CAPÍTULO 9

Teorema de los residuos. Aplicaciones.

9.1 INTRODUCCIÓN

Del teorema de los residuos puede decirse que es la culminación de lo que hemos encuadrado bajo el nombre genérico de 'teoría global de Cauchy'. Incorpora y extiende al teorema de Cauchy y a la fórmula de Cauchy, y tiene innumerables consecuencias teóricas y prácticas. De éstas apuntamos su uso para calcular integrales reales y sumas de series, limitándonos a señalar referencias donde encontrar el tema desarrollado en detalle.

La primera aplicación teórica que presentamos se refiere a la *localización de ceros*, en la que tratamos de averiguar el número de ceros de una función en un subconjunto de su dominio. Los resultados básicos en esta dirección son el denominado *principio del argumento* y el *teorema de Rouché*.

De aquí pasamos al estudio del comportamiento local de una función analítica, viendo su analogía con el de la función z^m en torno al 0, en el sentido que se precisa en el texto. Deducimos el teorema de la aplicación abierta y alguna de sus aplicaciones, y finalizamos el capítulo con una versión global y otra local del teorema de la función inversa, llegando a una representación integral de esta inversa que nos permite obtener expresiones interesantes de su desarrollo en serie de Taylor.

Referencias básicas:

— **Conway, J. B.:** *Functions of One Complex Variable.* (2nd ed.) Springer, New York (1978).
— **Mitrinović, D. S.:** *Calculus of Residues.* Noordhoff, Groningen (1966).
— **Palka, B. P.:** *An Introduction to Complex Function Theory.* Springer, New York (1991).
— **Rudin, W.:** *Análisis real y complejo.* (3a. ed.) McGraw-Hill/Interamericana, Madrid (1987).

9.2 PRÓLOGO: RESIDUOS

Agazapada en el teorema de Laurent hay una información importante. Por lo que vimos en su demostración, se deduce que si f tiene una singularidad aislada en a,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1},$$

donde a_{-1} es el coeficiente de $(z-a)^{-1}$ en el desarrollo en serie de Laurent de f y $\gamma = \partial D(a;r)$, r adecuado. Este coeficiente (salvo el factor habitual $2\pi i$) es, pues, "el único vestigio", el *residuo* que deja la función al ser integrada sobre una "pequeña" circunferencia centrada en a. Vamos a asignarle oficialmente este nombre.

Definición 9.1. *Sea $a \in \mathbf{C}$ una singularidad aislada de una función f. Recibe el nombre de **residuo** de f en a el coeficiente de $1/(z-a)$ en el desarrollo en serie de Laurent de f en el punto a, de manera que si*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in D(a; 0, R),$$

y denotamos con $\mathrm{Res}(f;a)$ el residuo de f en a, es

$$\mathrm{Res}(f;a) = a_{-1}.$$

En el punto del infinito la definición es ligeramente distinta:
Sea f una función con una singularidad aislada en ∞, y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

*su desarrollo en serie de Laurent en una corona $D(0; R, +\infty)$. Llamaremos **residuo de f en el infinito** al número*

$$\mathrm{Res}(f;\infty) = -a_{-1}$$

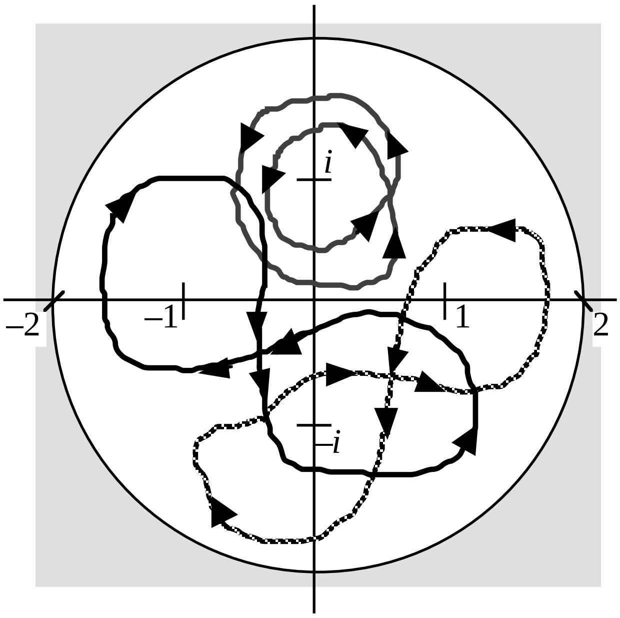
(coeficiente de $1/z$ en el desarrollo, cambiado de signo).

¿Qué hace merecedor de un nombre especial a este coeficiente? De momento, sabemos que su valor es lo único que necesitamos conocer a la hora de calcular la integral de f sobre la circunferencia γ. Pero con este punto de partida y un poco de ingenio podemos servirnos de los residuos para calcular integrales en situaciones más complicadas.

Supongamos, por ejemplo, que nos proponemos calcular una integral como

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Log}(z+2)\, z^3 \operatorname{ctg} \pi z}{(1-\cos 2\pi z)\,(z^2+1)}\, dz,$$

donde Γ es el ciclo contenido en $\Omega = D(0;2)$ formado por los caminos que se indican en la figura.



Horrible, ¿no es cierto? "*¿Qué es lo mejor que podemos hacer para resolver este problema? Dejarlo e inventar otro*", como recomienda el "profesor tradicional de matemáticas" en el retrato que de él hace Pólya. Vamos a ello.

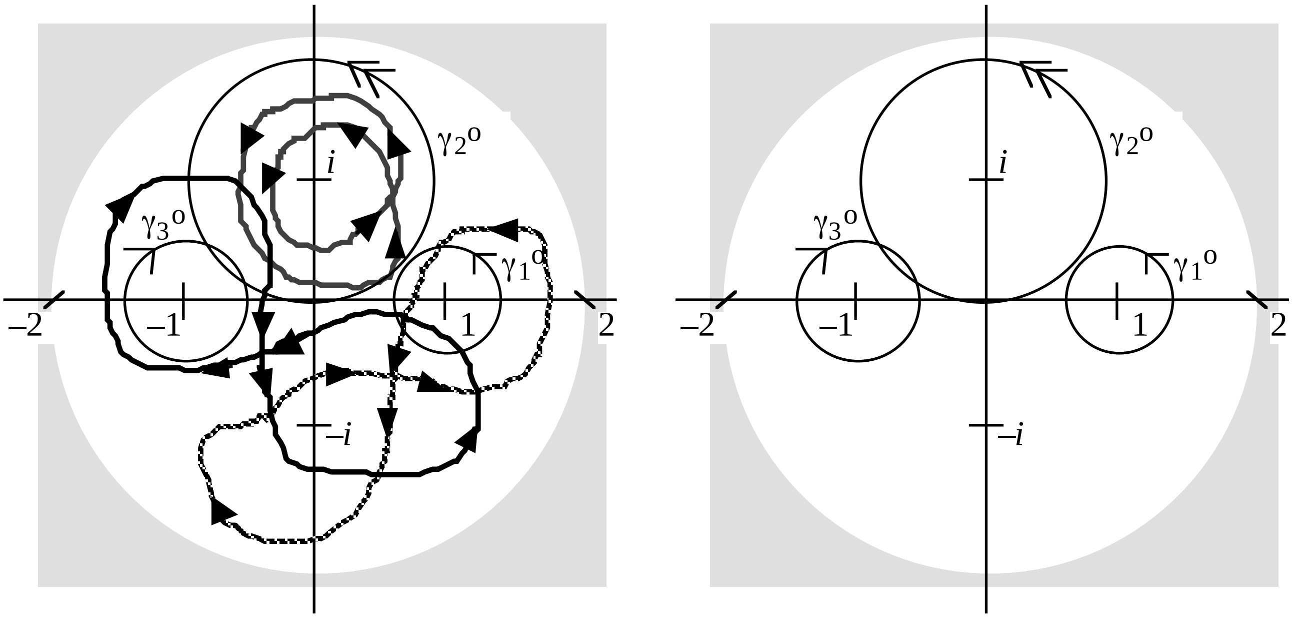
Según hemos señalado antes, tras calcular los residuos en los puntos $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$ de la función $f(z)$ a integrar, tarea no extremadamente difícil, seríamos capaces de hallar la integral en el caso más sencillo de que Γ constase de una circunferencia $\gamma_j^o = \partial D(z_j; r_j)$ alrededor de uno de los puntos z_j, suficientemente pequeña para que el disco cerrado $\overline{D(z_j; r_j)}$ quede dentro de Ω y no incluya a ninguno de los restantes puntos z_k, $k \neq j$, obteniendo entonces

$$\int_{\gamma_j^o} f(z)\, dz = 2\pi i \ \operatorname{Res}(f; z_j).$$

Pero ésto ¿de qué sirve? De mucho ... cuando caemos en la cuenta de que el teorema homológico de Cauchy permite sustituir oportunamente el ciclo original Γ por otro ciclo formado por circunferencias, con tal de que ambos sean homólogos respecto de un abierto en el que f sea holomorfa. Notando que

$$\mathbf{Ind}_{\Gamma}(z_1) = 1, \quad \mathbf{Ind}_{\Gamma}(z_2) = 2, \quad \mathbf{Ind}_{\Gamma}(z_3) = -1, \quad \mathbf{Ind}_{\Gamma}(z_4) = 0,$$

podemos “fabricar” un ciclo homólogo a Γ respecto de $\Omega \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ tomando



