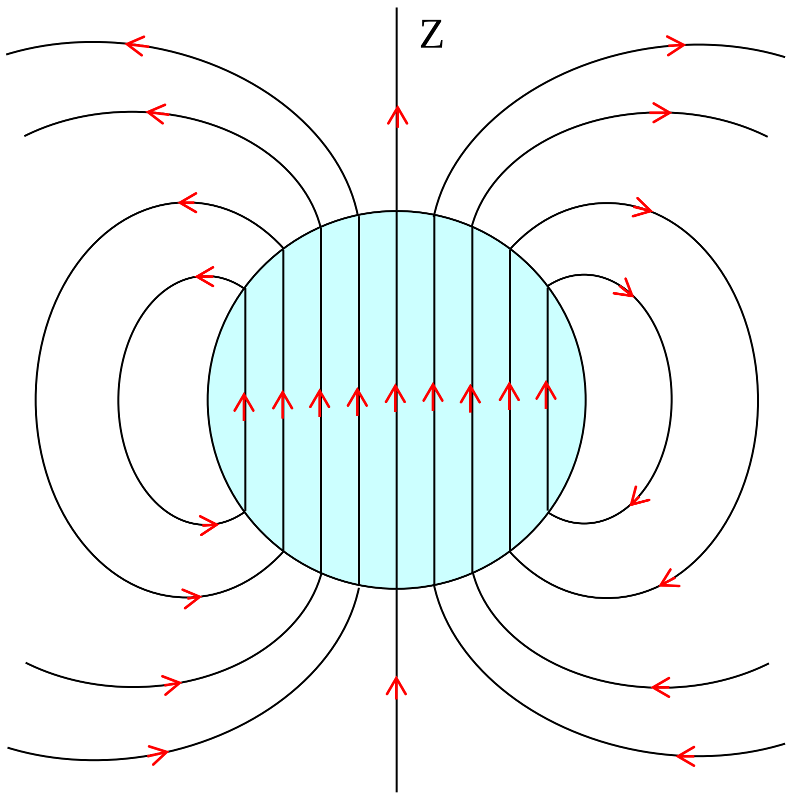
$$\vec{H}_i = \frac{M_0}{3}\left(-\vec{u}_r \cos\theta + \vec{u}_\theta \sin\theta\right) = -\frac{\vec{M}}{3}$$

$$\vec{B}_i = \mu_0\left(\vec{M} + \vec{H}_i\right) = \mu_0\left(\vec{M} - \frac{\vec{M}}{3}\right) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$$

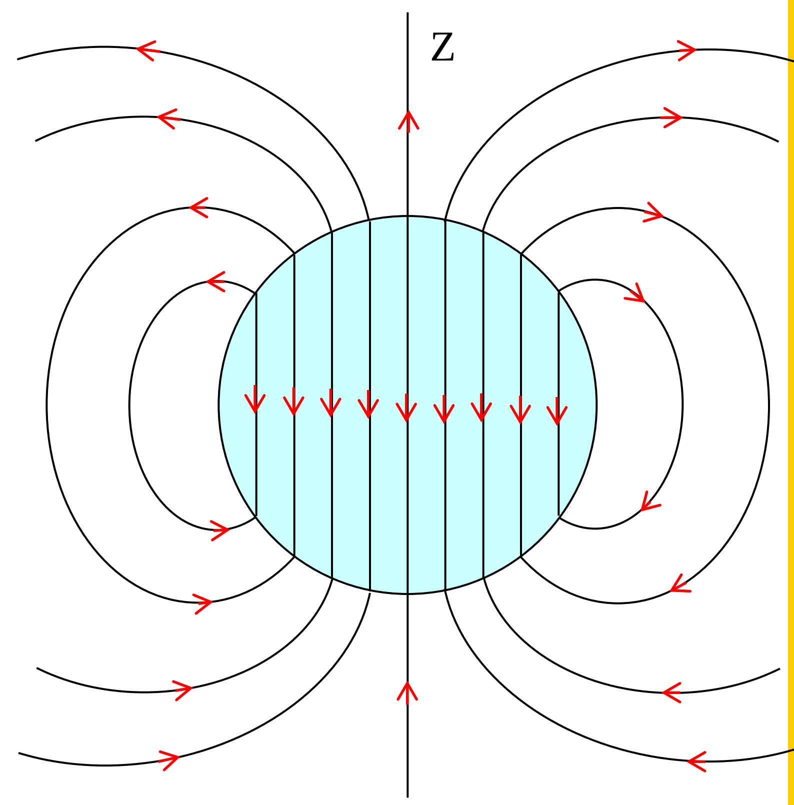
INTRODUCCIÓN (4)

ESFERA FERROMAGNÉTICA UNIFORMEMENTE IMANADA (Cont)

