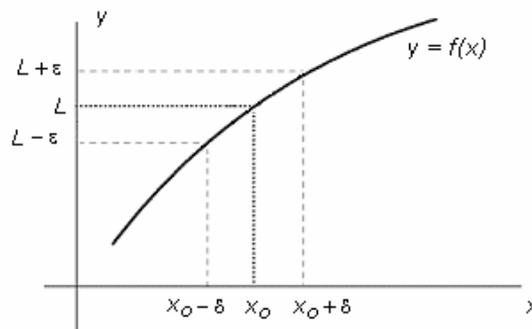


LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva se puede definir el límite de una función en un punto como el valor al que se aproxima la función cuando la variable independiente se acerca al punto. Esta idea intuitiva se formaliza en la siguiente definición:

Se dice que el **límite de f cuando x tiende a x_0** es el número real L , y se representa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ que fijemos, se puede encontrar algún $\delta > 0$ verificando que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < |x - x_0| < \delta$ se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Notar que para que esta definición tenga sentido es necesario que existan puntos cercanos a x_0 que sean del dominio de f , aunque no se necesita que f esté definida en x_0 .

Ejemplo 7: Aplicando la definición se va a comprobar que $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$.

Tomando un valor cualquiera $\varepsilon > 0$ hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que si se cumple $0 < |x - 2| < \delta$, se verifique $|(4x - 5) - 3| < \varepsilon$.

Realizando operaciones en la última desigualdad con objeto de encontrar una relación entre δ y ε queda:

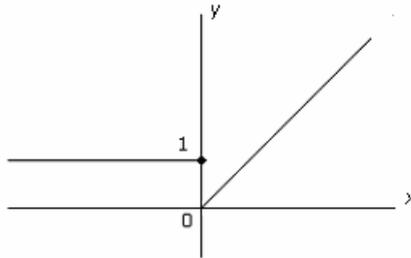
$$|(4x - 5) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Como se ha de cumplir que $0 < |x - 2| < \delta$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ se verifica la definición de límite.

Al estudiar el valor al que tiende una función cuando x se aproxima a un punto x_0 , a veces es conveniente considerar por separado los valores próximos a x_0 que sean menores y los que sean mayores que él. Esto da lugar a los **límites laterales** que se definen a continuación.

- Se dice que L_1 es el **límite por la derecha de f** y se representa $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$, si la función se aproxima a este valor al acercarse x a x_0 , siendo $x > x_0$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < x - x_0 < \delta$ se verifica $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.
- Se dice que L_2 es el **límite por la izquierda de f** y se representa $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$, si la función se aproxima a este valor al acercarse x a x_0 , siendo $x < x_0$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < x_0 - x < \delta$ se verifica $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Ejemplo 8: La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cuya gráfica es



cumple que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ según se ve en el dibujo.

Cuando tiene sentido calcular los dos límites laterales se verifica la siguiente equivalencia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Una consecuencia inmediata de esta equivalencia es que si los límites laterales cuando $x \rightarrow x_0$ son distintos, el límite de la función cuando $x \rightarrow x_0$ no existe.

Ejemplo 9:

a) En la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ del ejemplo 8, como sus límites laterales cuando $x \rightarrow 0$ son distintos, se concluye que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Dada $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, para calcular $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, como $f(x)$ está definida de forma diferente antes y después del punto $x = 3$, han de hallarse sus límites laterales quedando: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3x = 9$.

Como los dos límites laterales coinciden, entonces existe el límite de la función y se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = 0$

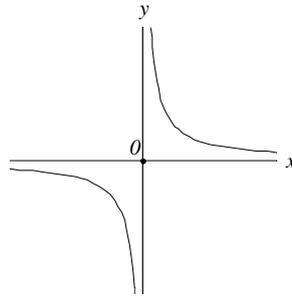
Observar que en este caso no tiene sentido considerar valores menores que 2 ya que $D = [2, +\infty)$, por tanto, no tiene sentido plantearse el límite por la izquierda cuando $x \rightarrow 2$ y el límite calculado coincide con el límite por la derecha.

La definición de límite se puede extender para elementos infinitos teniendo en cuenta lo siguiente:

- Por $x \rightarrow +\infty$, se entiende que se toman valores de x positivos tan grandes como se quiera.
- Por $x \rightarrow -\infty$, se entiende que se toman valores de x negativos tan pequeños como se quiera.
- Diremos que el límite es $+\infty$ si la función toma valores positivos tan grandes como se quiera.
- Diremos que el límite es $-\infty$ si la función toma valores negativos tan pequeños como se quiera.

Ejemplo 10:

- a) Calcular los límites laterales cuando $x \rightarrow 0$ de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se muestra a continuación.

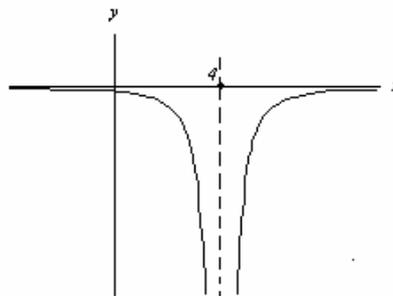


Si los valores de x se aproximan a 0 por la derecha el valor de la función crece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Si se acerca por la izquierda a 0, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

En este caso el límite de la función cuando $x \rightarrow 0$ no existe, ya que los límites laterales no coinciden.