$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, donde

$$\Gamma_1 = [\gamma_1^o], \quad \Gamma_2 = [\gamma_2^o, \gamma_2^o], \quad \Gamma_3 = [-\gamma_3^o],$$

y γ_j^o $(1 \le j \le 3)$ son circunferencias elegidas como antes. Con ésto

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f = \int_{\Gamma_0} f &= \int_{\gamma_1^o} f + 2\int_{\gamma_2^o} f - \int_{\gamma_3^o} f \\
&= 2\pi i \ \left(\operatorname{Res}(f; z_1) + 2\operatorname{Res}(f; z_2) - \operatorname{Res}(f; z_3) + 0 \cdot \operatorname{Res}(f; z_4)\right) \\
&= 2\pi i \ \sum_{j=1}^{4} \mathbf{Ind}_\Gamma(z_j) \ \operatorname{Res}(f; z_j).
\end{aligned}$$

Estos son los ingredientes esenciales de la demostración general del teorema de los residuos, que se expone en el siguiente apartado.

9.3 EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Teorema 9.2. (Teorema de los residuos). *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbf{C}$ y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus A$, donde $A \subseteq \Omega$ consta de singularidades aisladas de f. Para todo ciclo Γ homólogo a 0 respecto de Ω tal que $A \cap \mathbf{sop}\,\Gamma = \emptyset$ se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f; a) \ \mathbf{Ind}_\Gamma(a).$$

Demostración. Observemos, ante todo, que los sumandos que cuentan realmente en el segundo miembro de la igualdad anterior son los no nulos. Por tanto, examinemos el conjunto

$$A_0 = \{a \in A : \mathbf{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}.$$

Si fuese $A_0 = \emptyset$, se tendría $\mathbf{Ind}_\Gamma(a) = 0$ para todo $a \in A$, con lo cual la suma resultaría nula; pero se sigue también que Γ es homólogo a 0 respecto de $\Omega \setminus A$, abierto en el que f es holomorfa, luego la integral es asimismo nula, en virtud del teorema homológico de Cauchy.

En caso contrario, A_0 es un conjunto *finito*. En efecto:

- A_0 no tiene puntos de acumulación en Ω, porque entonces también A tendría puntos de acumulación en Ω, lo que es falso;
- A_0 no tiene puntos de acumulación fuera de Ω, ya que si $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \Omega$, $\mathbf{Ind}_\Gamma(z_0) = 0$ por ser $\Gamma \sim 0\ (\Omega)$; tomando $r > 0$ tal que $D(z_0; r) \subseteq \mathbf{C} \setminus \mathbf{sop}\,\Gamma$, para todo z del conexo $D(z_0; r)$ se tendría $\mathbf{Ind}_\Gamma(z) = \mathbf{Ind}_\Gamma(z_0) = 0$, con lo cual $D(z_0; r) \cap A_0 = \emptyset$;
- A_0 es un conjunto acotado, pues tomando $R > 0$ de manera que $\mathbf{sop}\,\Gamma \subseteq D(0; R)$, sabemos que es $\mathbf{Ind}_\Gamma(z_0) = 0$ para todo $z_0 \notin D(0; R)$ ($\mathbf{C} \setminus D(0; R)$ está contenido en la componente no acotada de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{sop}\,\Gamma$), y así $A_0 \subseteq D(0; R)$.

En resumen, A_0 es un conjunto acotado que no tiene puntos de acumulación en $\mathbf{C}$, luego forzosamente ha de tener un número finito de puntos. Sean éstos a_1, $a_2, \ldots, a_n$, distintos entre sí.

Ahora, asociamos a los $a_j \in A_0$ $(1 \leq j \leq n)$ sendos discos $D(a_j; R_j)$ contenidos en Ω, elegidos de tal manera que $D(a_j; R_j) \cap A = \{a_j\}$. Para $1 \leq j \leq n$, tomemos $0 < r_j < R_j$, y sean $\gamma_j = \partial D(a_j; r_j)$ la circunferencia de centro a_j y radio r_j orientada positivamente, $N_j = \mathbf{Ind}_\Gamma(a_j)$ y

$$\Gamma_j = \begin{cases} [\gamma_j, \overset{(N_j)}{\ldots}, \gamma_j] & \text{si } N_j > 0, \\ [-\gamma_j, \overset{(-N_j)}{\ldots}, -\gamma_j] & \text{si } N_j < 0, \end{cases}$$

el ciclo formado por $|N_j|$ caminos iguales a γ_j o a $-\gamma_j$, para el que en cualquier caso $\mathbf{Ind}_{\Gamma_j}(z) = N_j\ \mathbf{Ind}_{\gamma_j}(z)$. Veamos que el ciclo

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n$$

es homólogo a Γ respecto de $\Omega \setminus A$. En efecto: para cada $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{sop}\,\Gamma_0$,

$$\mathbf{Ind}_{\Gamma_0}(z) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Ind}_{\Gamma_j}(z) = \sum_{j=1}^{n} N_j\ \mathbf{Ind}_{\gamma_j}(z)$$

y por tanto

* si $z \in \mathbf{C} \setminus \Omega$, $\mathbf{Ind}_\Gamma(z) = 0$ por hipótesis, $\mathbf{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 0$ porque cuando $z \notin D(a_j; R_j)$ es $\mathbf{Ind}_{\gamma_j}(z) = 0$ $(1 \leq j \leq n)$, y tenemos $D(a_j; R_j) \subseteq \Omega$;
* si $z \in A \setminus A_0$, $\mathbf{Ind}_\Gamma(z) = 0$ por la definición de A_0; y como para $1 \leq j \leq n$ es $D(a_j; R_j) \cap A = \{a_j\}$, igual que antes $z \notin D(a_j; R_j)$, $\mathbf{Ind}_{\gamma_j}(z) = 0$, $\mathbf{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 0$;
* si $z = a_m \in A_0$, $\mathbf{Ind}_{\gamma_m}(a_m) = 1$, $\mathbf{Ind}_{\gamma_j}(a_m) = 0$ si $j \neq m$ $(a_m \notin D(a_j; R_j))$, luego $\mathbf{Ind}_{\Gamma_0}(a_m) = N_m = \mathbf{Ind}_\Gamma(a_m)$.

Como $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$, se sigue del teorema homológico de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n N_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Usando ahora que $f \in \mathcal{H}\left(D(a_j; 0, R_j)\right)$, $1 \leq j \leq n$, del teorema de Laurent

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f; a_j)$$

con lo cual, finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz &= \sum_{j=1}^n N_j \operatorname{Res}(f; a_j) = \sum_{j=1}^n \mathbf{Ind}_{\Gamma_j}(a_j) \operatorname{Res}(f; a_j) \\ &= \sum_{a \in A_0} \mathbf{Ind}_\Gamma(a) \operatorname{Res}(f; a) = \sum_{a \in A} \mathbf{Ind}_\Gamma(a) \operatorname{Res}(f; a).\end{aligned}$$

Corolario 9.3. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbf{C}$ y f una función meromorfa en Ω, y sea A el conjunto de los puntos de Ω en los que f tiene polos. Para todo ciclo Γ homólogo a 0 respecto de Ω tal que $A \cap \mathbf{sop}\,\Gamma = \emptyset$ se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f; a)\ \mathbf{Ind}_\Gamma(a).$$

Esta es la versión que da **Rudin**, *ob. cit.*, Teor. 10.24, pp. 254–255, con una línea de demostración ligeramente distinta que se apoya en las partes singulares de f en los puntos de A_0.

Inciso. Como se dice en **Conway**, *ob. cit.*, p. 113, ‘el teorema de los residuos es una espada de dos filos; si se pueden calcular los residuos de una función, se pueden calcular ciertas integrales y viceversa. La mayor parte de las veces, sin embargo, se usa como un medio de calcular integrales. Para utilizarlo en esta dirección se necesita un método para calcular el residuo de una función’.

