

7.2. VARIABLES ARTIFICIALES Y COSTES MARGINALES

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{l} \max \quad Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ \quad \quad 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Pondremos este problema en forma estándar introduciendo dos tipos de variables en las restricciones lineales de desigualdad:

VARIABLES DE HOLGURA: x_3^H , x_4^H y x_5^H

VARIABLES ARTIFICIALES: x_6^A , x_7^A y x_8^A .

Se obtiene el siguiente problema:

$$\begin{array}{l} \max \quad Z = 5x_1 + 2x_2 - Mx_6^A - Mx_7^A - Mx_8^A \\ \text{s.a.:} \quad 6x_1 + x_2 - x_3^H + x_6^A = 6 \\ \quad \quad 4x_1 + 3x_2 - x_4^H + x_7^A = 12 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 - x_5^H + x_8^A = 4 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^H, x_6^A, x_7^A, x_8^A \geq 0 \end{array}$$

La tabla correspondiente a este problema es la siguiente:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H	x_6^A	x_7^A	x_8^A
x_6^A	6	6	1	-1	0	0	1	0	0
x_7^A	12	4	3	0	-1	0	0	1	0
x_8^A	4	1	2	0	0	-1	0	0	1
		5	2	0	0	0	-M	-M	-M

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3^H = x_4^H = x_5^H = 0, \quad (x_6^A, x_7^A, x_8^A) = (6, 12, 4)$$

Como se observa, los costes en la función objetivo de esta base no son nulos, por lo que no podemos aplicar sin más el algoritmo que hemos desarrollado hasta ahora; será preciso introducir la siguiente definición:

Definición:

Llamaremos **costes marginales** a la diferencia $\bar{c}_k = c_k - z_k$, donde $z_k = \sum_{j \in B} c_j a_{jk}$, siendo B el conjunto formado por los índices de las variables básicas.

Es decir, z_k es el producto escalar de los elementos de la columna de los costes en la función objetivo de la base por los elementos de cada columna k -ésima de la matriz de coeficientes A .

Para hacer esta operación en la práctica, en la tabla anterior añadimos a la derecha la columna correspondiente a los costes en la función objetivo de la base y una última fila con el resultado obtenido para los costes marginales.

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H	x_6^A	x_7^A	x_8^A	
x_6^A	6	6	1	-1	0	0	1	0	0	$-M$
x_7^A	12	4	3	0	-1	0	0	1	0	$-M$
x_8^A	4	1	2	0	0	-1	0	0	1	$-M$
		5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	
		$11M + 5$	$6M + 2$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	

En general, lo que logramos con la introducción de los costes marginales en la primera tabla es anular los costes de las variables básicas. Además, este caso no es

más que la generalización del anterior: si únicamente es preciso añadir variables de holgura, para éstas los correspondientes z_k son cero y, por tanto, $\bar{c}_k = c_k$, esto es, los costes marginales coinciden con los costes en la función objetivo.

En este caso, la distribución de los datos del problema en la tabla será:

A	B	C	F
		D	
		E	

A: base actual (x_j)

B: valor de las variables básicas actuales (b_i)

C: matriz de los coeficientes en las restricciones (a_{ij}), que se modifican sucesivamente al pivotar.

D: costes iniciales de todas las variables en la función objetivo (c_j)

E: costes marginales para cada iteración (\bar{c}_j)

F: columna auxiliar con los costes iniciales en la función objetivo de las variables básicas actuales.