Imanación $\vec{M} = M_0 \vec{u}_z$



Líneas de campo $\vec{B}$



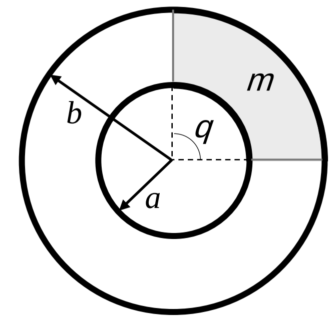
Líneas de campo $\vec{H}$

PROBLEMA 1

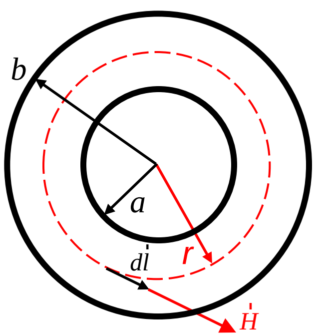
Dos conductores indefinidos coaxiales de radios *a* y *b* transportan corrientes iguales +*I* y –*I* (igual magnitud y sentidos contrarios). En un sector del volumen comprendido entre ambos existe un material lineal de permeabilidad μ, subtendidendo un ángulo θ (véase corte transversal en la figura). Se pide:

a) Los campos ***H*** y ***B*** entre ambos conductores si no existiese entre ellos ningún material magnético.

b) Los campos ***H***, ***B*** y ***M*** en la situación planteada en el enunciado.



Si no existiese ningún material magnético



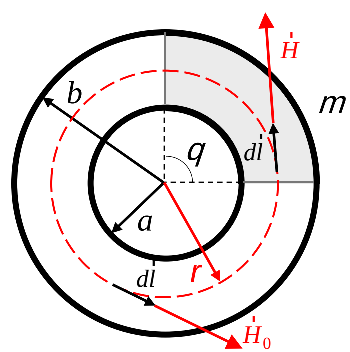
Suponemos saliente la corriente del conductor interno

Ampère: $\oint \vec{H}\,d\vec{l} = I$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi$$

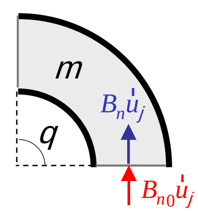
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi$$

Existiendo material magnético $\oint \vec{H}\,d\vec{l} = I$



$$H_0(2\pi - \theta)\rho + H\theta\rho = I$$

Las componentes del campo ***B*** normales a las superficies de separación de ambos medios han de ser continuas.



$$B_{n0} = B_n$$

$$B_{n0} = \mu_0 H_0 \qquad B_n = \mu H$$

$$\mu_0 H_0 = \mu H$$

PROBLEMA 1 (Continuación)

$$H_0(2\pi-\theta)\rho + H\theta\rho = I$$

$$\mu_0 H_0 = \mu H$$

$$H_0(2\pi-\theta)\rho + \frac{\mu_0}{\mu}H_0\theta\rho = I \qquad H_0 = \frac{\mu I}{\left(\mu(2\pi-\theta)+\mu_0\theta\right)\rho}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\mu I}{\left(\mu(2\pi-\theta)+\mu_0\theta\right)\rho}\vec{u}_\varphi \qquad \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{\left(\mu(2\pi-\theta)+\mu_0\theta\right)\rho}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0 = \frac{\mu_0\mu I}{\left(\mu(2\pi-\theta)+\mu_0\theta\right)\rho}\vec{u}_\varphi \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{\mu_0\mu I}{\left(\mu(2\pi-\theta)+\mu_0\theta\right)\rho}\vec{u}_\varphi$$

El campo ***B*** es el mismo en ambos casos

Imanación en el material magnético

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \longrightarrow \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \qquad \vec{M} = \frac{(\mu-\mu_0)I}{\left(\mu(2\pi-\theta)+\mu_0\theta\right)\rho}\vec{u}_\varphi$$

PROBLEMA 2

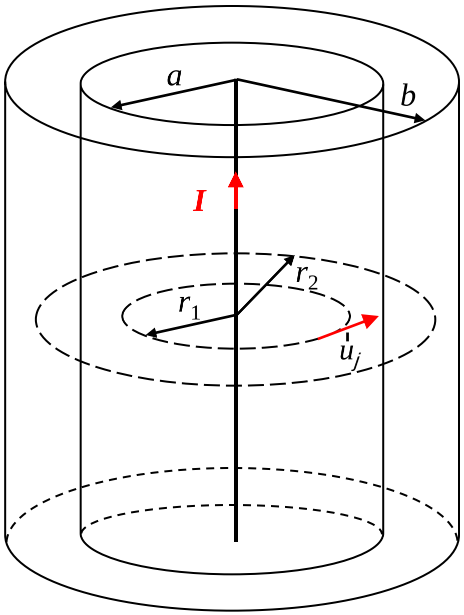
Un filamento rectilíneo indefinido que transporta una corriente *I* es el eje de un tubo cilíndrico también indefinido, de radios interior y exterior *a* y *b* respectivamente, hecho de un material magnético lineal de permeabilidad relativa μ_r. Determine:

a) Los campos ***H***, ***B*** y ***M*** alrededor del filamento.

b) Las corrientes de imanación en el tubo.

