5. Calcular las siguientes integrales racionales:

a) $\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$ **b)** $\int \frac{1}{2x^2-9x-5}dx$ **c)** $\int \frac{dx}{6+x-x^2}$ **d)** $\int \frac{x}{x^2+6x+9}dx$

e) $\int \frac{dx}{16x^3-8x^2+x}$ **f)** $\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3+2x^2-7x+4}dx$ **g)** $\int \frac{x-2}{x^3-2x^2-16x+32}dx$ **h)** $\int \frac{x^3-4}{x^2+2x}dx$

Solución

a) Como el grado del polinomio del numerador es menor que el del polinomio del denominador para resolver la integral racional se descompone el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador:

$$x^2+x-2=0, \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases} \text{ de donde } x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

Así, $\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1=A(x+2)+B(x-1)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases}x=1\Rightarrow 1=3A\Rightarrow A=\frac{1}{3}\\ x=-2\Rightarrow 1=-3B\Rightarrow B=\frac{-1}{3}\end{cases}$

Por tanto, $\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}$, e integrando:

$$\int\frac{1}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+C=$$
$$=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}+C$$

b) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$2x^2-9x-5=0, \quad x=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\begin{cases}5\\-\frac{1}{2}\end{cases} \text{ de donde } 2x^2-9x-5=2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-5)(2x+1)$$

Así, $\frac{1}{2x^2-9x-5}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{2x+1}=\frac{A(2x+1)+B(x-5)}{(x-5)(2x+1)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1=A(2x+1)+B(x-5)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 1=-\frac{11}{2}B\Rightarrow B=-\frac{2}{11}\\ x=5\Rightarrow 1=11A\Rightarrow A=\frac{1}{11}\end{cases}$

Por tanto, $\frac{1}{2x^2-9x-5}=\frac{1/11}{x-5}+\frac{-2/11}{2x+1}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{2x^2 - 9x - 5}\,dx = \int \left(\frac{1/11}{x-5} + \frac{-2/11}{2x+1} \right) dx = \frac{1}{11}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{2}{11}\int \frac{1}{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{11}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{11}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{1}{11}\ln(x-5) - \frac{1}{11}\ln(2x+1) + C = \ln\sqrt[11]{\frac{x-5}{2x+1}}$$

c) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$6 + x - x^2 = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad 6 + x - x^2 = -(x+2)(x-3) = (x+2)(3-x)$$

Así, $\dfrac{1}{6+x-x^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{3-x} = \dfrac{A(3-x)+B(x+2)}{(x+2)(3-x)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(3-x) + B(x+2)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases} x = 3 \Rightarrow 1 = 5B \Rightarrow B = \dfrac{1}{5} \\ x = -2 \Rightarrow 1 = 5A \Rightarrow A = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{6+x-x^2} = \dfrac{1/5}{x+2} + \dfrac{1/5}{3-x}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{6+x-x^2}\,dx = \int \left(\frac{1/5}{x+2} + \frac{1/5}{3-x} \right) dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{3-x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{-1}{3-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(x+2) - \frac{1}{5}\ln(3-x) + C = \ln\sqrt[5]{\frac{x+2}{3-x}} + C$$

d) Al ser $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{x}{x^2+6x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $x = A(x+3) + B$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x:

$$\begin{cases} x = -3 \Rightarrow -3 = B \Rightarrow B = -3 \\ x = 0 \Rightarrow 0 = 3A + B \Rightarrow 0 = 3A + (-3) \Rightarrow A = 1 \end{cases}$$

Por tanto, $\dfrac{x}{x^2+6x+9} = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{-3}{(x+3)^2}$, e integrando:

$$\int \frac{x}{x^2+6x+9}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{-3}{(x+3)^2} \right) dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx - 3\int (x+3)^{-2}\,dx = \ln(x+3) - 3\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln(x+3) + \frac{3}{x+3} + C$$

e) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$16x^3 - 8x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(16x^2 - 8x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 16x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} = \dfrac{1}{4} \text{ (doble)} \end{cases}$$

Por tanto, $16x^3 - 8x^2 + x = 16x\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 = x(4x-1)^2$

Así, $\dfrac{1}{16x^3 - 8x^2 + x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{4x-1} + \dfrac{C}{(4x-1)^2} = \dfrac{A(4x-1)^2 + Bx(4x-1) + Cx}{x(4x-1)^2}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(4x-1)^2 + Bx(4x-1) + Cx$

Para obtener los valores de A, B y C se dan tres valores a x: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 1 = A \Rightarrow A = 1 \\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 = \dfrac{C}{4} \Rightarrow C = 4 \\ x = 1 \Rightarrow 1 = 9A + 3B + C \Rightarrow B = -4 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{16x^3 - 8x^2 + x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-4}{4x-1} + \dfrac{4}{(4x-1)^2}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{16x^3 - 8x^2 + x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-4}{4x-1} + \frac{4}{(4x-1)^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{4}{4x-1}\,dx + \int (4x-1)^{-2}\,4\,dx =$$

$$= \ln x - \ln(4x-1) + \frac{(4x-1)^{-1}}{-1} + C = \ln x - \ln(4x-1) - \frac{1}{4x-1} + C = \ln\frac{x}{4x-1} - \frac{1}{4x-1} + C$$

f) Se factoriza el polinomio del denominador $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$, para lo que se calculan sus raíces:

