

---

## 14. SITUACIONES ESPECIALES

### 14.1. VARIABLES ACOTADAS

Muchos de los problemas que aparecen en situaciones prácticas tienen variables sujetas a cotas tanto superiores como inferiores. Si  $x_i$  es una variable acotada superior e inferiormente para ciertos valores  $g_i, h_i$ , entonces:

$$g_i \leq x_i \leq h_i$$

Si  $x_i$  está sujeta a cotas no finitas, se dice que es una variable **libre**. Si está sujeta a cotas finitas, podemos suponer, en general, que son del tipo:

$$0 \leq x_i \leq h_i$$

El problema con cotas superiores en forma estándar sería:

$$\left| \begin{array}{ll} \max & CX \\ \text{s.a.:} & AX = b \\ & 0 \leq X \leq H \end{array} \right.$$

donde  $H$  es el vector de cotas superiores. Este problema se puede transformar en uno estándar usual sin más que introducir variables de holgura  $y_i$  en cada una de las restricciones correspondientes a las cotas superiores:

$$\left| \begin{array}{ll} \max & CX \\ \text{s.a.:} & AX = b \\ & X + Y = H \\ & X, Y \geq 0 \end{array} \right.$$

Así, podemos aplicarle el Simplex, pero pagando un alto coste computacional, puesto que la cantidad de memoria de ordenador que debemos utilizar se

---

incrementa considerablemente (si  $A$  es de orden  $m \times n$ , la matriz asociada al nuevo problema será de orden  $(m + n) \times 2n$ ).

Por esto, se han desarrollado técnicas alternativas específicas para el tratamiento de este tipo de problemas con variables acotadas, pero su desarrollo excede nuestro objetivo.

## 14.2. INFECTIBILIDAD

Un problema lineal será infactible cuando no existe ninguna solución factible. Esta situación se da cuando dos o más restricciones son incompatibles.

Aparece en la práctica debido a incorrecciones en la preparación de los datos. En la mayoría de los casos en que el problema tiene grandes dimensiones, es fácil no contemplar todas las relaciones lógicas entre las variables.

## 14.3. PROBLEMAS NO ACOTADOS

Se da este caso si existe una solución factible que da un valor infinito para la función objetivo, la cual se dice que es no acotada. Usualmente es consecuencia de errores en la preparación de los datos.

Veamos en un ejemplo como detectar este tipo de dificultad computacional en el desarrollo del algoritmo del Simplex:

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad x_1 - x_2 + x_3^H = 1 \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 + x_4^H = 6 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H \geq 0 \end{array} \right.$$

Las tablas que corresponden a las iteraciones del Simplex quedan como:

		$x_1$	$x_2$	$x_3^H$	$x_4^H$	
←	$x_3^H$	1	1	-1	1	0
	$x_4^H$	6	3	-2	0	1
			3	2	0	0

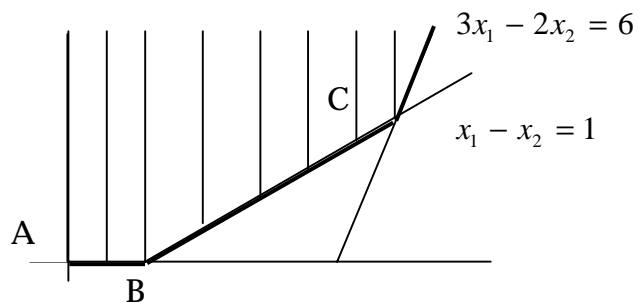


		$x_1$	$x_2$	$x_3^H$	$x_4^H$	
←	$x_1$	1	1	-1	1	0
	$x_4^H$	3	0	1	-3	1
			0	5	-3	0



		$x_1$	$x_2$	$x_3^H$	$x_4^H$	
	$x_1$	4	1	0	-2	1
	$x_2$	3	0	1	-3	1
			0	0	12	-5

Debería entrar  $x_3^H$ , pero todos los elementos de su columna son negativos. En esta situación la función objetivo puede crecer indefinidamente. Gráficamente:



Los vértices son: A(0,0), B(2,0), C(4,3). Miramos cuánto vale la función objetivo en ellos, además de en puntos que se alejen por las rectas que dejan abiertas a la región de factibilidad, esto es:

$$\begin{aligned}
 f(0,0) &= 0 \\
 f(2,0) &= 6 \\
 f(4,3) &= 18 \\
 f(0, x_2) &= 2x_2 \xrightarrow{x_2 \rightarrow +\infty} +\infty \\
 f\left(\frac{6+2x_2}{3}, x_2\right) &= 6 + 2x_2 + 2x_2 = 6 + 4x_2 \xrightarrow{x_2 \rightarrow +\infty} +\infty
 \end{aligned}$$

Efectivamente, la función objetivo no está acotada superiormente en la región de factibilidad, luego no posee máximo finito en ella.

