En cada uno de los apartados, se ha de resolver la correspondiente inecuación y dar la solución en forma de intervalos.

En la resolución de la inecuación puede resultar conveniente consultar los puntos 2 y 3 del apartado de inecuaciones de la Unidad Didáctica 2. Además, en los apartados a y c se utiliza el concepto de valor absoluto.

Orden en el conjunto de números reales. Intervalos

En el conjunto de los números reales existe una ordenación "natural" que se puede definir a partir de las relaciones de orden "menor" o "menor o igual".

Dados dos números reales distintos, a y b, se dice que ***a* es menor que *b*** y se escribe $\boldsymbol{a < b}$ si b-a es un número positivo. Se dice que ***a* es menor o igual que *b*** y se escribe $\boldsymbol{a \le b}$ si b-a es un número positivo o cero.

Si $a < b$ también se dice que ***b* es mayor que *a*** y se escribe $\boldsymbol{b > a}$. Análogamente, si $a \le b$ también se dice que ***b* es mayor o igual que *a*** y se escribe $\boldsymbol{b \ge a}$.

A continuación, se enumeran algunas propiedades que relacionan las desigualdades con las operaciones entre números reales. Dados a, b y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1. $a \le b \;\Rightarrow\; a + c \le b + c$

2. $a \le b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a.c \le b.c & \text{si } c \ge 0 \\ a.c \ge b.c & \text{si } c \le 0 \end{cases}$

3. Si $a \le b$ y ambos tienen el mismo signo, entonces $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

   Como caso particular, al tomar inversos se cumple:

   $a \ge 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \le 1$

   $0 < a \le 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \ge 1$

   $-1 \le a < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \le -1$

   $a \le -1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \ge -1$

Similares propiedades se verifican con la desigualdad $<$ en lugar de la desigualdad $\le$.

Ejemplo 12:

a) $-2 < 1 \;\Rightarrow\; -2+3 < 1+3 \;\Rightarrow\; 1 < 4$

b) $3 < 4 \;\Rightarrow\; -2.3 > -2.4 \;\Rightarrow\; -6 > -8$

c) $1 < \sqrt{2} \;\Rightarrow\; 1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $-6 < -5 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{-6} > \dfrac{1}{-5} \;\Rightarrow\; \dfrac{-1}{6} > \dfrac{-1}{5}$

Las propiedades anteriores son muy útiles a la hora de resolver inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 13:

a) $3+x \leq 8 \Rightarrow -3+3+x \leq -3+8 \Rightarrow x \leq 5$

b) $-5x > 10 \Rightarrow \frac{-1}{5}(-5x) < \frac{-1}{5}.10 \Rightarrow x < -2$

La ordenación existente en el conjunto de los números reales permite definir un tipo de conjuntos en R que van a ser muy útiles: los **intervalos**. Se distinguen los siguientes tipos de intervalos:

- **Intervalo abierto**: $(a, b) = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$
- **Intervalo cerrado**: $[a, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo semiabierto o semicerrado**:

$$(a, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{o} \quad [a, b) = \{x \in \mathrm{R} \mid a \leq x < b\}$$

Los números a y b que determinan cada uno de los conjuntos anteriores se denominan **extremos** del correspondiente intervalo.

Los intervalos que se han definido son intervalos finitos. Si se consideran los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como determinantes de uno de los dos extremos surgen los intervalos infinitos:

- **Intervalo infinito abierto**: $(a, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x\}$ o $(-\infty, b) = \{x \in \mathrm{R} \mid x < b\}$
- **Intervalo infinito cerrado**: $[a,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid a \leq x\}$ o $(-\infty, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq b\}$

Notar que $(-\infty,+\infty) = \mathrm{R}$.

Ejemplo 14:

a) $(-5, -8)$ y $\left(\frac{-3}{10}, \frac{7}{5}\right)$ son intervalos finitos abiertos; $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$ es un intervalo infinito abierto.

b) $[5, 3e]$ y $[1, 2]$ son intervalos finitos cerrados; $(-\infty, 1'123]$ y $[0, +\infty)$ son intervalos infinitos cerrados.

c) $(-\sqrt[3]{7}, 0]$ y $[3, 10)$ son intervalos semiabiertos o semicerrados.

Los intervalos se pueden utilizar para expresar la solución de las inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 15:

a) El conjunto de valores de x que verifican $3x + 2 < 8$ es el intervalo que se calcula a continuación:
$3x + 2 < 8 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{3} = 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo infinito abierto $(-\infty, 2)$

b) El conjunto de valores de x que verifican $x^2 - 1 \leq 3$ es el intervalo que se calcula a continuación:
$x^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo cerrado $[-2, 2]$

c) El conjunto de valores de x que verifican $5x^2 > 10$ se calcula a continuación:
$5x^2 > 10 \Rightarrow x^2 > \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x > \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{2}$, es decir, la solución de la inecuación es el conjunto $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Valor absoluto de un número real

Dado un número real cualquiera, a, se define su **valor absoluto** como $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Este valor se conoce también como **módulo** de a y representa la distancia del origen de la recta real al punto que representa al número a.

Si a, $b \in \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)
4. $|a.b| = |a|.|b|$
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$
6. $\sqrt{a^2} = |a|$
7. $|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$
8. $|a| \geq k \Leftrightarrow a \leq -k$ o $a \geq k$

Ejemplo 16:

a) $|-3| = |3| = 3$

b) $|7-x| = \begin{cases} 7-x & \text{si } 7-x \geq 0 \\ -(7-x) & \text{si } 7-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 7-x & \text{si } x \leq 7 \\ x-7 & \text{si } x > 7 \end{cases}$

c) $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{si } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq \frac{-1}{2} \\ -2x-1 & \text{si } x < \frac{-1}{2} \end{cases}$

d) $|x^2-2x+1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$ ya que el cuadrado de cualquier número es siempre positivo o cero.

e) $|x^2+5x+6| = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si } x^2+5x+6 \geq 0 \\ -x^2-5x-6 & \text{si } x^2+5x+6 < 0 \end{cases}$

Para determinar cuando x^2+5x+6 es mayor o igual que cero o menor que cero se calculan las raíces del polinomio que son -2 y -3 y, por tanto, $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$. Así, el signo del polinomio dependerá de los valores de x como se muestra en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
$x + 2$	-	-	+
$x + 3$	-	+	+
$(x + 2)(x + 3)$	+	-	+

En conclusión, $|x^2+5x+6| = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si } x \leq -3 \text{ o } x \geq -2 \\ -x^2-5x-6 & \text{si } -3 < x < -2 \end{cases}$

f) $|-x^2-8x| = |x^2+8x| = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x^2+8x \geq 0 \\ -x^2-8x & \text{si } x^2+8x < 0 \end{cases}$

Para determinar cuando x^2+8x es mayor o igual que cero o menor que cero se calculan las raíces del polinomio que son 0 y -8, por tanto, $x^2+8x = x(x+8)$. Así, el signo del polinomio dependerá de los valores de x como se muestra en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -8)$	$(-8, 0)$	$(0, +\infty)$
x	-	-	-
$x + 8$	-	+	+
$x\,(x + 8)$	+	-	+

En conclusión, $|-x^2-8x| = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x \leq -8 \text{ o } x \geq 0 \\ -x^2-8x & \text{si } -8 < x < 0 \end{cases}$