A veces, partiendo de desarrollos en serie conocidos, es posible determinar el desarrollo de Laurent o, al menos, suficientes términos del mismo, para averiguar el valor del residuo. No siempre esto es factible o, aunque lo sea, puede haber algún procedimiento más cómodo para hallar el residuo. Comencemos por examinar el caso $a \in \mathbf{C}$.

— Por supuesto, si a es una *singularidad evitable* de f, no hay necesidad de ningún cálculo: obviamente, $\operatorname{Res}(f; a) = 0$ en este caso.

— Si a es un *polo simple* de f, habitualmente lo más fácil es usar que

$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} [(z - a)\, f(z)] .$$

Sobre esta base, en cada caso particular se pueden aprovechar las características propias de las funciones que se manejen; por ejemplo, si $1/f$ es una función fácil de derivar en a (se sobreentiende, completada por continuidad en a con el valor 0), el límite anterior es justamente el inverso de la derivada de $1/f$ en a.

— Si a es un *polo de orden* k de f, podemos tener en cuenta que, escribiendo el desarrollo de Laurent de f en a, se tiene evidentemente

$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} \left(\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k\, f(z) \right] \right) ,$$

que para $k = 1$ se reduce a la fórmula anterior. A veces se encuentra esta expresión en forma simplificada

$$\operatorname{Res}(f; a) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k\, f(z) \right]_{z=a} ,$$

sobreentendiendo que $(z-a)^k\, f(z)$ se completa en a por continuidad.

En el punto del infinito:

— Si para un $R > 0$ es $f \in \mathcal{H}(D(0; R, +\infty))$ y definimos $g \in \mathcal{H}(D(0; 0, 1/R))$ por

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) ,$$

resulta

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{z^2}; 0 \right) ,$$

porque si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ en $D(0; R, +\infty)$, hemos definido $\operatorname{Res}(f; \infty) = -a_{-1}$; pero $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n$, con lo que a_{-1} es el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de $g(z)/z^2$.

— En situaciones especiales es más fácil recurrir a otro tipo de argumentos. Por ejemplo, si $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$

$$\operatorname{Res}(f; a_1) + \ldots + \operatorname{Res}(f; a_n) + \operatorname{Res}(f; \infty) = 0.$$

(Probarlo como ejercicio a partir del teorema de los residuos.)

9.4 APLICACIÓN AL CÁLCULO DE INTEGRALES Y A LA SUMACIÓN DE SERIES

Ver **Conway**, *ob. cit.*, pp. 113 y ss.; **Palka**, *ob. cit.*, pp. 326 y ss. Para un tratamiento más amplio y sistemático, la referencia obligada en este tema es el librito de **Mitrinović**, *ob. cit.* De carácter enciclopédico es **Mitrinović, D. S.; Kečkić, J. D.:** *The Cauchy Method of Residues. (Theory and Applications).* Reidel, Dordrecht (1984), que incluye además una breve nota histórica sobre Cauchy y el desarrollo del cálculo de residuos.

9.5 APLICACIONES A LA LOCALIZACIÓN DE CEROS

Teorema 9.4. (Principio del argumento: forma analítica). *Sea f una función meromorfa en un abierto Ω con ceros aislados solamente. Denotemos con Z_f el conjunto de ceros y con P_f el conjunto de polos de f. Para $a \in Z_f$ sea $z_f(a)$ el orden de a como cero de f, y para $a \in P_f$ sea $p_f(a)$ el orden de a como polo de f. Si Γ es un ciclo homólogo a 0 respecto de Ω cuyo soporte no corta a $Z_f \cup P_f$, se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in Z_f} \mathbf{Ind}_\Gamma(a)\, z_f(a) - \sum_{a \in P_f} \mathbf{Ind}_\Gamma(a)\, p_f(a).$$

Nótese que la integral está bien definida, ya que f y f' son continuas en $\mathbf{sop}\,\Gamma$ y f no se anula en $\mathbf{sop}\,\Gamma$; además, sólo hay un número finito de ceros y polos que dan índice no nulo, de modo que en realidad las sumas que aparecen se reducen a un número finito de sumandos.

Demostración. Si f tiene en a un cero de orden k,

$$f(z) = (z - a)^k g(z)$$

para alguna función g, holomorfa donde lo sea f, tal que $g(a) \neq 0$; por tanto, en un entorno de a será $g(z) \neq 0$ y así

$$f'(z) = k\,(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z),$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

en un entorno reducido de a en el que g'/g es holomorfa. Por consiguiente, f'/f tiene en a un polo simple con residuo igual a k.

Análogamente, si f tiene en a un polo de orden p, en un entorno reducido de a es

$$f(z) = (z-a)^{-p} g(z)$$

para alguna función g holomorfa sin ceros, de manera que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

y f'/f tiene en a un polo simple con residuo igual a $-p$.

Puesto que f'/f sólo puede tener singularidades en $Z_f \cup P_f$, aplicando el teorema de los residuos se obtiene la conclusión del enunciado.

Corolario 9.5. (Principio del argumento: interpretación geométrica). *Sea f una función meromorfa en un abierto Ω con ceros aislados solamente. Sea $\Gamma = [\gamma]$ un ciclo homólogo a 0 respecto de Ω, formado por un solo camino γ cuyo soporte no contiene ceros ni polos de f, y sea h un argumento continuo a lo largo del camino "transformado" $f \circ \gamma$, con valor inicial h_0 y valor final h_1. Con la notación del teorema anterior, se verifica*

$$\sum_{a \in Z_f} \mathbf{Ind}_\Gamma(a)\, z_f(a) - \sum_{a \in P_f} \mathbf{Ind}_\Gamma(a)\, p_f(a) = \mathbf{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{h_1 - h_0}{2\pi}.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} = \mathbf{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{h_1 - h_0}{2\pi}.$$

NOTA. El nombre de "principio del argumento" proviene de este resultado; informalmente, cuando $z = \gamma(t)$ "recorre" γ, "se produce una variación continua del argumento" de $f(z)$ igual a $2\pi N$, donde N es el entero del enunciado.

El principio del argumento puede utilizarse para averiguar el número de ceros de una función analítica en un subconjunto del plano complejo. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0;R))$, con $R > 1$, tal que $\Re\mathrm{e}\, f(z) > 0$ si $|z| = 1$. Entonces f no tiene ceros en $D(0;1)$.

[En efecto: si γ es la circunferencia unidad, $\mathbf{sop}(f \circ \gamma)$ no corta al semieje real negativo, por lo cual $\mathbf{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = 0$ en estas condiciones.]

En la práctica, al aplicar el principio del argumento nos encontraremos frecuentemente con la siguiente situación: el ciclo Γ considerado tiene la propiedad de que para ciertos conjuntos **disjuntos** G y E se verifica $\mathbf{C} \setminus \mathbf{sop}\,\Gamma = G \cup E$ y

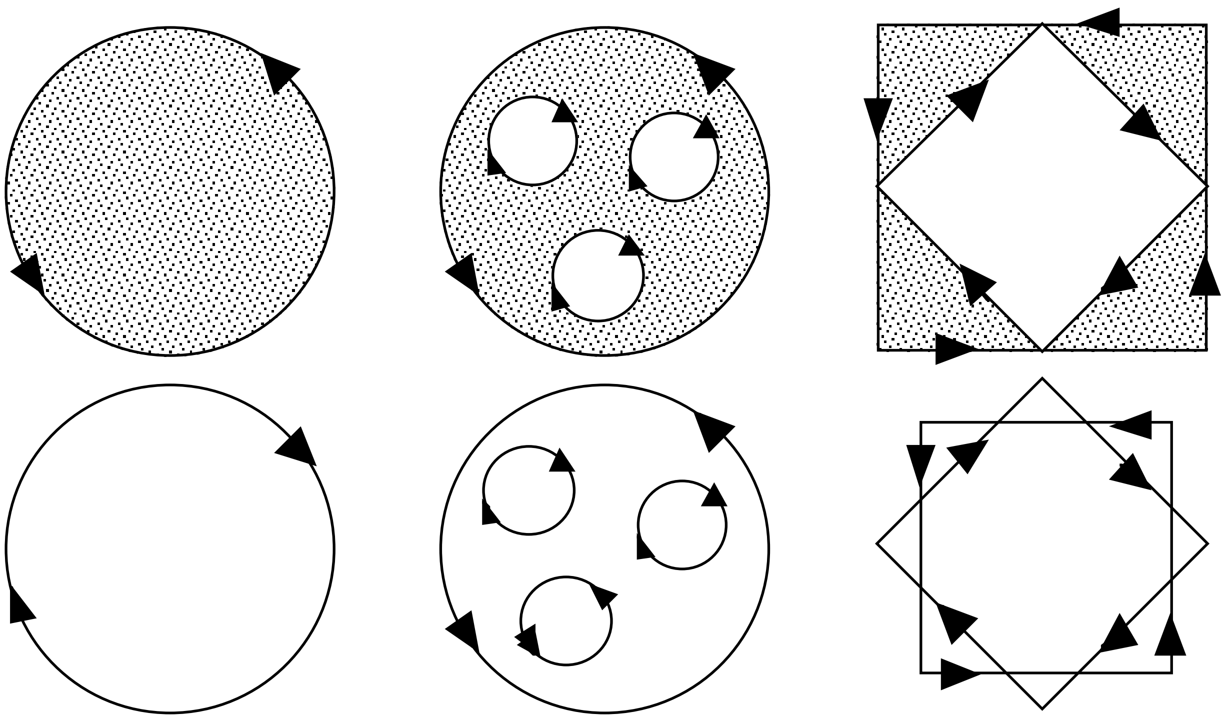
$$\mathbf{Ind}_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in G \\ 0 & \text{si } z \in E. \end{cases}$$