Cálculo de los campos: se distinguen tres regiones alrededor del filamento
$$\begin{cases} 1.\ r_1 < a \\ 2.\ a \le r_2 \le b \\ 3.\ r_3 > b \end{cases}$$

Región 1. $r_1 < a$ Aplicamos el teorema de Ampère a una circunferencia centrada en el hilo de radio r_1



$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I$$

Por la simetría del problema, el campo ***H*** está en cada punto en la dirección del unitario $\vec{u}_\varphi$

$$\vec{M}_1 = 0$$

$$H_1 \cdot 2\pi r_1 = I \qquad \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r_1}\vec{u}_\varphi \qquad \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\vec{u}_\varphi$$

Región 2. $a \le r_2 \le b$ Dentro del material magnético

$$\oint \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I \qquad H_2 \cdot 2\pi r_2 = I \qquad \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r_2}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B}_2 = \mu_r \mu_0 \vec{H}_2 = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r_2}\vec{u}_\varphi \qquad \vec{M}_2 = \frac{(\mu_r - 1) I}{2\pi r_2}\vec{u}_\varphi$$

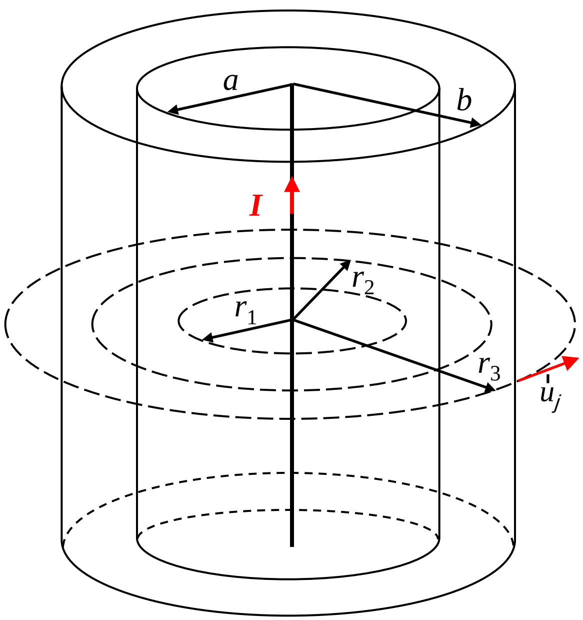
$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2$$

PROBLEMA 2 (Continuación)

Región 3. $r_3 > b$ $\quad \oint \vec{H}_3 \cdot d\vec{l} = I$

$$H_3 \cdot 2\pi r_3 = I \qquad \vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi r_3}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B}_3 = \mu_0 \vec{H}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_3}\vec{u}_\varphi \qquad \vec{M}_3 = 0$$



Corrientes de imanación

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (\text{A/m}^2)$$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{u}_n \quad (\text{A/m})$$

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{u}_r\left(\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial M_z}{\partial \varphi}} - \cancel{\frac{\partial M_\varphi}{\partial z}}\right) + \vec{u}_\varphi\left(\cancel{\frac{\partial M_r}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial M_z}{\partial r}}\right) + \vec{u}_z \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial M_r}{\partial \varphi}}\right)$$

Véase que en la región 2 la forma de ***M*** es

$$M_{2\varphi} = f(r_2) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r_2}$$

$$M_{2r} = 0 \qquad M_{2z} = 0$$

Los términos tachados con aspa son nulos porque $\boldsymbol{M_2}$ no tiene componentes *r* ni *z*.

El término tachado con flecha inclinada a la derecha es nulo porque la derivada de $\boldsymbol{M_{2\varphi}}$ respecto a *z* es cero.

El término tachado con flecha inclinada a la izquierda es nulo porque $\boldsymbol{rM_{2\varphi}}$ es constante y su derivada respecto a *r* es cero.

Véase que $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$

No hay corrientes volumétricas de imanación

PROBLEMA 2 (Continuación)

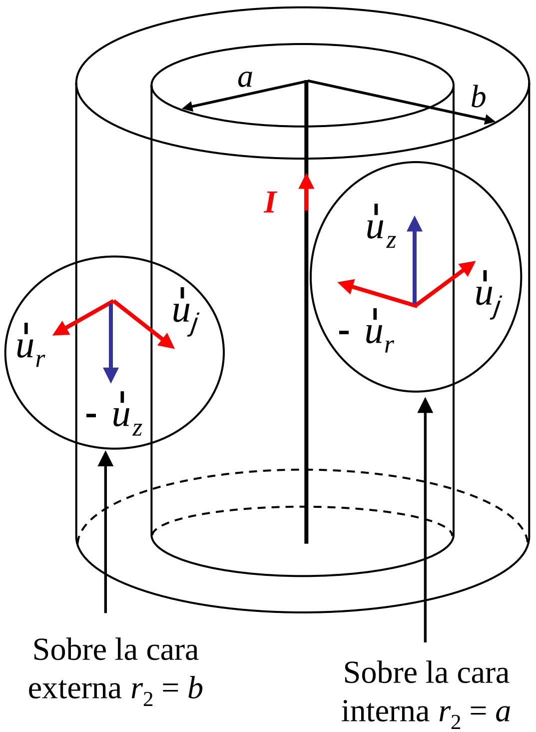
<u>Densidades de corrientes superficiales de imanación</u> $\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{u}_n$

En $r_2 = a$ $\quad \vec{u}_n = -\vec{u}_r$

$$\vec{K}_m\Big|_{r_2=a} = \vec{M}_2(r_2=a) \times \vec{u}_n = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a}\vec{u}_\varphi \times (-\vec{u}_r) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a}\vec{u}_z$$

En $r_2 = b$ $\quad \vec{u}_n = \vec{u}_r$

$$\vec{K}_m\Big|_{r_2=b} = \vec{M}_2(r_2=b) \times \vec{u}_n = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b}\vec{u}_\varphi \times \vec{u}_r = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b}(-\vec{u}_z)$$



