Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

OPERACIONES CON MATRICES. PROPIEDADES

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden $m \times n$, la **matriz suma $A + B$**, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición.
Así, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Ejemplo 12: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 4+(-4) & 2+5 \\ 0+(-7) & -2+3 & \frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -7 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Propiedades

1. *Asociativa*: $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. *Elemento neutro*: es la matriz nula O, ya que $A + O = O + A = A$

3. *Elemento simétrico*: el elemento simétrico de A es su matriz opuesta $-A = (-a_{ij})$ ya que se verifica $A + (-A) = (-A) + A = O$

4. *Conmutativa*: $A + B = B + A$

Producto de un número real por una matriz

Dados una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y un número real t, la **matriz producto $t.A$**, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada elemento de A por t. Así, $t.A = (t\ a_{ij})$.

Ejemplo 13: $5 . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-1) & 5.3 \\ 5.4 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades

1. $t.(A + B) = t.A + t.B$

2. $(t + s).A = t.A + s.A$

3. $1.A = A$

4. $t.(s.A) = (t\ s).A$

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m \times p$ y $B = (b_{ij})$ de orden $p \times n$, la **matriz producto AB**, es otra matriz de orden $m \times n$ en la que el elemento situado en la fila i y en la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matiz B de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{ip}\, b_{pj}$$

Ejemplo14: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+(-1)(-1) & 2.1+(-1)2 \\ 0.3+3(-1) & 0.1+3.2 \\ -4.3+6(-1) & -4.1+6.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$

Observaciones

1. Para calcular AB es necesario que se verifique: nº de columnas de A = nº de filas de B

2. nº de filas de AB = nº de filas de A nº de columnas de AB = nº de columnas de B

Propiedades

1. *Asociativa*: $(AB)C = A(BC)$

2. *Distributiva del producto respecto a la suma*: $(A + B)C = AC + BC$; $A(B + C) = AB + AC$

3. Si A es una matriz de orden $m \times n$ se verifica: $I_m A = A$ y $A I_n = A$

El producto de matrices *no verifica la propiedad conmutativa*.

Dada una matriz cuadrada A de orden n se dice que es **regular (inversible**) o que tiene **matriz inversa** si existe otra matriz del mismo orden, llamada $\boldsymbol{A^{-1}}$, verificando $A A^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ejemplo 15: La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ya que:

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2+3.1 & -1.3+3.1 \\ 1.2+(-2).1 & 1.3+(-2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)+3.1 & 2.3+3(-2) \\ 1(-1)+1.1 & 1.3+1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. La matriz inversa de una matriz, si existe, es única

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(t \,.\, A)^{-1} = t^{-1} \,.\, A^{-1}$, con t un número real distinto de cero

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Trasposición de matrices

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, la **matriz traspuesta** $\boldsymbol{A^t}$, es una matriz de orden $n \times m$ que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A.

Ejemplo 16: La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$.

Propiedades

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(s \cdot A)^t = s \cdot A^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$