(Necesariamente G y E son abiertos, G acotado y E no acotado.) Como señalamos al comentar el teorema de la curva de Jordan, esto es lo que sucede cuando Γ es un ciclo formado por un solo camino cerrado simple orientado positivamente, pero inmediatamente mostraremos ejemplos de otro tipo.

Para describir esta situación no hay en la literatura una denominación estándar. **Nosotros** nos referiremos a ella diciendo que Γ *limita* o *encierra* a G y que G es el recinto *limitado* o *encerrado* por Γ. Conforme a la nomenclatura empleada en el teorema de la curva de Jordan, se llama a G *el interior* de Γ y a sus puntos *puntos interiores* a Γ, mientras que E es *el exterior* de Γ y los puntos de E, los *puntos exteriores* a Γ.

Se emplea a veces la notación $\Gamma = \partial G$ para indicar que Γ limita o encierra a G.

Ejemplos. En las siguientes figuras, los ciclos de la primera fila encierran el recinto sombreado, mientras que los de la segunda no encierran ningún recinto.



(Gráficamente, se observa que el interior queda siempre "a la izquierda del recorrido". Cf. **Palka**, *ob. cit.*, p. 160.)

Con esta nomenclatura, podemos enunciar:

Corolario 9.6. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Γ un ciclo en Ω que limita un recinto $G \subseteq \Omega$ de manera que* **sop** Γ *no contenga ceros de f. Entonces la integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

es igual al número de ceros de f interiores a Γ, contados según su multiplicidad.

Demostración. Aplicamos el principio del argumento, teniendo en cuenta que Γ es homólogo a 0 respecto de Ω puesto que los $z \in \mathbf{C} \setminus \Omega$ son puntos exteriores a Γ, que f no tiene polos en Ω, que los ceros interiores a Γ tienen índice 1 respecto de Γ, y los exteriores tienen índice 0 respecto de Γ.

El principio del argumento admite una versión más general:

Teorema 9.7. *Sea f meromorfa en una región Ω con ceros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y polos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ contados según su multiplicidad. Si g es analítica en Ω y Γ es un ciclo homólogo a 0 respecto de Ω que no pasa por los ceros ni los polos de f, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g\, \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{n} g(z_j)\ \mathbf{Ind}_\Gamma(z_j) - \sum_{k=1}^{m} g(p_k)\ \mathbf{Ind}_\Gamma(p_k).$$

Demostración. **Conway**, *ob. cit.*, Teor. 3.6, p. 124.

Una consecuencia importante del principio del argumento es el teorema de Rouché, que permite la localización de ceros de funciones desconocidas a partir del número de ceros de funciones conocidas.

Teorema 9.8. (Teorema de Rouché). *Sean $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$, Γ un ciclo en Ω que limita un recinto $G \subseteq \Omega$ de manera que* **sop** Γ *no contenga ceros ni polos de f o de g. Si para todo $z \in$* **sop** Γ *es*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

entonces:

el número de ceros de f interiores a Γ contados según su multiplicidad
menos
el número de polos de f interiores a Γ contados según su multiplicidad
es igual
al número de ceros de g interiores a Γ contados según su multiplicidad
menos
el número de polos de g interiores a Γ contados según su multiplicidad.

Obsérvese que la desigualdad del enunciado implica que f y g no pueden anularse sobre **sop** Γ.

Demostración. El conjunto Ω_1 de los puntos de Ω que no son ceros ni polos de f ni de g es un abierto que contiene a **sop** Γ. Definiendo

$$\Omega_2 = \{z \in \Omega_1 : |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|\},$$

también Ω_2 es un abierto que contiene a **sop** Γ. Además, para cada $z \in \Omega_2$,

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1,$$

con lo cual $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ no podrá ser un número real no negativo. Si L es un logaritmo holomorfo en $\mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$, $F = L \circ (f/g)$ es una función holomorfa en Ω_2, por lo que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F'(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(f/g)'(z)}{(f/g)(z)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz \end{aligned}$$

y basta aplicar el principio del argumento.

NOTA. La demostración anterior aparece en **Glicksberg, I.:** A remark on Rouché's theorem, *Amer. Math. Monthly* **83** (1976), 186–187.

En los textos 'tradicionales' suele imponerse la hipótesis más fuerte

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)|$$

para $z \in$ **sop** Γ, o, cambiando g por $-g$,

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|,$$

quizá la más frecuentemente manejada en la práctica.

Como muestra de cuál es la forma en que puede sacarse partido al teorema de Rouché en el estudio de los ceros de una función, veamos una nueva demostración del teorema fundamental del álgebra. Otros ejemplos, con interesantes comentarios, pueden verse en **Palka**, *ob. cit.*, pp. 342 y ss.

Corolario 9.9. *Si $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, entonces p tiene n raíces (contadas según su multiplicidad).*

Demostración. Puesto que $p(z)/z^n$ tiende a 1 cuando z tiende a ∞, para algún R será

$$\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$$

siempre que $|z| = R$, es decir, $|p(z) - z^n| < |z^n|$. Por el teorema de Rouché, $p(z)$ ha de tener n ceros interiores a $\partial D(0; R)$.

9.6 VALORES LOCALES DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA

Definición 9.10. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, $m \in \mathbf{N}$. Diremos que f* ***aplica*** *z_0* ***en*** *w_0 m* ***veces*** *[abreviado $f(z_0) = w_0$ m veces] o* **con multiplicidad** *m si z_0 es un cero de orden m de la función $f(z) - w_0$.*
Equivalentemente, si $f(z_0) = w_0,\ f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$

Evidentemente, si $w_0 = f(z_0)$, $f(z) - w_0$ siempre tiene un cero en z_0. ¿Podrá afirmarse siempre, pues, que $f(z_0) = w_0$ m veces para algún $m \in \mathbf{N}$? Un momento de reflexión permite concluir que no: nada impide, por ejemplo, que f sea constante en algún disco $D(z_0; r) \subseteq \Omega$ (equivalentemente, que f sea constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0), de manera que z_0 no sea un cero aislado de la función $f(z) - w_0$. Pero es claro que ésta es la única situación excepcional en la que la respuesta es negativa:

Para que $f(z_0) = w_0$ m veces para algún $m \in \mathbf{N}$, es necesario y suficiente que z_0 sea un cero aislado de $f(z) - w_0$ (equivalentemente, que f no sea constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0.)

El siguiente resultado muestra que en el entorno de un punto en el que una función analítica f tome un valor w_0 m veces, la función f alcanza los valores próximos a w_0 justamente en m puntos distintos, "grosso modo" como lo hace la función $g(z) = w_0 + (z - z_0)^m$ (ver **Palka**, *ob. cit.*, pp. 344 y ss., donde se da a este teorema el nombre de *branched covering principle*, "el principio del espacio recubridor ramificado o cubierta ramificada").

