
PROBLEMAS RESUELTOS

EJEMPLO 1.

En una granja agrícola se desea criar conejos y pollos como complemento en su economía, de forma que no se superen en conjunto las 180 horas mensuales destinadas a esta actividad. Su almacén sólo puede albergar un máximo de 1000 kilogramos de pienso. Si se supone que un conejo necesita 20 kilogramos de pienso al mes y un pollo 10 kilogramos al mes, que las horas mensuales de cuidados requeridos por un conejo son 3 y por un pollo son 2 y que los beneficios que reportaría su venta ascienden a 500 y 300 pesetas por cabeza respectivamente, hallar el número de animales que deben criarse para que el beneficio sea máximo.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de conejos.

x_2 = número de pollos.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = 500x_1 + 300x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$20x_1 + 10x_2 \leq 1000 \quad (\text{para la disponibilidad del pienso})$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180 \quad (\text{para la disponibilidad de horas})$$

Finalmente, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \max \quad f(x_1, x_2) = 500x_1 + 300x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 20x_1 + 10x_2 \leq 1000 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

El siguiente paso consistirá en pasar a la forma estándar, esto es, introducimos variables de holgura en las dos restricciones verdaderas, obteniendo, una vez realizadas las simplificaciones oportunas:

$$\begin{array}{l} \max \quad 500x_1 + 300x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 2x_1 + x_2 + x_3^H = 100 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_4^H = 180 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H \geq 0 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 100, \quad x_4^H = 180$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_3^H	100	2	3	1	0
	x_4^H	180	3	2	0	1
			500	300	0	0

↑

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_1	50	1	1/2	1/2	0
	x_4^H	30	0	1/2	-3/2	1
			0	50	-250	0

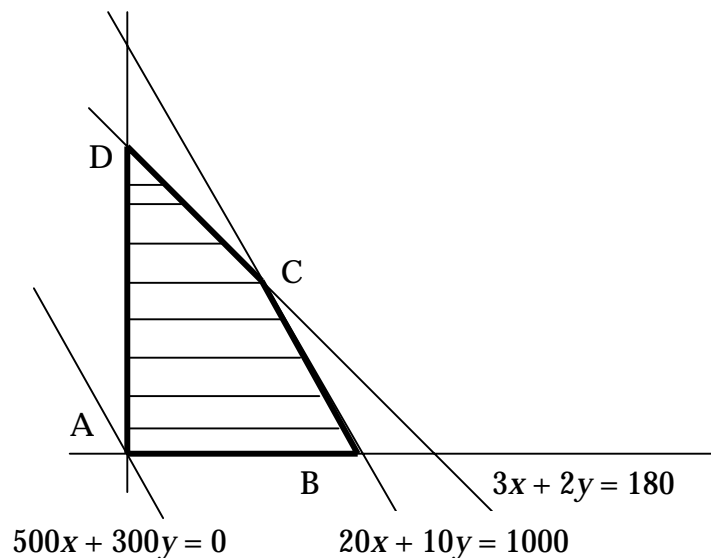
↑

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H
x_1	20	1	0	2	-1
x_2	60	0	1	-3	2
		0	0	-100	-100

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_1^* = 20 \text{ conejos, } x_2^* = 60 \text{ pollos, } Z^* = 28000 \text{ pesetas.}$$

Este problema puede ser resuelto también gráficamente:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$$A = (0,0), B = (50,0), C = (20,60), D = (0,90)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 25000, f(C) = 28000, f(D) = 27000$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 20 conejos y 60 pollos, con un beneficio máximo de 28000 pesetas.

EJEMPLO 2.