<u>Corrientes de imanación</u>

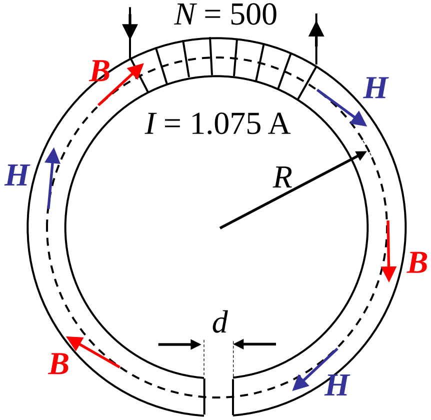
Superficie interna $\quad I_m(a) = 2\pi a \cdot \dfrac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} = (\mu_r - 1)I \quad \uparrow$

Superficie externa $\quad I_m(a) = 2\pi b \cdot \left[\dfrac{-(\mu_r - 1)I}{2\pi b}\right] = -(\mu_r - 1)I \quad \downarrow$

Pregunta adicional: ¿podrían obtenerse los valores de los campos $\boldsymbol{B}_2$ y $\boldsymbol{B}_3$ usando el resultado recién obtenido?

PROBLEMA 3

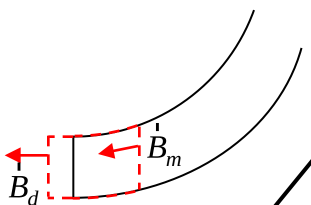
Un toroide de material magnético lineal de permeabilidad $\mu_r = 100$ tiene un radio medio R = 20 cm. El toroide tiene un entrehierro d = 1 cm y un bobinado de 500 espiras, por el que se hace circular una corriente de 1075 mA. Determine los campos ***B*** y ***H*** en el entrehierro.



Los campos ***H*** y ***B*** están confinados en el interior del material y en el entrehierro, por la simetría del problema sus direcciones son tangentes a la circunferencia en todos los puntos de la misma.

Ecuación campo ***H*** $\quad \oint \vec{H}\, d\vec{l} = NI \quad\quad \underset{\text{material}}{H_m}(2\pi R - d) + \underset{\text{entrehierro}}{H_d}\, d = NI$

Ecuación campo ***B*** $\quad \oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \quad\quad B_d = B_m$



En las paredes laterales del tubo el flujo de ***B*** es nulo, sólo hay flujo en las bases. Por tanto la condición de flujo nulo a través de la superficie cerrada da: $B_d = B_m$

$$\mu_0 H_d = \mu H_m$$

$$H_m(2\pi R - d) + H_d d = NI$$

$$\mu H_m = \mu_r \mu_0 H_m = \mu_0 H_d$$

$$H_m(2\pi R - d) + \mu_r H_m d = NI$$

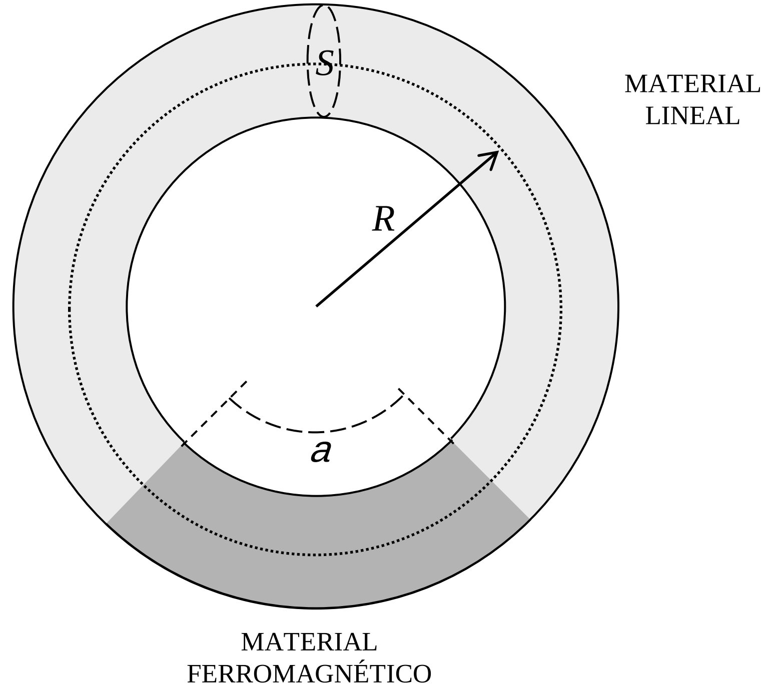
$$H_m = \frac{NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)d}$$