Teorema 9.11. *Sea f una función holomorfa en un abierto no vacío arbitrario Ω. Sean $z_0 \in \Omega$, $m \in \mathbf{N}$, $f(z_0) = w_0$ m veces. Entonces existen entornos abiertos V, W de z_0 y w_0 respectivamente, tales que $f(V) = W$ y cada punto $w \in W \setminus \{w_0\}$ es imagen por f exactamente de m puntos distintos $z_1, \ldots, z_m$ de $V \setminus \{z_0\}$.*
Precisando más:

Tomemos **cualquier** *disco $D = D(z_0; r)$ tal que*
$(*)$ $\overline{D} \subseteq \Omega$,
$(**)$ *$f(z) - w_0$ no se anula en $\overline{D} \setminus \{z_0\}$.*
$(***)$ *$f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D \setminus \{z_0\}$*
Poniendo entonces

$$\varrho = \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\} = d(w_0, f(\partial D)),$$
$$W = D(w_0; \varrho),$$
$$V = D \cap f^{-1}(W) = \{z \in D : |f(z) - w_0| < \varrho\},$$

se verifica:
(1) $W = f(V)$;
(2) *para todo* $w \in W \setminus \{w_0\}$ *existen exactamente* m *puntos* ***distintos*** $z_1, \dots, z_m$ *en* $V \setminus \{z_0\}$ *tales que* $f(z_j) = w$ ***con multiplicidad*** 1, $1 \le j \le m$.

Demostración. Puesto que $f(z_0) = w_0$ m veces para algún $m \in \mathbf{N}$, z_0 será un cero aislado de $f(z) - w_0$. Si $f'(z_0) = 0$, para algún disco $D(z_0; \delta) \subseteq \Omega$ tiene que ser $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D \setminus \{z_0\}$, ya que en caso contrario z_0 sería un punto de acumulación de ceros de f' y f' se anularía en toda la componente conexa de Ω que contiene a z_0; en consecuencia $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$, contra la hipótesis de que $f(z_0) = w_0$ m veces para algún $m \in \mathbf{N}$. Tanto en este supuesto como si $f'(z_0) \neq 0$ (por continuidad de f' en tal caso), es posible entonces elegir un $r > 0$ de manera que si $D = D(z_0; r)$,

* $\overline{D} = \overline{D(z_0; r)} \subseteq \Omega$;
* $f(z) - w_0$ no se anula en $\overline{D} \setminus \{z_0\}$;
* $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D \setminus \{z_0\}$.

Tomemos cualquier r en las condiciones anteriores. Poniendo como en el enunciado $\varrho = \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\}$, obviamente $\varrho > 0$ y para $W = D(w_0; \varrho)$, $V = D \cap f^{-1}(W) = \{z \in D : |f(z) - w_0| < \varrho\}$, es claro que W y V son abiertos, $w_0 \in W$, $z_0 \in V$, $V \subseteq \Omega$ y $f(V) \subseteq W$.

Para completar la demostración basta, pues, probar que para todo $w \in W \setminus \{w_0\}$ existen m ceros simples distintos de $f(z) - w$ en $V \setminus \{z_0\}$.

Pero $f(z) - w_0$ tiene exactamente m ceros en D (z_0 contado m veces), y para todo $z \in \partial D$

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \varrho \le |f(z) - w_0|,$$

luego por el teorema de Rouché $f(z) - w$ tiene m ceros (no necesariamente distintos en principio) $z_1, \dots, z_m$ en D. Estos puntos están en V, pues

$$|f(z_j) - w_0| = |w - w_0| < \varrho, \qquad 1 \le j \le m,$$

y son ceros simples, ya que

$$(f(z) - w)'(z_j) = f'(z_j) \neq 0$$

por ser $z_j \in D \setminus \{z_0\}$.

NOTA. También puede afirmarse que el abierto V del enunciado es conexo. Como no necesitaremos esta propiedad de V, no la probamos; hay una demostración en **Palka**, *ob. cit.*, pp. 345–346, seguida de unos comentarios muy ilustrativos que desentrañan la “estructura geométrica local” de f en el entorno de z_0.

Las aplicaciones tales que cada elemento de la imagen tiene exactamente m antiimágenes suelen denominarse “aplicaciones $m \mapsto 1$”. Por esta razón en algunos textos el teorema anterior recibe el nombre de “teorema $m \mapsto 1$”. Con esta nomenclatura, podemos reescribirlo en la siguiente forma:

Corolario 9.12. *Sea Ω un abierto de $\mathbf{C}$, f una función holomorfa en Ω, $z_0 \in \Omega$, $m \in \mathbf{N}$, $f(z_0) = w_0$ m veces. Entonces existen abiertos V, W, tales que*

- $z_0 \in V \subseteq \Omega$;
- $f(V) = W$ *(y, en particular, $w_0 \in W$);*
- $f : V \setminus \{z_0\} \to W \setminus \{w_0\}$ *es suprayectiva y* $m \mapsto 1$.

Si convenimos en que w_0 tiene z_0 como antiimagen m veces, también podemos poner

- $f : V \to W$ *es suprayectiva y* $m \mapsto 1$.

Hay variantes de este teorema que reflejan de forma "analítico-algebraica" la semejanza local de $f(z)$ con $w_0 + (z - z_0)^m$. Por ejemplo:

Proposición 9.13. *Sea Ω un abierto de $\mathbf{C}$, f una función holomorfa en Ω, $z_0 \in \Omega$, $m \in \mathbf{N}$, $f(z_0) = w_0$ m veces. Entonces existen un abierto V y una función $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ tales que*

- $z_0 \in V \subseteq \Omega$;
- $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m$ *(para todo $z \in V$);*
- *la derivada φ' no tiene ceros en V y φ es una aplicación invertible de V sobre un disco $D(0; r)$.*

Demostración. Ver **Rudin**, *ob. cit.* (Teor. 10.32, p. 245).

El ejemplo siguiente ilustra en una situación concreta los conjuntos que intervienen en la demostración del teorema $m \mapsto 1$.

Ejemplo. *Sea $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definida por*

$$f(z) = z + \frac{1}{z},$$

$z_0 = 1$, $w_0 = f(z_0) = 2$. *Comprobar que f toma el valor 2 en 1 dos veces, y ver para qué valores de $r > 0$ se consigue, si $D = D(z_0; r)$, que*

- ∗ $\overline{D} \subseteq \Omega$;
- ∗ $f(z) - w_0$ *no se anule en* $\overline{D} \setminus \{z_0\}$;
- ∗ $f'(z) \neq 0$ *para todo* $z \in D \setminus \{z_0\}$.

Para tales r, hallar $\varrho = \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\}$.

Dibujar, para algún valor de r, los conjuntos

$$J_r = \{f(z) : |z - z_0| = r\}, \qquad K_\varrho = \{z : |f(z) - w_0| = \varrho\}.$$

Respuesta.

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = 0 \iff z = 1 \text{ o } z = -1,$$

y $f''(1) = 2 \neq 0$. Además

$$f(z) - w_0 = \frac{(z-1)^2}{z},$$

luego las condiciones $*$ se verifican exactamente para los r tales que $0 < r < 1$.

Para estos r,

$$\varrho = \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\} = \min\left\{\frac{|z-1|^2}{|z|} : |z-1| = r\right\} = \frac{r^2}{1+r},$$

que es una función de r creciente en $(0, 1)$, de modo que $0 < \varrho < \dfrac{1}{2}$.

Para dibujar J_r, tengamos en cuenta que

$$|z - z_0| = r \iff z = z_0 + r\,e^{it} = 1 + r\,e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

y así

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = 2 + \frac{(z-1)^2}{z} = 2 + r^2\,\frac{e^{2it} + r\,e^{it}}{1 + 2r\cos t + r^2}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

expresión que permite describir paramétricamente con comodidad $\Re\mathrm{e}\, f(z)$, $\Im\mathrm{m}\, f(z)$.

