En cada uno de los apartados, se ha de resolver la correspondiente inecuación y dar la solución en forma de intervalos.

En la resolución de la inecuación puede resultar conveniente consultar los puntos 2 y 3 del apartado de inecuaciones de la Unidad Didáctica 2, teniendo en cuenta:

a) Se debe estudiar el signo del numerador y del denominador

b) Se deben pasar todos los términos a un lado de la desigualdad para que en el otro quede un 0 y estudiar el signo del polinomio resultante

c) Se debe estudiar el signo del numerador y del denominador

Orden en el conjunto de números reales. Intervalos

En el conjunto de los números reales existe una ordenación "natural" que se puede definir a partir de las relaciones de orden "menor" o "menor o igual".

Dados dos números reales distintos, a y b, se dice que ***a* es menor que *b*** y se escribe $\boldsymbol{a < b}$ si b-a es un número positivo. Se dice que ***a* es menor o igual que *b*** y se escribe $\boldsymbol{a \leq b}$ si b-a es un número positivo o cero.

Si $a < b$ también se dice que ***b* es mayor que *a*** y se escribe $\boldsymbol{b > a}$. Análogamente, si $a \leq b$ también se dice que ***b* es mayor o igual que *a*** y se escribe $\boldsymbol{b \geq a}$.

A continuación, se enumeran algunas propiedades que relacionan las desigualdades con las operaciones entre números reales. Dados a, b y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1. $a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$
2. $a \leq b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a.c \leq b.c & \text{si } c \geq 0 \\ a.c \geq b.c & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$
3. Si $a \leq b$ y ambos tienen el mismo signo, entonces $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$

   Como caso particular, al tomar inversos se cumple:

   $a \geq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \leq 1$

   $0 < a \leq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \geq 1$

   $-1 \leq a < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \leq -1$

   $a \leq -1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \geq -1$

Similares propiedades se verifican con la desigualdad < en lugar de la desigualdad ≤.

Ejemplo 12:

a) $-2 < 1 \Rightarrow -2+3 < 1+3 \Rightarrow 1 < 4$

b) $3 < 4 \Rightarrow -2.3 > -2.4 \Rightarrow -6 > -8$

c) $1 < \sqrt{2} \Rightarrow 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $-6 < -5 \Rightarrow \frac{1}{-6} > \frac{1}{-5} \Rightarrow \frac{-1}{6} > \frac{-1}{5}$

Las propiedades anteriores son muy útiles a la hora de resolver inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 13:

a) $3+x \leq 8 \Rightarrow -3+3+x \leq -3+8 \Rightarrow x \leq 5$

b) $-5x > 10 \Rightarrow \frac{-1}{5}(-5x) < \frac{-1}{5}.10 \Rightarrow x < -2$

La ordenación existente en el conjunto de los números reales permite definir un tipo de conjuntos en $\mathbb{R}$ que van a ser muy útiles: los **intervalos**. Se distinguen los siguientes tipos de intervalos:

- **Intervalo abierto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- **Intervalo cerrado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo semiabierto o semicerrado**:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{o} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Los números a y b que determinan cada uno de los conjuntos anteriores se denominan **extremos** del correspondiente intervalo.

Los intervalos que se han definido son intervalos finitos. Si se consideran los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como determinantes de uno de los dos extremos surgen los intervalos infinitos:

- **Intervalo infinito abierto**: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ o $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- **Intervalo infinito cerrado**: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ o $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Notar que $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 14:

a) $(-5, -8)$ y $\left(\frac{-3}{10}, \frac{7}{5}\right)$ son intervalos finitos abiertos; $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$ es un intervalo infinito abierto.

b) $[5, 3e]$ y $[1, 2]$ son intervalos finitos cerrados; $(-\infty, 1'123]$ y $[0, +\infty)$ son intervalos infinitos cerrados.

c) $(-\sqrt[3]{7}, 0]$ y $[3, 10)$ son intervalos semiabiertos o semicerrados.

Los intervalos se pueden utilizar para expresar la solución de las inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 15:

a) El conjunto de valores de x que verifican $3x + 2 < 8$ es el intervalo que se calcula a continuación:

$3x + 2 < 8 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{3} = 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo infinito abierto $(-\infty, 2)$

b) El conjunto de valores de x que verifican $x^2 - 1 \leq 3$ es el intervalo que se calcula a continuación:

$x^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo cerrado $[-2, 2]$

c) El conjunto de valores de x que verifican $5x^2 > 10$ se calcula a continuación:

$5x^2 > 10 \Rightarrow x^2 > \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x > \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{2}$, es decir, la solución de la inecuación es el conjunto $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$