#### 14.4. SOLUCIONES MÚLTIPLES

Si el problema de Programación Lineal admite más de una solución, es posible obtener a partir de dos cualesquiera de ellas un número infinito de soluciones óptimas también, sin más que construir una combinación lineal convexa de ambas.

Veamos un ejemplo para ver cómo se manifiesta este hecho en las tablas:

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad 40x_1 + 100x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 10x_1 + 5x_2 \leq 2500 \\ \quad \quad 4x_1 + 10x_2 \leq 2000 \\ \quad \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 900 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \max \quad 40x_1 + 100x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 10x_1 + 5x_2 + x_3^H = 2500 \\ \quad \quad 4x_1 + 10x_2 + x_4^H = 2000 \\ \quad \quad 2x_1 + 3x_2 + x_5^H = 900 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^H \geq 0 \end{array} \right.$$

		$x_1$	$x_2$	$x_3^H$	$x_4^H$	$x_5^H$
$x_3^H$	2500	10	5	1	0	0
$x_4^H$	2000	4	10	0	1	0
$x_5^H$	900	2	3	0	0	1
		40	100	0	0	0

		$x_1$	$x_2$	$x_3^H$	$x_4^H$	$x_5^H$
$x_3^H$	1500	8	0	1	-1/2	0
$x_2$	200	2/5	1	0	1/10	0
$x_5^H$	300	4/5	0	0	-3/10	1
		0	0	0	-10	0

Óptimo:  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 200$ ,  $Z^* = 20000$

Observemos que, siendo  $x_1$  no básica, su coste marginal es cero, por lo que si la introducimos en la base, sacando de la misma  $x_3^H$  que corresponde por el Simplex, el valor óptimo de la función objetivo no variará:

		$x_1$	$x_2$	$x_3^H$	$x_4^H$	$x_5^H$
$x_1$	375/2	1	0	1/8	-1/16	0
$x_2$	125	0	1	-1/20	1/8	0
$x_5^H$	150	0	0	-1/10	-1/4	1
		0	0	0	-10	0

Óptimo:  $x_1^* = \frac{375}{2}$ ,  $x_2^* = 125$ ,  $Z^* = 20000$

Existe solución múltiple formada por todas las soluciones combinación lineal convexa de las anteriores. Por ejemplo:

$$\lambda(0,200) + (1 - \lambda)\left(\frac{375}{2}, 125\right)$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow X^* = \frac{1}{2}(0,200) + \frac{1}{2}\left(\frac{375}{2}, 125\right) = \left(\frac{375}{4}, \frac{325}{2}\right) \Rightarrow Z^* = 20000$$

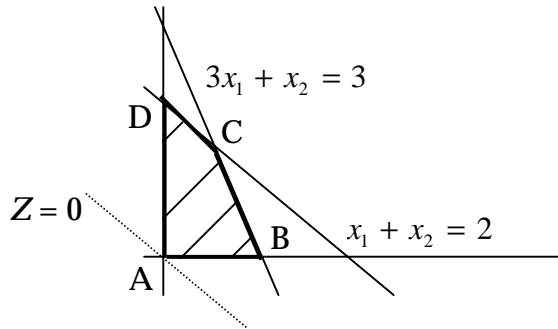
$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow X^* = \frac{1}{3}(0,200) + \frac{2}{3}\left(\frac{375}{2}, 125\right) = (125, 150) \Rightarrow Z^* = 20000$$

---

Y así, infinidad de ellas variando  $\lambda$  en el intervalo  $(0,1)$ .

Gráficamente, se puede observar mejor:

$$\begin{array}{l} \max \quad Z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad \quad 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



$Z = k$  es paralela a  $x_1 + x_2 \leq 2$ , por tanto, cualquier combinación lineal convexa de  $D(0,2)$  y  $C(1/2, 3/2)$  es solución óptima, es decir, todos los puntos del segmento delimitado por esos puntos.

$$X^* = (0,2) \Rightarrow Z^* = 2$$

$$X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow Z^* = 2$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow X^* = \frac{1}{2}(0,2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) \Rightarrow Z^* = 2$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow X^* = \frac{1}{3}(0,2) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \Rightarrow Z^* = 2$$