- b) Calcular los límites laterales cuando $x \rightarrow 4$ la función $f(x) = \frac{-3}{(x-4)^2}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



Si x se acerca a 4 por la derecha, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$.

Si x se acerca al 4 por la izquierda, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$.

En este caso, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$, ya que ambos límites laterales coinciden y toman el valor $-\infty$.

- c) Calcular el límite cuando $x \rightarrow 1$ de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Como $f(x)$ está definida de forma diferente antes y después del 1, para determinar el límite de la función han de hallarse sus límites laterales quedando: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$.

Al ser distintos estos límites se concluye que no existe el límite de f cuando $x \rightarrow 1$.

Propiedades de los límites

- El límite de una función, si existe, es único.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, excepto si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ o viceversa.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (t \cdot f)(x) = t \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, siendo t un número real cualquiera.

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, excepto si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ o viceversa.

5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, excepto si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

6. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, excepto si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

7. Si $f(x)$ es una función acotada en un entorno de x_0 y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = 0$$

Ejemplo 11: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 0^2 + e^0 = 0 + 1 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 5x \ln x = 5 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 5 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 5 \cdot 0 = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^3 + 2}{\lim_{x \rightarrow 3} x - 1} = \frac{29}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) \right)^{-\frac{2}{3}} = (-1)^{-\frac{2}{3}} = ((-1)^2)^{-\frac{1}{3}} = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 3} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, ya que, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ y la función seno es una función acotada.

En los casos en los que la aplicación directa de estas propiedades no permite calcular el límite (ver las excepciones que aparecen en las propiedades de los límites), se dice que hay una **indeterminación** y es necesario calcular el límite de otra manera.

Utilizando notación simbólica las indeterminaciones son:

$$+\infty - \infty, 0 \cdot (\pm \infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm \infty}{\pm \infty}, 0^0, (\pm \infty)^0, 1^{\pm \infty}$$

Ejemplo 12: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve factorizando los polinomios con objeto de simplificar el factor $x - 3$

común al numerador y al denominador, ya que $x = 3$ anula a ambos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, es decir, por $1+\sqrt{x-1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} -(1+\sqrt{x-1}) = -2 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+5}{2x^4-3} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^4 , ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+5}{2x^4-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{5}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{3}{x^4}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-3x}{x^2+1} = \frac{-\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^3 , ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-3x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2-0}{0^-} = -\infty$$

Notar que las indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ocasionadas por cocientes de polinomios se resuelven fácilmente generalizando lo realizado en los apartados c) y d) del ejemplo anterior obteniéndose:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n \\ \pm\infty & \text{si } m < n \end{cases}$$

Ejemplo 13: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5+5x+1}{x^4-1} = \frac{-\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es $-\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{2x^4-3} = \frac{+\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es 0

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5}{5x^2+3x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es $\frac{3}{5}$

Las indeterminaciones 0^0 , $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$ se pueden transformar en una del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$ tomando logaritmos neperianos. Además, la indeterminación $1^{\pm\infty}$ se puede resolver aplicando que si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty, \text{ entonces, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

Ejemplo 14: Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x+3}{9x-1} \right)^{2x^2} = \left(\frac{8}{9} \right)^{+\infty} = 0 \text{ ya que } \frac{8}{9} < 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2+3}{5x^2-1} \right)^x = \left(\frac{4}{5} \right)^{-\infty} = \left(\frac{5}{4} \right)^{+\infty} = +\infty \text{ ya que } \frac{5}{4} > 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^x = \left(\frac{5}{3} \right)^{+\infty} = +\infty \text{ ya que } \frac{5}{3} > 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5} \right)^{4x^2+1} = 1^{+\infty} \text{ es una indeterminación que se puede resolver como sigue:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5} \right)^{4x^2+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2+1) \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(4x^2+1)}{2x^2+5}} = e^{-4}$$

A veces, algunas de estas indeterminaciones se resuelven usando los llamados infinitésimos equivalentes que son funciones cuyo límite vale 0 y que se pueden sustituir una por otra si están multiplicando o dividiendo dentro de un límite sin que éste se modifique. Algunos infinitésimos equivalentes cuando $f(x) \rightarrow 0$ son:

$$\operatorname{sen} f(x) \approx f(x)$$

$$\operatorname{arcsen} f(x) \approx f(x)$$

$$\operatorname{tg} f(x) \approx f(x)$$

$$\operatorname{arctg} f(x) \approx f(x)$$

$$\ln(1+f(x)) \approx f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \approx f(x)$$

$$1 - \cos f(x) \approx \frac{(f(x))^2}{2}$$

Ejemplo 15: Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \frac{0}{0} \text{ . Esta indeterminación se puede resolver por infinitésimos equivalentes de la forma siguiente,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{0}{0} \text{ . Esta indeterminación se puede resolver por infinitésimos equivalentes de la forma siguiente,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{x^2}{2} \right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4} = 0$$

Otra equivalencia útil para resolver límites es:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \approx a_n x^n \text{ cuando } x \rightarrow \pm\infty$$

Ejemplo 16: Calcular los siguientes límites utilizando la equivalencia anterior:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 + 2}{x^2 - 3x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ . Esta indeterminación se resuelve fácilmente utilizando la equivalencia anterior, quedando}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 + 2}{x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = -3(-\infty) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + 2)}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se puede resolver de esta manera:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + 2)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$