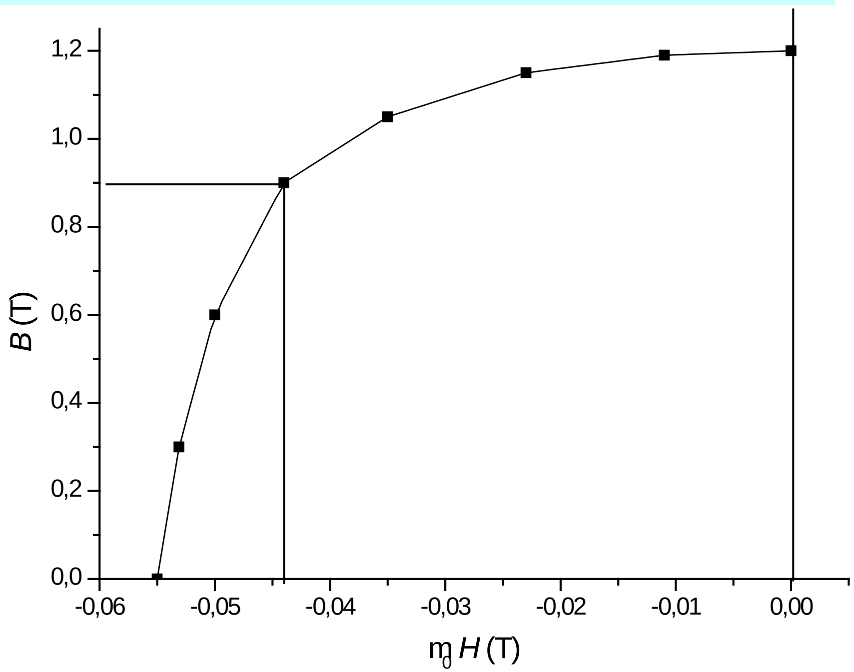
$$H_d = \frac{\mu}{\mu_0} H_m = \mu_r H_m = \frac{\mu_r NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)d} = 23925 \text{ A/m}$$

$$B_d = \mu_0 H_d = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)d} = 0.030 \text{ T}$$

PROBLEMA 4

Un circuito magnético consiste en un toroide de radio medio R y sección recta S formado por dos sectores: 1. Un material ferromagnético imanado que cubre un ángulo α, y cuya curva de desimanación se presenta en la figura adjunta, y 2. El resto del toroide formado por material magnéticamente lineal cuya permeabilidad relativa es μ_r. Usando los valores numéricos dados en el apartado de datos, determine la imanación de los dos materiales.





Datos: α = 30º; μ_r = 100; R = 20 cm

PROBLEMA 4 (Continuación)

Ecuaciones del circuito magnético (para H y para B)

(La trayectoria de integración para H es la línea punteada de radio igual al radio medio R)

Subíndice 0 para el material lineal; subíndice f para el ferromagnético

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = 0 \qquad H_0(2\pi - \alpha)R + H_f \alpha R = 0$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \qquad B_f = B_0$$

El campo B no tiene discontinuidades al pasar de un material a otro

$$H_0 = -\frac{H_f \alpha}{2\pi - \alpha}$$

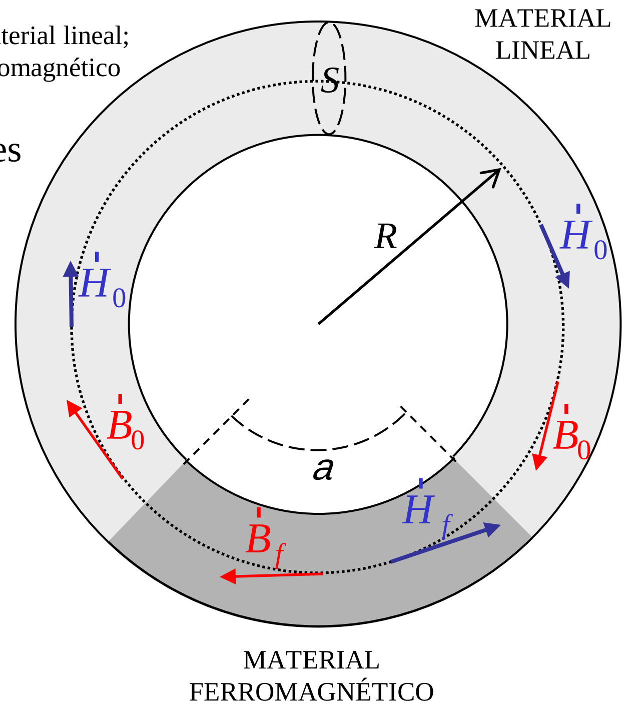
Relación entre H_0 y B_0 en el material lineal