En una fábrica de dulces navideños se preparan dos surtidos para lanzarlos al mercado. El primero se vende a 450 pesetas y contiene 150 gramos de polvorones, 100 gramos de mantecados y 80 gramos de roscos de vino. El segundo surtido se vende a 560 pesetas y contiene 200 gramos de polvorones, 100 gramos de mantecados y 100 gramos de roscos de vino. Se dispone de un total de 200 kilogramos de polvorones, 130 kilogramos de mantecados y 104 kilogramos de roscos de vino. La empresa de embalajes sólo le puede suministrar 1200 cajas. ¿Cuántos surtidos de cada tipo convendría fabricar para que el beneficio sea máximo?.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de surtidos del tipo 1.

x_2 = número de surtidos del tipo 2.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = 450x_1 + 560x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$150x_1 + 200x_2 \leq 200000 \quad (\text{para la disponibilidad de los polvorones})$$

$$100x_1 + 100x_2 \leq 130000 \quad (\text{para la disponibilidad de los mantecados})$$

$$80x_1 + 100x_2 \leq 104000 \quad (\text{para la disponibilidad de los roscos})$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200 \quad (\text{para la disponibilidad de las cajas})$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
 \max \quad f(x_1, x_2) = 450x_1 + 560x_2 \\
 \text{s.a.:} \quad 150x_1 + 200x_2 \leq 200000 \\
 \quad \quad 100x_1 + 100x_2 \leq 130000 \\
 \quad \quad 80x_1 + 100x_2 \leq 104000 \\
 \quad \quad x_1 + x_2 \leq 1200 \\
 \quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Observamos que la restricción de la disponibilidad de cajas implica la restricción de la disponibilidad de los mantecados, por lo que esta última puede ser eliminada del problema. Teniendo en cuenta esta circunstancia, y simplificando en el resto de las restricciones, obtenemos la forma estándar:

$$\begin{array}{l}
 \max \quad 450x_1 + 560x_2 \\
 \text{s.a.:} \quad \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 + x_3^H = 2000 \\
 \quad \quad \frac{4}{5}x_1 + x_2 + x_4^H = 1040 \\
 \quad \quad x_1 + x_2 + x_5^H = 1200 \\
 \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^H \geq 0
 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 2000, \quad x_4^H = 1040, \quad x_5^H = 1200$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H	
←	x_3^H	2000	3/2	2	1	0	0
	x_4^H	1040	4/5	1	0	1	0
	x_5^H	1200	1	1	0	0	1
			450	560	0	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_2	1000	3/4	1	1/2	0	0
x_4^H	40	1/20	0	-1/2	1	0
x_5^H	200	1/4	0	-1/2	0	1
		30	0	-280	0	0

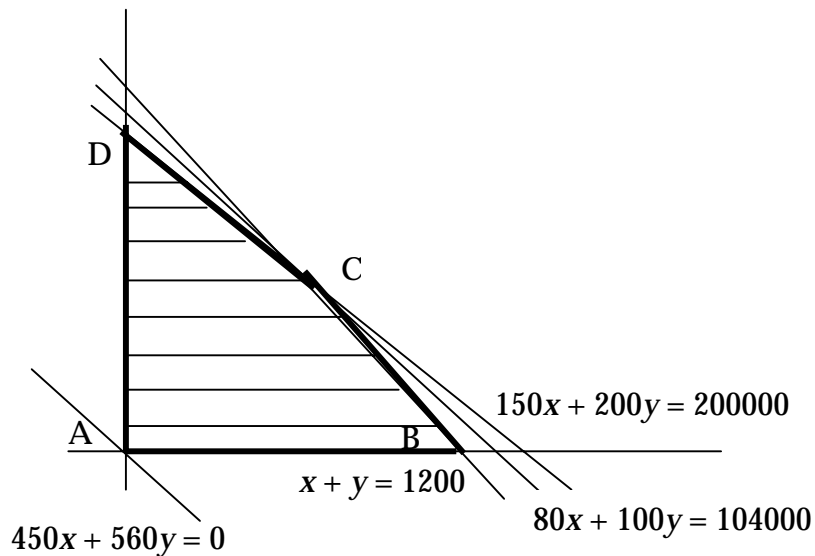
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_2	400	0	1	8	-15	0
x_1	800	1	0	-10	20	0
x_5^H	0	0	0	2	-5	1
		0	0	20	-600	0