Para dibujar K_ϱ, comencemos por observar que

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = w \iff z = \frac{1}{2}\left(w + \sqrt{w^2 - 4}\right) \text{ ó } z = \frac{1}{2}\left(w - \sqrt{w^2 - 4}\right),$$

que para $w = 2 + \varrho\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, supone, abreviando la notación,

$$z = 1 + \frac{\varrho}{2}\,e^{it} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varrho\,\left(4\,e^{it} + \varrho\,e^{2it}\right)}.$$

Recordando que

$$\sqrt{a + bi} = x + iy \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \\ \operatorname{sig} xy = \operatorname{sig} b, \end{cases}$$

vamos a parar a

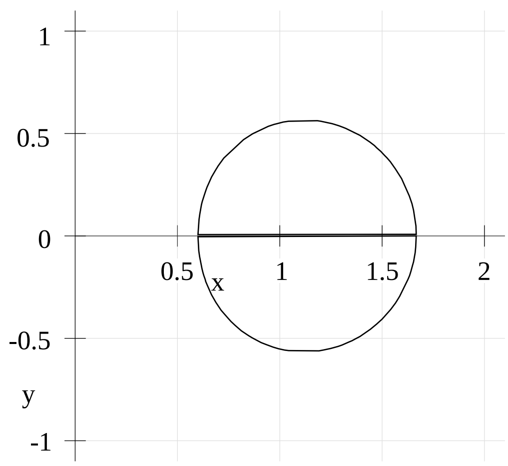
$$\Re\mathrm{e}\, z = 1 + \frac{\varrho}{2}\,\cos t \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{2}\left(4\,\cos t + \varrho\,\cos 2t + \sqrt{16 + 8\varrho\,\cos t + \varrho^2}\right)}$$

$$\Im\mathrm{m}\, z = \frac{\varrho}{2}\,\operatorname{sen} t \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{2}\left(-4\,\cos t - \varrho\,\cos 2t + \sqrt{16 + 8\varrho\,\cos t + \varrho^2}\right)}$$

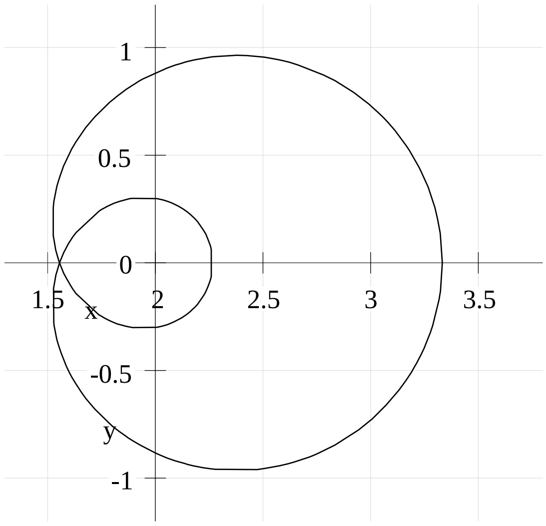
con los signos $\pm$ combinados para que el signo del producto coincida con el de $4\operatorname{sen} t + \varrho\,\operatorname{sen} 2t = (4 + 2\varrho\,\cos t)\,\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$, que es igual al signo de $\operatorname{sen} t$.

Así quedan las gráficas de K_ϱ y J_r para $r = 2/3$:

$$\xrightarrow{f}$$



K_ϱ



J_r

NOTA. Algunos programas de ordenador permiten obtener gráficos animados que muestran, de manera espectacular, la evolución de los conjuntos K_ϱ y J_r según varía r.

9.7 TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA

Corolario 9.14. (Teorema de la aplicación abierta). *Sea Ω un abierto de* **C**, *f una función holomorfa en Ω no constante en ninguna componente conexa de Ω. Entonces f es abierta.*

En particular, $f(\Omega)$ es un abierto de **C**; y si Ω es una región, $f(\Omega)$ también es una región.

Demostración. Recordemos que f es abierta cuando la imagen $f(U)$ de cada abierto $U \subseteq \Omega$ es un **abierto en C**.

Sea, pues, $w_0 \in f(U)$ y tomemos $z_0 \in U$ de modo que $f(z_0) = w_0$. Aplicando el teorema $m \mapsto 1$ en z_0 a la restricción de f a U, encontramos abiertos V, W tales que $z_0 \in V \subseteq U$, $w_0 \in W = f(V) \subseteq f(U)$, y así w_0 es interior a $f(U)$.

El teorema de la aplicación abierta permite dar nuevas demostraciones de resultados conocidos.

Corolario 9.15. (Principio del módulo máximo). *Sea f una función holomorfa no constante en ninguna componente conexa de un abierto Ω de* **C**. *Entonces $|f|$ no puede tener un máximo local en ningún punto de Ω.*

Demostración. Por ser f abierta, dado $z_0 \in \Omega$ y $D(z_0; R) \subseteq \Omega$, si $w_0 = f(z_0)$ existe un disco $D(w_0; r) \subseteq f(D(z_0; R))$ con infinitos puntos w para los que resulta $|f(z_0)| = |w_0| < |w| = |f(z)|$, $z \in D(z_0; R)$.

Ejercicio. Sea f una función holomorfa en una región Ω y supongamos, por ejemplo, que $(\Re\mathrm{e}\, f)^3 = \Im\mathrm{m}\, f$. Entonces f es constante.

[*Indicación*: $f(\Omega)$ no puede ser abierto en **C** al estar contenido en el conjunto $\{x + iy : x, y \in \mathbf{R};\, x^3 = y\}$.]

(Tenemos así otra "explicación" de resultados obtenidos como consecuencia de las condiciones de Cauchy-Riemann.)

9.8 TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA

Teorema 9.16. (Teorema* global *de la función inversa). *Sea f una función holomorfa e inyectiva en un abierto no vacío Ω. Entonces*

- *$f(\Omega)$ es abierto;*
- *$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ es continua;*
- *$f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$;*
- *f^{-1} es holomorfa en $f(\Omega)$, y para cada $w_0 \in f(\Omega)$ es*

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)},$$

donde $z_0 = f^{-1}(w_0)$.

Demostración. Como f es inyectiva, no es constante en ninguna componente conexa de Ω, con lo que f será abierta y por ello $f(\Omega)$ es abierto y f^{-1} es continua.

Si en algún punto $z \in \Omega$ fuese $f'(z) = 0$, tendríamos $f(z) = w$ m veces, con $m \geq 2$; en consecuencia, la restricción de f a algún entorno V de z sería $m \mapsto 1$, contra la inyectividad de f.

Por último, el teorema de derivabilidad de la función inversa en un punto es así aplicable en cada punto de $f(\Omega)$, de manera que $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega)$ ya que f^{-1} es derivable en cada punto de $f(\Omega)$, y su derivada viene dada, como ya sabíamos, por la fórmula del enunciado.

Observación. Para que una función holomorfa sea inyectiva es condición *necesaria* pero *no suficiente* que la derivada no se anule en ningún punto. Por ejemplo, la función exponencial tiene derivada no nula en todos los puntos sin ser inyectiva. Tal como sucede en el caso de funciones de varias variables reales, en el recíproco sólo se llega a un resultado *local*, que es una ligera mejora del “teorema $1 \mapsto 1$”.

Teorema 9.17. (Teorema* local *de la función inversa). *Sea f una función holomorfa en un abierto no vacío arbitrario Ω. Sean $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen entornos abiertos V, W de z_0 y w_0 respectivamente, tales que f aplica biyectivamente V sobre W y $(f|_V)^{-1} : W \to V$ es holomorfa en W. Precisando más:*

Tomemos **cualquier** *disco $D = D(z_0; r)$ tal que*
$(*)$ $\overline{D} \subseteq \Omega$,
$(**)$ $f(z) - w_0$ *no se anula en* $\overline{D} \setminus \{z_0\}$.
Poniendo entonces

$$
\begin{aligned}
\varrho &= \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\} = d(w_0, f(\partial D)),\\
W &= D(w_0; \varrho),\\
V &= D \cap f^{-1}(W) = \{z \in D : |f(z) - w_0| < \varrho\},
\end{aligned}
$$

se verifica:
(1) $f : V \to W$ *biyectivamente;*
(2) $f'(z) \neq 0$ *para cada* $z \in V$*;*
(3) $(f|_V)^{-1} : W \to V$ *es holomorfa.*

Demostración. Nótese que **siempre existen** discos $D = D(z_0; r)$ para los que se cumplen las hipótesis $(*)$ y $(**)$, pues en caso contrario encontraríamos una sucesión de puntos $z_n \in \Omega \setminus \{z_0\}$ con límite z_0 de manera que $f(z_n) = w_0 = f(z_0)$ para todo n, y resultaría $f'(z_0) = 0$.

(1) Evidentemente $f(V) \subseteq W$, luego para probar que f aplica biyectivamente V sobre W basta ver que para cada $w \in W$ existe un $z \in V$ y sólo uno tal que $f(z) = w$, o equivalentemente, que para cada $w \in W$ el número de ceros de la función $f(z) - w$ en V sea 1.

Tomemos, pues, $w \in W = D(w_0; \varrho)$. Por hipótesis, el número de ceros de $f(z) - w_0$ en D es exactamente 1, y si γ es la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, para cada $z \in \mathbf{sop}\,\gamma = \partial D$,

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \varrho \le |f(z) - w_0|,$$

luego por el teorema de Rouché $f(z) - w$ tiene un cero simple en D, que estará en V porque si $f(z) = w$, $|f(z) - w_0| = |w - w_0| < \varrho$.

(2) Como la restricción de f a V es inyectiva, f no es constante en ninguna componente conexa de V, con lo cual f es abierta. Denotando por comodidad con f^{-1} la inversa de la restricción de f a V, esto significa que $f^{-1} : W \to V$ es continua y, de paso, implica que V es conexo por serlo W. Si aplicamos el teorema global de la función inversa, necesariamente $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in V$.