	1	2	-7	4
1		1	3	-4
	1	3	-4	0
1		1	4	
	1	4	0	
-4		-4		
	1	0		

Por tanto, el polinomio del denominador se puede escribir $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x+4)(x-1)^2$ y la descomposición en fracciones simples queda:

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+4)(x-1) + C(x+4)}{(x+4)(x-1)^2}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $3x^2 - 5x + 7 = A(x-1)^2 + B(x+4)(x-1) + C(x+4)$

Para obtener los valores de A, B y C se dan tres valores a x: $\begin{cases} x = -4 \Rightarrow 75 = 25A \Rightarrow A = 3 \\ x = 1 \Rightarrow 5 = 5C \Rightarrow C = 1 \\ x = 0 \Rightarrow 7 = A - 4B + 4C \Rightarrow B = 0 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4} = \dfrac{3}{x+4} + \dfrac{0}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x+4} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, e integrando:

$$\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3+2x^2-7x+4}dx = \int\left(\frac{3}{x+4}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = 3\int\frac{1}{x+4}dx+\int(x-1)^{-2}dx =$$
$$= 3\ln(x+4)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C = 3\ln(x+4)-\frac{1}{x-1}+C$$

g) Se factoriza el polinomio del denominador $x^3-2x^2-16x+32$:

	1	-2	-16	32
2		2	0	-32
	1	0	-16	$\boxed{0}$

Por tanto, el polinomio del denominador se puede escribir de la forma $x^3-2x^2-16x+32=(x-2)(x^2-16)=(x-2)(x+4)(x-4)$ y la función del integrando queda:

$$\frac{x-2}{x^3-2x^2-16x+32}=\frac{x-2}{(x-2)(x+4)(x-4)}=\frac{1}{(x+4)(x-4)}$$

La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{1}{(x+4)(x-4)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x+4)}{(x+4)(x-4)}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1=A(x-4)+B(x+4)$

Se obtienen los valores de A y B dando dos valores a x: $\begin{cases} x=4 \Rightarrow 1=8B \Rightarrow B=\dfrac{1}{8} \\ x=-4 \Rightarrow 1=-8A \Rightarrow A=-\dfrac{1}{8}\end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{(x+4)(x-4)}=\dfrac{-1/8}{x+4}+\dfrac{1/8}{x-4}$, e integrando:

$$\int\frac{x+2}{x^3+2x^2-4x-8}dx=\int\frac{1}{(x+4)(x-4)}dx=\int\left(\frac{-1/8}{x+4}+\frac{1/8}{x-4}\right)dx=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x+4}dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-4}dx=$$
$$=-\frac{1}{8}\ln(x+4)+\frac{1}{8}\ln(x-4)+C=\ln\sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}}+C$$

h) Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, se ha de realizar en primer lugar la división polinómica quedando:

$$\begin{array}{rl} x^3-4 & \quad \underline{|x^2+2x} \\ \underline{-x^3-2x^2} & \quad x-2 \\ / \ -2x^2-4 & \\ \underline{2x^2+4x} & \\ / \ \ 4x-4 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^3-4}{x^2+2x}=x-2+\dfrac{4x-4}{x^2+2x}$

Así, $\displaystyle\int\frac{x^3-4}{x^2+2x}dx=\int\left(x-2+\frac{4x-4}{x^2+2x}\right)dx=\int(x-2)\,dx+\int\frac{4x-4}{x^2+2x}dx=\frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{4x-4}{x^2+2x}dx$

La integral $\int \frac{4x-4}{x^2+2x}dx$ se resuelve descomponiendo en fracciones simples la función del integrando. Al ser $x^2+2x = x(x+2)$, la descomposición es:

$$\frac{4x-4}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $4x-4 = A(x+2)+Bx$

Se obtienen los valores de A y B dando dos valores a x: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow -4 = 2A \Rightarrow A=-2 \\ x=-2 \Rightarrow -12 = -2B \Rightarrow B = 6 \end{cases}$

Por tanto, $\frac{4x-4}{x^2+2x} = \frac{-2}{x} + \frac{6}{x+2}$, e integrando:

$$\int \frac{4x-4}{x^2+2x}dx = \int\left(\frac{-2}{x}+\frac{6}{x+2}\right)dx = -2\int\frac{1}{x}dx + 6\int\frac{1}{x+2}dx = -2\ln x + 6\ln(x+2) + C$$

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2+2x}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 2\ln x + 6\ln(x+2) + C$$