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_2	400	0	1	0	5	-4
x_1	800	1	0	0	-5	5
x_3^H	0	0	0	1	-5/2	1/2
		0	0	0	-550	-10

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_1^* = 800 \text{ surtidos tipo 1, } x_2^* = 400 \text{ surtidos tipo 2, } Z^* = 584000 \text{ pesetas.}$$

Notamos que al igual que ocurría para el ejemplo 1, este problema puede ser resuelto también gráficamente, donde identificamos las variables por comodidad como x e y (número de surtidos del tipo 1 y del tipo 2 respectivamente). El método de resolución gráfica quedará de la siguiente manera:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo. Notamos que el punto de corte de las tres rectas de las restricciones tomadas dos a dos, es el mismo punto C:

$$A = (0,0), B = (1200,0), C = (800,400), D = (0,1000)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 540000, f(C) = 584000, f(D) = 560000$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 800 surtidos del tipo 1 y 400 del tipo 2, con un beneficio máximo de 584000 pesetas.

EJEMPLO 3.

Cierto fabricante produce sillas y mesas para las que requiere la utilización de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere 1 hora de trabajo en la sección de montaje y de 2 horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de 3 horas en la sección de montaje y de 1 hora en la de pintura. La sección de montaje sólo puede estar 9 horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura sólo 8 horas. El beneficio produciendo mesas es doble que el de sillas. ¿Cuál ha de ser la producción diaria de mesas y sillas para que el beneficio sea máximo?

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de sillas.

x_2 = número de mesas.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$x_1 + 3x_2 \leq 9 \quad (\text{disponibilidad de horas en la sección de montaje})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\text{disponibilidad de horas en la sección de pintura})$$

Finalmente, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Obtenemos la forma estándar al introducir las correspondientes variables de holgura:

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad x_1 + 3x_2 + x_3^H = 9 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 + x_4^H = 8 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H \geq 0 \end{array} \right.$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 9, \quad x_4^H = 8$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_3^H	9	1	3	1	0
	x_4^H	8	2	1	0	1
			1	2	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

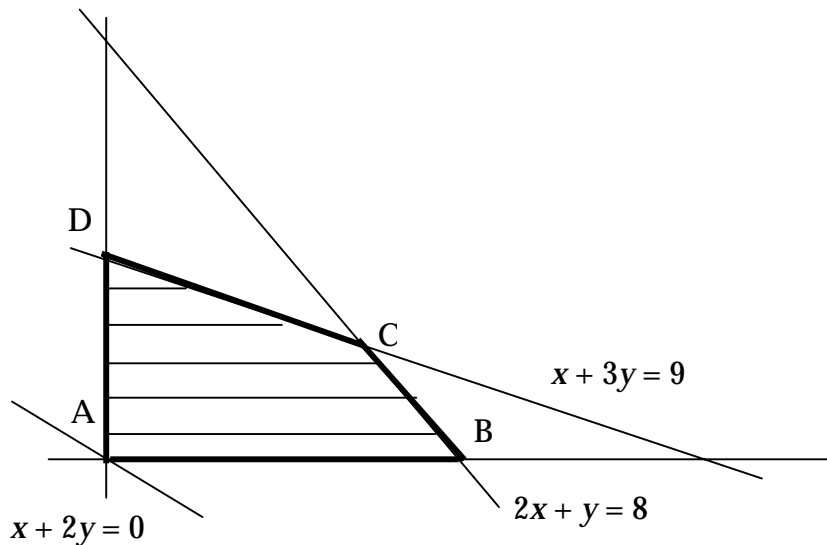
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_2	3	1/3	1	1/3	0
	x_4^H	5	5/3	0	-1/3	1
			1/3	0	-2/3	0

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
	x_2	2	0	1	2/5	-1/5
	x_1	3	1	0	-1/5	3/5
			0	0	-3/5	-1/5