$$B_0 = \mu_r \mu_0 H_0 = -\mu_r \mu_0 \frac{H_f \alpha}{2\pi - \alpha}$$

Relación entre B_f y H_f en el material ferromagnético

$$B_f = B_0 = -\mu_r \mu_0 \frac{H_f \alpha}{2\pi - \alpha}$$

$$\boxed{\frac{B_f}{\mu_0 H_f} = -\frac{\mu_r \alpha}{2\pi - \alpha}}$$



Datos: $\alpha = 60°$; $\mu_r = 100$; $R = 20$ cm

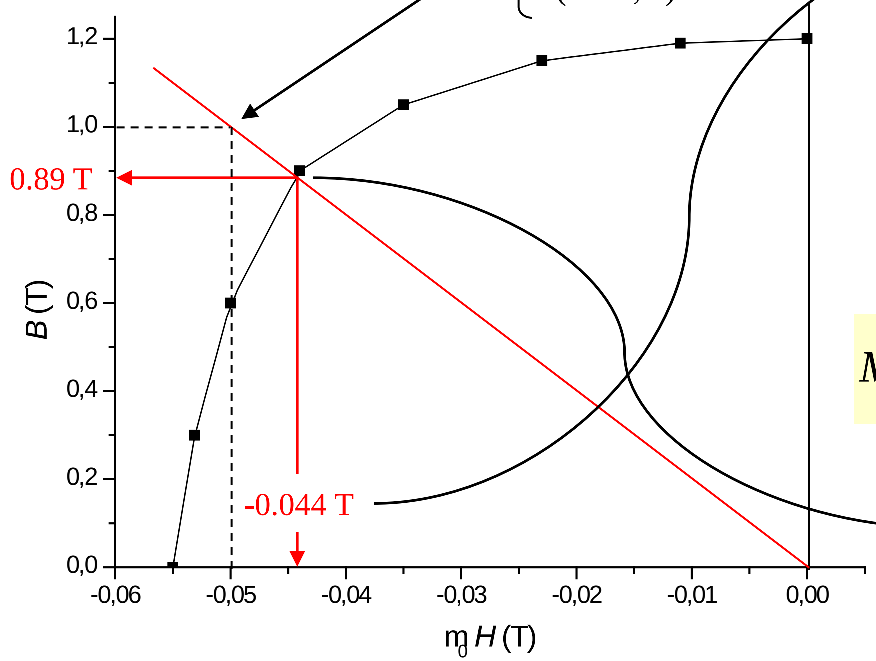
Esta es una relación lineal donde B_f se expresa en función de $\mu_0 H_f$, y el punto de corte de la misma con la curva de desimanación nos permitirá calcular la imanación del material ferromagnético (véase transparencia siguiente).

Valor numérico (véase que es independiente de R)

$$\frac{B_f}{\mu_0 H_f} = -\frac{100 \times \pi/3}{2\pi - \pi/3} = -20$$

PROBLEMA 4 (Continuación)

$$B_f = -20(\mu_0 H_f) \begin{cases} (0,\ 0) \\ (-0.05,\ 1) \end{cases}$$



$$\mu_0 H_f = -0.044\ \text{T}$$

$$H_f = \frac{-0.044}{4\pi \times 10^{-7}} = -3.50 \times 10^4\ \text{A/m}$$

$$\vec{H}_f = \frac{\vec{B}_f}{\mu_0} - \vec{M}_f \qquad \vec{M}_f = \frac{\vec{B}_f}{\mu_0} - \vec{H}_f$$

$$M_f = \frac{0.89}{4\pi \times 10^{-7}} + 3.50 \times 10^4 = 7.43 \times 10^4\ \text{A/m}$$

$$B_0 = B_f = \mu_r \mu_0 H_0 \qquad H_0 = \frac{B_0}{\mu_r \mu_0}$$

$$H_0 = \frac{0.89}{100 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 7.08 \times 10^3\ \text{A/m}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M}_0$$

$$M_0 = \frac{B_0}{\mu_0} - H_0 = \frac{0.89}{4\pi \times 10^{-7}} - 7.08 \times 10^3 = 7.01 \times 10^5\ \text{A/m}$$

Material	c_m a 20 ºC	μ_r
Aluminio	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	1,000023
Bismuto	$-1{,}66 \cdot 10^{-5}$	0,9999834
Cobre	$-0{,}98 \cdot 10^{-5}$	0,9999902
Diamante	$-2{,}2 \cdot 10^{-5}$	0,999978
Oro	$-3{,}6 \cdot 10^{-5}$	0,999964
Magnesio	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	1,000012
Mercurio	$-3{,}2 \cdot 10^{-5}$	0,999968
Plata	$-2{,}6 \cdot 10^{-5}$	0,999974
Sodio	$-0{,}24 \cdot 10^{-5}$	0,9999976
Titanio	$7{,}06 \cdot 10^{-5}$	1,0000706
Wolframio	$6{,}8 \cdot 10^{-5}$	1,000068
Hidrógeno(1 atm)	$-9{,}9 \cdot 10^{-9}$	0,99999999
Dióxido de carbono (1 atm)	$-2{,}3 \cdot 10^{-9}$	1
Nitrógeno (1 atm)	$-5{,}0 \cdot 10^{-9}$	1
Oxígeno (1 atm)	$2090 \cdot 10^{-9}$	1,00000209

ENERGÍA MAGNÉTICA.

Debido a que la fem inducida por un inductor evita que una batería establezca una corriente instantánea, la batería tiene que efectuar trabajo contra el inductor para crear una corriente.

Parte de la energía suministrada por la batería se convierte en calor que se disipa en el resistor, en tanto que la energía restante se almacena en el inductor. **Para calcular la energía almacenada en un inductor lo podemos hacer mediante la siguiente ecuación**.

$$U_B = 1/2 L I^2$$

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

- Donde U_B= energía asociada a un inductor en Joules.
- L= inductancia en Henrys.
- I = intensidad de corriente del circuito en Amperes (A).

- Problemas (muy) simples para fijar ideas

Problemas de energía asociada a un campo magnético.

