En cada uno de los apartados, se ha de resolver el correspondiente sistema de inecuaciones y dar la solución en forma de intervalos.

En la resolución de la inecuación puede resultar conveniente consultar el punto 2 del apartado de sistemas de inecuaciones de la Unidad Didáctica 2.

Orden en el conjunto de números reales. Intervalos

En el conjunto de los números reales existe una ordenación "natural" que se puede definir a partir de las relaciones de orden "menor" o "menor o igual".

Dados dos números reales distintos, a y b, se dice que ***a* es menor que *b*** y se escribe $\boldsymbol{a < b}$ si b-a es un número positivo. Se dice que ***a* es menor o igual que *b*** y se escribe $\boldsymbol{a \leq b}$ si b-a es un número positivo o cero.

Si $a < b$ también se dice que ***b* es mayor que *a*** y se escribe $\boldsymbol{b > a}$. Análogamente, si $a \leq b$ también se dice que ***b* es mayor o igual que *a*** y se escribe $\boldsymbol{b \geq a}$.

A continuación, se enumeran algunas propiedades que relacionan las desigualdades con las operaciones entre números reales. Dados a, b y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1. $a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$

2. $a \leq b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a.c \leq b.c & \text{si } c \geq 0 \\ a.c \geq b.c & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$

3. Si $a \leq b$ y ambos tienen el mismo signo, entonces $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$

   Como caso particular, al tomar inversos se cumple:

   $a \geq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \leq 1$

   $0 < a \leq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \geq 1$

   $-1 \leq a < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \leq -1$

   $a \leq -1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a} \geq -1$

Similares propiedades se verifican con la desigualdad < en lugar de la desigualdad ≤.

Ejemplo 12:

a) $-2 < 1 \;\Rightarrow\; -2+3 < 1+3 \;\Rightarrow\; 1 < 4$

b) $3 < 4 \;\Rightarrow\; -2.3 > -2.4 \;\Rightarrow\; -6 > -8$

c) $1 < \sqrt{2} \;\Rightarrow\; 1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $-6 < -5 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{-6} > \dfrac{1}{-5} \;\Rightarrow\; \dfrac{-1}{6} > \dfrac{-1}{5}$

Las propiedades anteriores son muy útiles a la hora de resolver inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 13:

a) $3+x \leq 8 \Rightarrow -3+3+x \leq -3+8 \Rightarrow x \leq 5$

b) $-5x > 10 \Rightarrow \frac{-1}{5}(-5x) < \frac{-1}{5}.10 \Rightarrow x < -2$

La ordenación existente en el conjunto de los números reales permite definir un tipo de conjuntos en R que van a ser muy útiles: los **intervalos**. Se distinguen los siguientes tipos de intervalos:

- **Intervalo abierto**: $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$
- **Intervalo cerrado**: $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo semiabierto o semicerrado**:

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\} \quad \text{o} \quad [a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

Los números a y b que determinan cada uno de los conjuntos anteriores se denominan **extremos** del correspondiente intervalo.

Los intervalos que se han definido son intervalos finitos. Si se consideran los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como determinantes de uno de los dos extremos surgen los intervalos infinitos:

- **Intervalo infinito abierto**: $(a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x\}$ o $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$
- **Intervalo infinito cerrado**: $[a,+\infty) = \{x \in R \mid a \leq x\}$ o $(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$

Notar que $(-\infty,+\infty) = R$.

Ejemplo 14:

a) $(-5, -8)$ y $\left(\frac{-3}{10}, \frac{7}{5}\right)$ son intervalos finitos abiertos; $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$ es un intervalo infinito abierto.

b) $[5, 3e]$ y $[1, 2]$ son intervalos finitos cerrados; $(-\infty, 1'123]$ y $[0, +\infty)$ son intervalos infinitos cerrados.

c) $(-\sqrt[3]{7}, 0]$ y $[3, 10)$ son intervalos semiabiertos o semicerrados.

Los intervalos se pueden utilizar para expresar la solución de las inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 15:

a) El conjunto de valores de x que verifican $3x + 2 < 8$ es el intervalo que se calcula a continuación:
$3x + 2 < 8 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{3} = 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo infinito abierto $(-\infty, 2)$

b) El conjunto de valores de x que verifican $x^2 - 1 \leq 3$ es el intervalo que se calcula a continuación:
$x^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo cerrado $[-2, 2]$

c) El conjunto de valores de x que verifican $5x^2 > 10$ se calcula a continuación:
$5x^2 > 10 \Rightarrow x^2 > \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x > \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{2}$, es decir, la solución de la inecuación es el conjunto $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$