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_1^* = 3 \text{ sillas}, \quad x_2^* = 2 \text{ mesas}, \quad Z^* = 7 \text{ veces el valor de venta de una silla.}$$

Notamos que de nuevo este problema puede ser resuelto aplicando el método gráfico, donde identificamos las variables por comodidad como x e y (número de sillas y de mesas respectivamente). Así pues, obtenemos:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$$A = (0,0), B = (4,0), C = (3,2), D = (0,3)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 4, f(C) = 7, f(D) = 6$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 3 sillas y 2 mesas, con un beneficio máximo de 7 veces el valor de una silla.

EJEMPLO 4.

En una fábrica se elaboran tres tipos de herramientas A, B y C. En la fábrica trabajan 3 obreros durante 8 horas diarias y un revisor, para comprobar las herramientas una vez construidas, que trabaja 1 hora diaria. Para la construcción de A se emplean 3 horas diarias de mano de obra y precisa de 6 minutos de revisión, para la construcción de B se emplean igualmente 3 horas de mano de obra y 4 minutos para su revisión, y para C es necesaria 1 hora diaria de mano de obra y 3 minutos de revisión. Por problemas de producción en la fábrica no se pueden fabricar más de 12 herramientas diarias y el precio de cada herramienta A, B y C es de 4000, 3000 y 2000 pesetas respectivamente. Hallar cuántas unidades se deben elaborar cada día de cada una de ellas para obtener un beneficio máximo.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de unidades diarias del tipo A.

x_2 = número de unidades diarias del tipo B.

x_3 = número de unidades diarias del tipo C.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de mano de obra})$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 60 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de revisión})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \quad (\text{restricción de número de herramientas})$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad f(x_1, x_2, x_3) = 4000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3 \\ \text{s.a.:} \quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 \\ \quad \quad 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 60 \\ \quad \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Obtenemos la forma estándar al introducir las correspondientes variables de holgura:

$$\begin{array}{l}
 \max \quad 4000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3 \\
 \text{s.a.:} \quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4^H = 24 \\
 \quad \quad 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5^H = 60 \\
 \quad \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6^H = 12 \\
 \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4^H, x_5^H, x_6^H \geq 0
 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4^H = 24, \quad x_5^H = 60, \quad x_6^H = 12$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3	x_4^H	x_5^H	x_6^H
←	x_4^H	24	3	3	1	0	0
	x_5^H	60	6	4	3	0	1
	x_6^H	12	1	1	1	0	1
			4000	3000	2000	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3	x_4^H	x_5^H	x_6^H
←	x_1	8	1	1	1/3	1/3	0
	x_5^H	12	0	-2	1	-2	1
	x_6^H	4	0	0	2/3	-1/3	0
			0	-1000	2000/3	-4000/3	0

		x_1	x_2	x_3	x_4^H	x_5^H	x_6^H
	x_1	6	1	1	0	1/2	0
	x_5^H	6	0	-2	0	-3/2	1
	x_3	6	0	0	1	-1/2	0
			0	-1000	0	-5000/3	0

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 6$ herramientas A, $x_2^* = 0$ herramientas B, $x_3^* = 6$ herramientas C,
 $Z^* = 36000$ pesetas de beneficio máximo.

EJEMPLO 5.

Un dentista emplea a tres asistentes. En los dos sillones de su consulta se realizan trabajos de endodoncia y estomatología general. Un servicio de endodoncia requiere 0.75 horas de sillón, 1.5 de trabajo de un asistente y 0.25 horas de trabajo del dentista. Un servicio de estomatología general requiere, respectivamente, 0.75 horas, 1 hora y 0.5 horas. Por cada servicio de endodoncia se obtiene un beneficio de 5000 pesetas y por cada servicio de estomatología general 4000 pesetas. Si tanto el dentista como sus asistentes trabajan 8 horas diarias, ¿cómo debe distribuirse el trabajo, entre endodoncias y sesiones de estomatología general, para que el beneficio diario sea máximo?