- 1.- Determinar la energía almacenada por un toroide de 10 mil vueltas, con una longitud media de 2 metros y un área de sección transversal de 20 cm^2, si la corriente que entra al toroide es de 20 amperes.
- Datos Fórmulas Sustitución
- UB=? $L=\frac{\mu o N^2 A}{l}$ $L=\frac{12.56x10^{-7}\ Tm/Ax\ 10000^2 x0.00024\ m^2.}{2\ m}$
- N=10000
- A=0.20 m^2. $UB=1/2LI^2$.
- μo=12.56x10-7 Tm/A L=**0.1256**
- l=2 metros
- I=20 A UB=(0.5)(0.1256) (20 A)^2.
  - » **UB= 25.12 Joules**

- 2.- Dos inductores L_1= 85 μH y L_2=200 μH se conectan en un circuito que suministra una corriente de 850 miliamperes. Calcule la energía almacenada en cada inductor.
- Datos Fórmula Sustitución.
- UB_1=? $UB=1/2LI^2$. $UB_1=0.5x85x10^{-6}Hx$ (850x10-3 $A)^{2}$.
- UB_2=? UB_1= **$3.07\ x10^{-5}$ Joules.**
- $L_1= 85x10^{-6}$ H $UB_2=0.5x200x10^{-6}\ Hx(850x10^{-3}\ A)^2$
- L2= $200x10^{-6}$ H UB_2= **$7.225x10^{-5}$ Joules**
- I = $850x10^{-3}$ A

- 2.- Dos inductores L_1= 85 μH y L_2=200 μH se conectan en un circuito que suministra una corriente de 850 miliamperes. Calcule la energía almacenada en cada inductor.
- Datos Fórmula Sustitución.
- UB_1=? $UB=1/2LI^2$. $UB_1=0.5x85x10^{-6}Hx$ (850x10-3 $A)^{2.}$
- UB_2=? UB_1= **3.07 x10^{-5} Joules.**
- $L_1= 85x10^{-6}$ H $UB_2=0.5x200x10^{-6}$ $Hx(850x10^{-3}$ $A)^2$
- L2= $200x10^{-6}$ H UB_2= **7.225x10^{-5} Joules**
- I = $850x10^{-3}$ A

- 3.- Un solenoide de núcleo de aire con 68 vueltas mide 8 cm de largo y tiene un diámetro de 1.2 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.77 amperes?.
- Datos Fórmulas Sustitución
- UB=? $A = \pi r^2$.
- $A = 3.14 \times (0.006\ m)^2 = 1.13 \times 10^{-4}\ m^2$.

$$L = \frac{\mu o N^2 A}{l} \qquad L = \frac{12.56 \times 10^{-7}\ Tm/A \times 68^2 \times 1.13 \times 10^{-4}\ m^2}{0.08\ m}$$

- N = 68
- Φ= 0.012 m.
- r = 0.006 m . $UB = 1/2 L I^2$.
- $\mu o = 12.56 \times 10^{-7}$ Tm/A $L = 8.2 \times 10^{-6}$ Henrys.
- l = 0.08 m
- I = 20 A $UB = (0.5)(8.2 \times 10^{-6}\ \text{Henrys})\ (0.77\ A)^2$.
- UB= **2.44 μJ**.

- 4. Una batería de 10 volts, un resistor de 5 Ω y un inductor de 10 henrys se conectan en serie. Calcular la energía almacenada en el campo magnético del inductor.
- Fórmulas: I = V/R
- **UB =1/2LI^2.**
- **Sustitución y resultado:**
- **I = 10 V/5** Ω = 2 A.
- **UB = 0.5 x 10 H x (2 A)^2. =20 Joules.**

- 5. Un circuito está constituido por una batería de 24 volts, una resistencia de 8 Ω y un inductor de 4 henrys. ¿Cuánta energía se almacena en el inductor?
- Fórmulas: $I = V/R$
- **$UB = 1/2LI^2$.**
- **Sustitución y resultado:**
- **$I = 24\ V/8$** $\Omega = 3$ A.
- **$UB = 0.5 \times 4\ H \times (3\ A)^2. = 18$ Joules.**

- 6. n circuito está constituido por una batería de 60 volts, una resistencia de 12 Ω y un inductor de 8 henrys. ¿Cuánta energía se almacena en el inductor?
- Fórmulas: $I = V/R$
- **$UB = 1/2LI^2$.**
- **Sustitución y resultado:**
- **$I = 60\ V/12$** $\Omega = 5\ A$.
- **$UB = 0.5 \times 8\ H \times (5\ A)^2$. = 100 Joules.**

- 7. Calcule la energía asociada al campo magnético de un solenoide de 200 vueltas, en el cual una corriente de 1.75 amperes produce un flujo de 3.70×10^{-4} wb en cada vuelta.
- Datos
- $U_B = ?$
- $N = 200$
- $I = 1.75$ A
- $\Phi = 3.70 \times 10^{-4}$ wb

Fórmulas

$$L = \frac{N\,\Phi}{I}$$

$$U_B = 1/2LI^2.$$

- Sustitución y resultado:
- $L = \dfrac{200 \times 3.70 \times 10^{-4}\ \text{wb}}{1.75\ \text{A}} = 0.0422$ Henrys.
- $U_B = 0.5 \times 0.0422$ Henrys $\times (1.75\ \text{A})^2 =$ **6.46×10^{-2} Joules**.

- 8. Un solenoide de núcleo de aire con 68 vueltas mide 8 cm de largo y tiene un diámetro de 1.2 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.77 amperes?
- Datos — Fórmulas
- $N = 68$ — $A = \pi r^2$.
- $r = 6 \times 10^{-3}$ m — $L = \dfrac{\mu_o N^2 A}{l}$
- $U_B = 1/2LI^2$.
- $l = 0.08$ m — Sustitución y resultado:
- $U_B = ?$ — $A = 3.14 \times (6 \times 10^{-3}\ m)^2$.
- $I = 0.77$ A — $A = 1.13 \times 10^{-4}\ m^2$.
- $L = \dfrac{12.56 \times 10^{-7}\ wb/A.m \times (68)^2 \times 1.13 \times 10^{-4}\ m^2.}{0.08\ m.}$
- $L = 8.20 \times 10^{-6}$ Henrys.
- $U_B = 0.5 \times 8.20 \times 10^{-6}\ H \times (0.77\ A)^2 =$ **2.44×10^{-6} J ó 2.44 μJ**.