(3) Basta tener en cuenta que, según acabamos de ver, $f^{-1} : W \to V$ es continua y $f'(z) \neq 0$ para los $z \in V$.

Teorema 9.18. (Representaciones de la función inversa). *Sea f una función holomorfa en un abierto no vacío arbitrario Ω. Sean $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$. Consideremos un disco $D = D(z_0; r)$ tal que*
$(*)$ $\overline{D} \subseteq \Omega$,
$(**)$ $f(z) - w_0$ *no se anula en* $\overline{D} \setminus \{z_0\}$.
Sea, como antes,

$$\begin{aligned} \varrho &= \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\} = d(w_0, f(\partial D)), \\ W &= D(w_0; \varrho), \\ V &= D \cap f^{-1}(W) = \{z \in D : |f(z) - w_0| < \varrho\}. \end{aligned}$$

Llamando γ a la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, siempre que $|w - w_0| < \varrho$ se verifica

$$\text{(1)} \qquad f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w}\, dz;$$

$$\text{(2)} \qquad f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}}\, dz \right] (w - w_0)^n;$$

$$\text{(3)} \qquad f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\psi(z)^n \right) \right]_{z=z_0} (w - w_0)^n,$$

donde $\psi(z) = \dfrac{z - z_0}{f(z) - w_0}$ ***(fórmula de Lagrange para la inversión de una serie)*** .

Demostración. El ciclo formado por γ es homólogo a 0 respecto de Ω: los puntos de D son los únicos con índice no nulo respecto de γ.

(1) Dado $w \in W = D(w_0; r)$, hemos probado anteriormente que hay un único punto $a \in D = D(z_0; r)$ tal que $f(a) = w$. Además, para cada $z \in \partial D$ es

$$|f(z) - w_0| \geq \varrho > |w - w_0|,$$

luego a es el único punto en $\overline{D}$ para el que $f(a) = w$.

Por consiguiente, la función

$$g(z) = \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w}$$

es meromorfa en Ω, no tiene singularidades sobre $\mathbf{sop}\,\gamma$ y a es la única singularidad con índice no nulo ($= 1$) respecto de γ. Aplicando el teorema de los residuos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \operatorname{Res}(g; a).$$

Puesto que

$$\lim_{z\to a}[(z-a)\, g(z)] = \lim_{z\to a} \left(\frac{z-a}{f(z) - f(a)}\, z\, f'(z) \right) = \frac{1}{f'(a)}\, a\, f'(a) = a,$$

g tiene en a un polo simple (o una singularidad evitable si $a = 0$); en cualquier caso, $\operatorname{Res}(g; a) = a$ y así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w}\, dz = a = f^{-1}(w).$$

(2) Teniendo en cuenta que si $z \in \mathbf{sop}\,\gamma$, entonces $|f(z) - w_0| \geq \varrho > |w - w_0|$, desarrollando en potencias de $w - w_0$ el integrando de (1) e integrando término a término como de costumbre obtenemos la igualdad deseada.

(3) Integrando por partes, para $n \geq 1$ resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i n} \int_\gamma \frac{dz}{(f(z) - w_0)^n}$$

y esta última integral podemos calcularla a través del teorema de los residuos, pues el integrando presenta una única singularidad en z_0, que es exactamente un polo de orden n, y así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i n} \int_\gamma \frac{dz}{(f(z) - w_0)^n} &= \frac{1}{n} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(f(z) - w_0)^n}; z_0 \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right) \right]_{z=z_0}. \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $\Omega = \mathbf{C}$, $f(z) = z\,e^z$, $z_0 = 0$, $w_0 = f(z_0) = 0$. En este caso $f(z) = w_0 = 0$ sólo para $z = 0$, luego para cualquier $r > 0$ el disco $D(z_0; r)$ cumple $(*)$ y $(**)$. Como

$$\begin{aligned}\varrho &= \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\} = \min\{|z\,e^z| : |z| = r\}\\ &= \min\{r\,e^{\Re e\, z} : |z| = r\} = r\,e^{-r},\end{aligned}$$

el valor máximo para ϱ se obtiene si $r = 1$, en cuyo caso $\varrho = e^{-1}$.

El desarrollo en serie de $f^{-1} : D(0; 1/e) \to D(0; 1)$ se halla muy fácilmente por el método de Lagrange, pues ahora $\psi(z) = e^{-z}$ y

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\psi(z)^n\right)\right]_{z=z_0} = (-1)^{n-1}\,n^{n-1},$$

con lo cual

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n^{n-1}}{n!}\,w^n, \qquad |w| < \frac{1}{e}.$$

(La serie tiene radio de convergencia $1/e$).

NOTA. En **Markushevich, A. I.:** *Theory of Functions of a Complex Variable (Vol. II).* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965), p. 94 y ss., pueden verse ejemplos muy interesantes de aplicaciones de la fórmula de Lagrange al estudio de los polinomios de Legendre y de la ecuación de Kepler para la anomalía excéntrica.

9.9 EJERCICIOS RESUELTOS

Comenzaremos por aplicar el teorema de los residuos al cálculo de una integral real.

Ejercicio. *Estudiar la existencia y, en su caso, calcular el valor de*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 20}\,dx.$$

Respuesta. El integrando es una función (llamémosle g) definida y continua en todo $\mathbf{R}$. Sin embargo no es una función integrable-Lebesgue en $\mathbf{R}$, pues si lo fuese lo sería también (comparando por cociente) la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, que ya sabemos que no es integrable-Lebesgue en $\mathbf{R}$.

La integral tiene sentido como integral impropia, convergente por el criterio de Abel: “si φ es una función impropiamente integrable en un intervalo (a, b) y

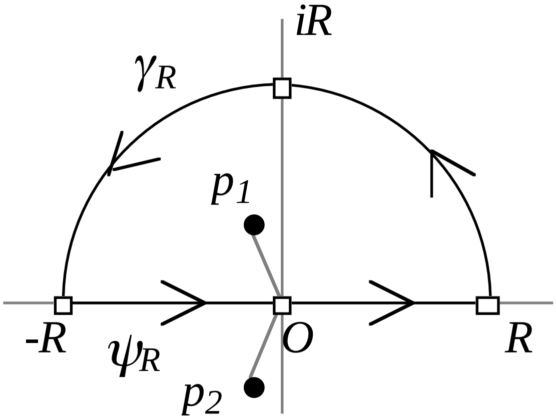
ψ es una función monótona y acotada en dicho intervalo, $\int_a^b \varphi\, \psi$ es convergente”. En nuestro caso: $g = \varphi\, \psi$ para $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\psi(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4x+20}$; puesto que $\psi'(x) = \dfrac{4x\,(x+10)}{(x^2+4x+20)^2}$ y $\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x) = 1$, ψ está acotada en $\mathbf{R}$ y es monótona en $(0,+\infty)$, $(-\infty,-10)$; por la convergencia de la integral de φ en ambos intervalos, g es impropiamente integrable en los mismos, y es integrable (es continua) en $[-10,0]$. Ensamblando estos resultados, obtenemos que g es impropiamente integrable en $\mathbf{R}$.

De todas formas, los cálculos que haremos a continuación *probarán* que la integral tiene sentido al menos como *valor principal*, es decir, que existe $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} g$.

La función f definida por

$$f(z) = \frac{z\, e^{iz}}{z^2+4z+20}$$

es meromorfa en $\mathbf{C}$, y sus únicas singularidades son los polos simples $p_1 = -2+4i$, $p_2 = -2-4i$.