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de endodoncias.

x_2 = número de sesiones de estomatología general.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = 5000x_1 + 4000x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$0.75x_1 + 0.75x_2 \leq 16 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de sillón})$$

$$1.5x_1 + x_2 \leq 24 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de asistentes})$$

$$0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 8 \quad (\text{disponibilidad de tiempo del dentista})$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \max \quad f(x_1, x_2) = 5000x_1 + 4000x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 0.75x_1 + 0.75x_2 \leq 16 \\ \quad \quad 1.5x_1 + x_2 \leq 24 \\ \quad \quad 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 8 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Simplificando la función objetivo entre 1000, obtenemos la forma estándar al introducir las correspondientes variables de holgura:

$$\begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 0.75x_1 + 0.75x_2 + x_3^H = 16 \\ \quad \quad 1.5x_1 + x_2 + x_4^H = 24 \\ \quad \quad 0.25x_1 + 0.5x_2 + x_5^H = 8 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^H \geq 0 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 16, \quad x_4^H = 24, \quad x_5^H = 8$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_3^H	16	3/4	3/4	1	0	0
x_4^H	24	3/2	1	0	1	0
x_5^H	8	1/4	1/2	0	0	1
		5	4	0	0	0

↑

Continuamos con las siguientes iteraciones:

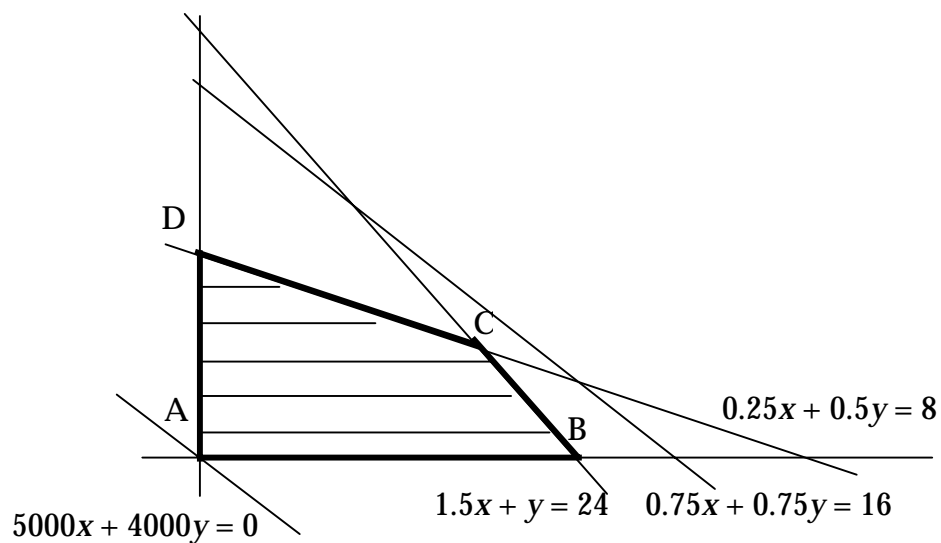
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_3^H	4	0	1/4	1	-1/2	0
x_1	16	1	2/3	0	2/3	0
x_5^H	4	0	1/3	0	-1/6	1
		0	2/3	0	-10/3	0

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_3^H	1	0	0	1	-3/8	-3/4
x_1	8	1	0	0	1	-2
x_2	12	0	1	0	-1/2	3
		0	0	0	-3	-2

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 8$ endodoncias, $x_2^* = 12$ sesiones de estomatología general,
 $Z^* = 88000$ pesetas de beneficio máximo.

Este problema puede ser resuelto aplicando el método gráfico:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$$A = (0,0), B = (16,0), C = (8,12), D = (0,16)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 80000, f(C) = 88000, f(D) = 64000$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 8 endodoncias y 12 sesiones de estomatología general, con un beneficio máximo de 88000 pesetas.