EJEMPLO 6.

Sobre dos alimentos diferentes tenemos la siguiente información por kilogramo:

Alimento	Calorías	Proteínas (gr)	Precio (ptas)
A	1000	25	60
B	2000	100	210

Hallar el coste mínimo de una dieta formada sólo por este tipo de alimentos y que al menos aporte 3000 calorías y 100 gramos de proteínas.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = kilogramos de alimento A.
x_2 = kilogramos de alimento B.

La función a minimizar, coste de la dieta, será:

$$f(x_1, x_2) = 60x_1 + 210x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$1000x_1 + 2000x_2 \geq 3000$ (aportación mínima de calorías)
$25x_1 + 100x_2 \geq 100$ (aportación mínima de proteínas)

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left|\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = 60x_1 + 210x_2 \\ \text{s.a.:} & 1000x_1 + 2000x_2 \geq 3000 \\ & 25x_1 + 100x_2 \geq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Cambiando de signo a la función objetivo, simplificando en las restricciones, e introduciendo variables de holgura y artificiales obtenemos la forma estándar:

$$\left|\begin{array}{ll} \max & -60x_1 - 210x_2 - Mx_5^A - Mx_6^A \\ \text{s.a.:} & x_1 + 2x_2 - x_3^H + x_5^A = 3 \\ & x_1 + 4x_2 - x_4^H + x_6^A = 4 \\ & x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^A, x_6^A \geq 0 \end{array}\right.$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3^H = x_4^H = 0, \qquad x_5^A = 3, \qquad x_6^A = 4$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^A	x_6^A	
x_5^A	3	1	2	-1	0	1	0	-M
$\leftarrow$ x_6^A	4	1	$\boxed{4}$	0	-1	0	1	-M
		-60	-210	0	0	-M	-M	
		2M - 60	6M - 210 $\uparrow$	-M	-M	0	0	

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^A	
x_5^A	1	$\boxed{1/2}$	0	-1	$1/2$	1	-M
x_2	1	$1/4$	1	0	$-1/4$	0	-210
		-60	-210	0	0	-M	
		$\frac{M}{2}-\frac{15}{2}$	0	-M	$\frac{M}{2}-\frac{105}{2}$	0	

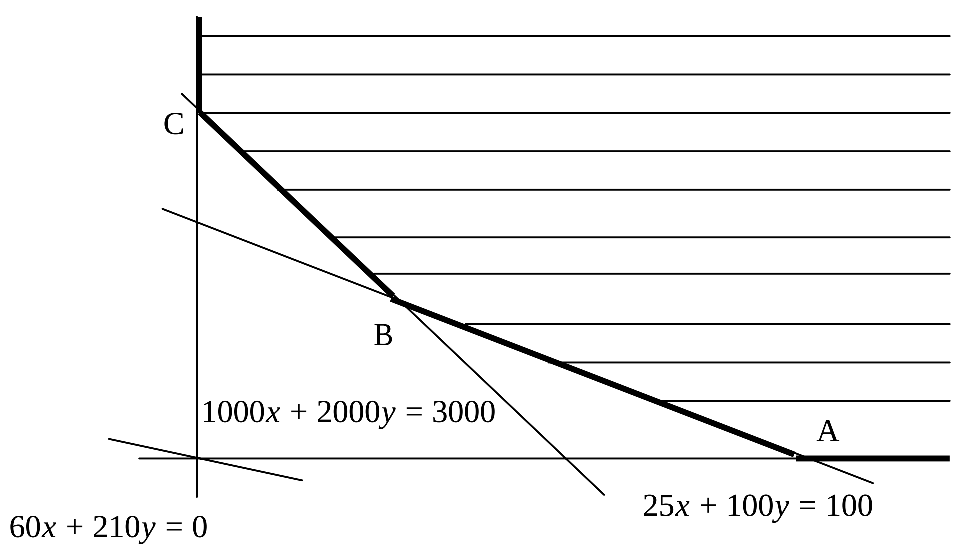
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
x_1	2	1	0	-2	1	-60
x_2	$1/2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	-210
		-60	-210	0	0	
		0	0	-15	-45	

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 2$ kilos de alimento A, $x_2^* = 0.5$ kilos de alimento B

$Z^* = 225$ pesetas de coste mínimo

Este problema puede ser resuelto aplicando el método gráfico, sin más que identificar a las variables x e y como las cantidades (kilogramos) de los alimentos A y B respectivamente. Así pues, obtenemos el siguiente dibujo:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

A = (4,0), B = (2,0.5), C = (0,1.5)
f (A) = 240, f(B) = 225, f(C) = 315

Por tanto, obtenemos la misma solución: 2 kilogramos del alimento A y 0.5 del B, con un mínimo de 225 pesetas. Notamos que al movernos por los ejes de coordenadas que limitan la región de factibilidad, la función objetivo crece hacia infinito, por lo que en dichos puntos no puede alcanzarse el mínimo buscado.