- 9. El campo magnético dentro de un solenoide superconductor es de 4.5 Teslas. El solenoide tiene un diámetro interior de 6.2 cm y una longitud de 26 cm. Determine la energía almacenada en el campo magnético dentro del solenoide.
- Datos — Fórmula
- $B = 4.5\ T$ — $A = \pi r^2$.
- $U_B = \dfrac{B^2}{2\ \mu o}(Al)$
- $r = 0.031\ m$
- $l = 0.26\ m$ — $A = 3.14 \times (0.031\ m)^2$.
- $U_B = ?$ — $A = 3.01 \times 10^{-3}\ m^2$.
- $U_B = \dfrac{(4.5\ T)^2}{2 \times 12.56 \times 10^{-7}\ wb/A\ .m}(3.01 \times 10^{-3}\ m^2 .x\ 0.26\ m)$
- $U_B =$ **6.31×10^3 J ó 6.31 kJoules**.

- 10. Dos inductores, L_1 = 85 µH y L_2 = 200 µH, se conectan en serie a un suministro de potencia de 850 miliamperes. Calcule la energía almacenada en cada inductor.
- Datos — Fórmula
- $L_1 = 85 \times 10^{-6}$ H — $U_B = ½ LI^2$.
- $L_2 = 200 \times 10^{-6}$ H
- $I = 850 \times 10^{-3}$ A
- U_{B1} =?
- U_{B2} = ?
- Sustitución y resultado:
- $U_{B1} = 0.5 \times 85 \times 10^{-6}$ H x $(850 \times 10^{-3}$ A$)^2$ =**30.7×10^{-6} J** ó **30.7 µJ**.

- $U_{B2} = 0.5 \times 200 \times 10^{-6}$ H x $(850 \times 10^{-3}$ A$)^2$ = **72.2×10^{-6} J** ó
- **72.2 µJ**

Densidad de energía magnética.

- La energía almacenada por un inductor puede expresarse por unidad de volumen, lo que nos da el concepto de **densidad de energía en el campo magnético,** que es un concepto similar al de densidad de energía en el campo eléctrico visto anteriormente. Por simplicidad considere un solenoide cuya inductancia está dada por la ecuación.
- $$L = \frac{\mu_o N^2 A}{l}$$

- El campo magnético de un solenoide está dado por la ecuación $B=\mu oNI$. Despejando I de esta ecuación obtenemos: $I=\frac{B}{\mu oN}$
- En general queda de la siguiente forma:
- $UB=1/2LI^2=1/2\mu oN^2A/l(B/\mu oN)^2=(B^2/2\mu o)(AL)$
- Debido a que AL es el volumen del solenoide, la energía almacenada por unidad de volumen en un campo magnético es la siguiente:
- $\mathbf{U_B=\frac{UB}{AL}=\frac{B^2}{2\mu o}.}$

- Donde:
- U_B = Densidad de energía magnética asociada a un inductor.
- UB = Energía almacenada en un inductor.
- B = Campo magnético.
- μo= Constante de permeabilidad del aire 12.56 x10^{-7} Tm/A.

Problemas de densidad de energía magnética.

- 1.- Determine la densidad de energía magnética y la energía total almacenada de un toroide que tiene 200 vueltas con una longitud de 1 metro y un área de 0.010 m^2 y por ella circula una corriente de 20 A.
- Datos Fórmula Sustitución
- UB=? UB= $1/2LI^2$. $UB=0.5\times12.56\times10^{-7}$ Tm/A
- U_B=? $U_B=\frac{UB}{AL}$ $\times200^2\times 0.010\ m^2\times 1m$
- N= 200 **$UB=2.51\times10^{-4}$ Joules.**
- A=0.010 m^2. $U_B=\frac{2.51\times10^{-4}\ J}{0.010\ m^2\times 1\ m}$
- l= 1 m
- I= 20 A **$U_B=2.51\times 10^{-2}\ J/m^3$.**

- 2.- El campo magnético dentro de un solenoide superconductor es de 4.5 Teslas. El solenoide tiene un diámetro interior de 6.2 cm y una longitud de 26 cm. Determine la densidad de energía magnética en el campo.
- Fórmulas: $UB = \frac{B^2}{2\,\mu o}$
- Sustitución y resultado:
- $U_B = \frac{(4.5\ T)^2}{\mathbf{2\ x}\ 12.56\ x10^{-7}\ Tm/A} \mathbf{= 8.06\ x\ 10^6\ J/m^3}$.

- 3.- El campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 0.500×10^{-4} Teslas. Calcule la densidad de energía magnética de la Tierra.
- Fórmula:
- $UB = \frac{B^2}{2\mu o}$
- Sustitución y resultado:
- $UB = \frac{(0.500 \times 10^{-4}\ T)^2}{\mathbf{2 \times} 12.56 \times 10^{-7}\ Tm/A.}$ **$= 995\ \mu J/m^3$**