Si Γ_R es el ciclo formado por el camino $\gamma_R \cup \psi_R$, donde (ver figura) $\gamma_R : t \in [0,\pi] \to \gamma_R(t) = R\, e^{it} \in \mathbf{C}$, $\psi_R : t \in [-R,R] \to \psi_R(t) = t \in \mathbf{C}$, siempre que $R > |p_1| = \sqrt{20}$ será Γ_R un ciclo homólogo a 0 en $\mathbf{C}$ para el que $\mathbf{Ind}_{\Gamma_R}(p_1) = 1$, $\mathbf{Ind}_{\Gamma_R}(p_2) = 0$. Podemos así aplicar el teorema de los residuos para obtener

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} f &= 2\pi i\ \operatorname{Res}(f;\, p_1) = 2\pi i \lim_{z\to p_1} (z-p_1)\, \frac{z\, e^{iz}}{(z-p_1)(z-p_2)} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right) e^{-4-2i} = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \pi\, e^{-4-2i}.\end{aligned}$$

Pero

$$\int_{\Gamma_R} f = \int_{\gamma_R} f + \int_{\psi_R} f = \int_{\gamma_R} f + \int_{-R}^{R} f(x)\, dx,$$

y puesto que $\lim_{R\to+\infty}(R^2-4R-20)=+\infty$, existirá un $R_0>\sqrt{2}0$ tal que, para todo $R>R_0$, $R^2-4R-20>0$; siempre que $R>R_0$ podremos poner, pues,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(R\,e^{it})\,Ri\,e^{it}\,dt\right| \le \int_0^{\pi} \left|f(R\,e^{it})\right|\,R\,dt\\ &\le \frac{R\cdot R}{R^2-4R-20}\int_0^{\pi}\left|e^{iR\,e^{it}}\right|\,dt = \frac{R^2}{R^2-4R-20}\int_0^{\pi} e^{-R\,\operatorname{sen} t}\,dt.\end{aligned}$$

Dado que para $t\in(0,\pi)$ es $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} e^{-R\,\operatorname{sen} t}=0$ y $\left|e^{-R\,\operatorname{sen} t}\right| = e^{-R\,\operatorname{sen} t} < e^0 = 1\in L^1([0,\pi])$, por el teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\,\operatorname{sen} t}\,dt = 0.$$

(En la mayor parte de los textos, este resultado, conocido como *lema de Jordan*, se prueba sin hacer referencia a la integral de Lebesgue mediante la acotación $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\,\operatorname{sen} t}\,dt \le \frac{\pi}{R}(1-e^R)$, deducida de la desigualdad $\operatorname{sen} t \ge \dfrac{2t}{\pi}$ para $0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$.)

Como consecuencia,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f = 0,$$

lo que permite deducir la existencia y valor del límite

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \left(-\frac{1}{2}+i\right)\pi\,e^{-4-2i}$$

y de aquí

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\;\operatorname{sen} x}{x^2+4x+20}\,dx = \Im\mathrm{m}\left(\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right) = (\cos 2+\frac{1}{2}\;\operatorname{sen} 2)\,\pi\,e^{-4}.$$

En el próximo ejercicio aplicaremos el teorema de Rouché y el principio del argumento para localizar ceros de un polinomio en conjuntos de distinto tipo.

Ejercicio. *Hallar el número de ceros que tiene el polinomio*

$$P(z) = z^3-(1+2i)\,z^2-(3-7i)\,z+8-4i$$

en la corona $D(0;1/2,5)=\{z\in\mathbf{C}:\dfrac{1}{2}<|z|<5\}$.

¿Cuántos de ellos están en el semiplano superior $H'=\{z\in\mathbf{C}:\Im\mathrm{m}\,z>0\}$*? ¿Cuántos de ellos están en el semiplano inferior* $H''=\{z\in\mathbf{C}:\Im\mathrm{m}\,z<0\}$*? ¿Por qué?*

Respuesta. Sea $g(z) = z^3$, $z \in \mathbf{C}$. Si $|z| = 5$,

$$\begin{aligned} |P(z) - g(z)| &= |-(1+2i)\,z^2 - (3-7i)\,z + 8 - 4i| \\ &\leq |1+2i| \cdot 5^2 + |3-7i| \cdot 5 + |8-4i| = \sqrt{3} \cdot 25 + \sqrt{58} \cdot 5 + \sqrt{80} \\ &< 3 \cdot 25 + 8 \cdot 5 + 9 = 113 < 125 = |z|^3 = |g(z)|, \end{aligned}$$

con lo cual:

- $P(z)$ y $g(z)$ son funciones holomorfas en todo $\mathbf{C}$ que no se anulan sobre la circunferencia $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 5\}$;
- podemos aplicar el teorema de Rouché para concluir que P y g tienen el mismo número de ceros (contados según su multiplicidad) en el interior de dicha circunferencia, es decir, 3.

  Sea ahora $h(z) = 8 - 4i$, $z \in \mathbf{C}$. Si $|z| = \frac{1}{2}$, análogamente

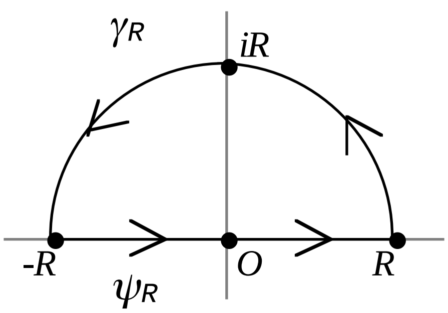
$$|P(z) - h(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{58}\,\frac{1}{2} < \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 8 < 5 < |8-4i| = |h(z)|,$$

con lo cual:

- $P(z)$ y $h(z)$ son funciones holomorfas en todo $\mathbf{C}$ que no se anulan sobre la circunferencia $\{z \in \mathbf{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$;
- podemos aplicar el teorema de Rouché para concluir que P y h tienen el mismo número de ceros (contados según su multiplicidad) en el interior de dicha circunferencia, es decir, 0.

  En consecuencia, $P(z)$ tiene 3 ceros en la corona $D(0; 1/2, 5)$. (Puesto que a lo más puede tener 3 ceros en $\mathbf{C}$, se sigue que *todos* los ceros de P quedan dentro de la corona).

Para ver cuántos de ellos están en H' bastará, pues, averiguar simplemente cuál es el número N de ceros que tiene P en H'. Como el polinomio P tiene un número finito de ceros, si M es el máximo de los módulos de todos ellos, los N que estén en H' quedarán en el interior del ciclo Γ_R formado por el camino $\gamma_R \cup \psi_R$, donde (ver figura)



$$\gamma_R : t \in [0, \pi] \to R\,e^{it} \in \mathbf{C};$$
$$\psi_R : t \in [-R, R] \to t \in \mathbf{C},$$

y R es cualquier valor mayor que M.

Por consiguiente, dado que P es holomorfa en $\Omega = \mathbf{C}$ y trivialmente $\Gamma_R \sim 0$ $(\mathbf{C})$, si P no se anula en el soporte de Γ_R, podemos hallar N aplicando la versión geométrica del principio del argumento.

Comprobemos que P no se anula en **sop** Γ_R. Por la elección de R, es obvio que P no se anula en el soporte de γ_R; tampoco se anula en el soporte de ψ_R, como se vió en el Capítulo 5, Sección 5.4.

Así pues, siempre que $R > M$ se tendrá

$$N = \mathbf{Ind}_{P\circ(\gamma_R\cup\psi_R)}(0),$$

y en consecuencia también

$$N = \lim_{R\to+\infty} \mathbf{Ind}_{P\circ(\gamma_R\cup\psi_R)}(0),$$

que nos llevará más fácilmente al cálculo de N.

Es inmediato comprobar (¡comprobar!) que $P\circ(\gamma_R\cup\psi_R) = (P\circ\gamma_R)\cup(P\circ\psi_R)$ y que $\Delta\,\mathbf{arg}(P \circ (\gamma_R \cup \psi_R)) = \Delta\,\mathbf{arg}(P \circ \gamma_R) + \Delta\,\mathbf{arg}(P \circ \psi_R)$. Aplicando el razonamiento del final de la Sección 5.4 a nuestro polinomio P,

$$\lim_{R\to+\infty} \underset{0\le t\le\pi}{\Delta\mathrm{ARG}}\, P(R\,e^{it}) = 3\pi.$$

También se probó entonces que si

$$x(t) := \Re\mathrm{e}\,(P \circ \psi_R)(t) = \Re\mathrm{e}\, P(t) = t^3 - t^2 - 3t + 8,$$
$$y(t) := \Im\mathrm{m}\,(P \circ \psi_R)(t) = \Im\mathrm{m}\, P(t) = -2t^2 + 7t - 4,$$

se obtenía, para valores "suficientemente grandes" de R,

$$\underset{-R\le t\le R}{\Delta\mathrm{ARG}}(P \circ \psi_R)(t) = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y(R)}{x(R)} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y(-R)}{x(-R)},$$

de donde se sigue que

$$\lim_{R\to+\infty} \underset{-R\le t\le R}{\Delta\mathrm{ARG}}(P \circ \psi_R)(t) = \pi,$$

lo que unido a lo anterior permite concluir que

$$2\pi N = 2\pi \cdot \lim_{R\to+\infty} \mathbf{Ind}_{P\circ(\gamma_R\cup\psi_R)}(0) = 3\pi + \pi = 4\pi,$$

es decir, que $N = 2$.

Como P tiene 3 ceros, ninguno de ellos real, esto implica que el número de ceros de P en H'' es necesariamente 1.

- — o O o — -