EJEMPLO 7

En una explotación agraria de 100 hectáreas se desean realizar diferentes labores como son: cultivar dos tipos de cereal (trigo y cebada), plantar dos tipos de frutales (perales y manzanos), y reforestar, para lo cual se plantarán pinos y chopos. Los beneficios que se obtienen por cada hectárea cultivada de trigo y cebada son respectivamente 3 y 2.5 unidades monetarias; así mismo, por cada hectárea de perales se obtienen 3.5 u.m. y por cada hectárea de manzanos, 4 u.m. Por otro lado, se obtiene una subvención por la reforestación y se otorgan 5 u.m. por cada hectárea de pinos y 4.5 u.m. por cada hectárea de chopos. Las normas de la explotación obligan a utilizar al menos el 40% del total de la tierra en el cultivo de los cereales, y como máximo un 35% de la tierra en cualquiera de las otras dos labores, frutales o reforestación. Calcular cómo ha de repartirse la tierra para obtener un máximo beneficio.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = hectáreas cultivadas de trigo.
x_2 = hectáreas cultivadas de cebada.
x_3 = hectáreas plantadas de perales.
x_4 = hectáreas plantadas de manzanos.
x_5 = hectáreas plantadas de pinos.
x_6 = hectáreas plantadas de chopos.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4.5x_6$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$ (máximo de hectáreas)
$x_1 + x_2 \geq 0.40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ (normas de la explotación)
$x_3 + x_4 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ (normas de la explotación)
$x_5 + x_6 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ (normas de la explotación)

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left|\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4.5x_6 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \geq 0.40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ & x_3 + x_4 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ & x_5 + x_6 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}\right.$$

Simplificando las restricciones, e introduciendo las correspondientes variables de holgura obtenemos la forma estándar:

$$\left|\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4.5x_6 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7^H = 100 \\ & -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_8^H = 0 \\ & -7x_1 - 7x_2 + 13x_3 + 13x_4 - 7x_5 - 7x_6 + x_9^H = 0 \\ & -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 13x_5 + 13x_6 + x_{10}^H = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7^H, x_8^H, x_9^H, x_{10}^H \geq 0 \end{array}\right.$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, \quad x_7^H = 100, \quad x_8^H = x_9^H = x_{10}^H = 0$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_7^H	100	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
x_8^H	0	-3	-3	2	2	$\boxed{2}$	2	0	1	0	0
x_9^H	0	-7	-7	13	13	-7	-7	0	0	1	0
x_{10}^H	0	-7	-7	-7	-7	13	13	0	0	0	1
		3	2.5	3.5	4	5	4.5	0	0	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_7^H	100	5/2	5/2	0	0	0	0	1	-1/2	0	0
x_5	0	-3/2	-3/2	1	1	1	1	0	1/2	0	0
x_9^H	0	-35/2	-35/2	20	20	0	0	0	7/2	1	0
x_{10}^H	0	$\boxed{25/2}$	25/2	-20	-20	0	0	0	-13/2	0	1
		10.5	10	-1.5	-1	0	-0.5	0	-2.5	0	0

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_7^H	100	0	0	4	$\boxed{4}$	0	0	1	4 / 5	0	-1 / 5
x_5	0	0	0	-7 / 5	-7 / 5	1	1	0	-7 / 25	0	3 / 25
x_9^H	0	0	0	-8	-8	0	0	0	-28 / 5	1	7 / 5
x_1	0	1	1	-8 / 5	-8 / 5	0	0	0	-13 / 25	0	2 / 25
		0	-0.5	15.3	15.8	0	-0.5	0	2.96	0	-0.84

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_4	25	0	0	1	1	0	0	1 / 4	1 / 5	0	-1 / 20
x_5	35	0	0	0	0	1	1	7 / 20	0	0	1 / 20
x_9^H	200	0	0	0	0	0	0	2	-4	1	1
x_1	40	1	1	0	0	0	0	2 / 5	-1 / 5	0	0
		0	-0.5	-0.5	0	0	-0.5	-3.95	-0.2	0	-0.05

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 40$, $x_2^* = x_3^* = 0$, $x_4^* = 25$, $x_5^* = 35$, $x_6^* = 0$, $Z^* = 395$ u.m. de beneficio.

Esto es, se cultivarán 40 hectáreas de trigo y ninguna de cebada; únicamente se plantarán 25 hectáreas de manzanos (ninguna de perales); además, se reforestarán 35 hectáreas con pinos y ninguna con chopos. Con todo esto, se obtendrá un beneficio de 395 unidades monetarias.